СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИЯ И ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ
(Вычислительные системы)
1985 год Выпуск 108

УДК 519.651

О ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ КУБИЧЕСКИМИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМИ СПЛАЙНАМИ. III

В.Л. Мирошниченко

В предыдущих работах [1,2] изучался вопрос об оценках погрешности приближения функции $f(x) \in W^4_\infty[a,b]$ и ее производных с помощью кубического сплайна $S(x) \in C^2[a,b]$, интерполирующего значения $f_i = f(x_i)$ в узлах произвольной неравномерной сетки Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$. При интерполяции периодических функций использовались периодические сплайны, в непериодическом случае в качестве граничных (краевых) условий для сплайна выбирались условия одного из типов:

I. $S'(x_k) = f'(x_k)$, $k = 0,N$;

II. $S''(x_k) = f''(x_k)$, $k = 0,N$;

IV. $S'''(x_p+0) - S'''(x_p-0) = 0$, $p = 1,N-1$.

В данной работе мы изучаем поведение погрешности приближения при более высокой гладкости функции $f(x)$.

Для периодических граничных условий и условий типов I,II в [4] в предположении $f(x) \in C^2W^4_{\Delta,\infty}[a,b]$ (т.е. когда $f(x) \in C^2[a,b]$ и $f(x) \in W^4_\infty[x_i,x_{i+1}]$, $i = 0,1,\ldots,N-1$) получены оценки

$$\| S^{(r)}(x) - f^{(r)}(x)\|_C \le K_r H^{4-r} \|f^{IV}\|_\infty, \quad r = 0,1, \qquad (1)$$

где $K_0 = 5/384$, $K_1 = 1/24$, $H = \max\limits_i h_i$, $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0,\ldots,N-1$. При этом показано, что в периодическом случае и для граничных условий типа П постоянные K_r в (I) достигаются при всех четных N на функциях из класса $W^4_\infty[a,b] \subset C^2W^4_{\Delta,\infty}[a,b]$. Более того, как доказано в [3], эти постоянные не могут быть уменьшены и при большей гладкости $f(x)$, а именно при $f(x) \in C^4[a,b]$. Таким образом, оценки (I) по существу являются наилучшими для кубических сплайнов класса C^2 и функций $f(x)$ из классов $C^k[a,b]$, $k \geq 4$.

Однако отмеченное обстоятельство не означает, что оценки (I) не могут быть улучшены для отдельных функций и сеток. В частности, в [4] доказано, что на произвольной неравномерной сетке для сплайнов с граничными условиями типа I (или периодическими, если $f(x)$ периодическая) и $f(x) \in C^4[a,b]$ справедливы оценки

$$\| S^{(r)}(x) - f^{(r)}(x) \|_C \leq K_{r,0} H^{4-r} \| f^{IV} \|_C + o(H^{4-r}), \; r = 0,1, \qquad (2)$$

где $K_{0,0} = 2/384$, $K_{1,0} = 0{,}01473I$. Для равномерной сетки эти оценки имеют место при $r = 0,I,2,3$ с постоянными $K_{0,0} = I/384$, $K_{1,0} = \sqrt{3}/216$, $K_{2,0} = I/I2$, $K_{3,0} = I/2$.

Такого сорта оценки, в которых выделен главный член погрешности, а остальные слагаемые по сравнению с ним стремятся к нулю при $H \to 0$ (либо $N \to \infty$) с большей скоростью, называются асимптотическими. Естественно, пользоваться этими оценками на практике имеет смысл лишь при достаточно малых H (достаточно больших N, если $H \to 0$ при $N \to \infty$), и в этой ситуации они, как показывает сопоставление (2) и (I), существенно точнее характеризуют погрешность приближения в сравнении с неасимптотическими оценками. Несмотря на некоторую неопределенность слов "для достаточно малых H" случай, когда H мало, типичен для практических задач, что предопределяет ценность асимптотических оценок. Вообще говоря, при желании, можно конкретизировать смысл этих слов. Например, из результатов [4], касающихся оценки (2), следует, что слагаемое, обозначенное в (2) через $o(H^{4-r})$, ограничено величиной $K_{r,1} H^{5-r} \| f^V \|_\infty$, где $K_{0,1} = I/96$, $K_{1,1} = I/24$. Отсюда видно, что при $K_{r,1} H \| f^V \|_\infty \ll K_{r,0} \| f^{IV} \|_C$ оценка (2) предпочтительнее чем (I).

Выделение главного члена погрешности не всегда дает положительный эффект с точки зрения уменьшения оценки погрешности. Иногда это приводит к противоположному результату.

Пусть $S(x)$ - кубический интерполяционный сплайн с граничными условиями типа П. Согласно [4,с.99] для $N = I$ и $x \in [x_0, x_1]$ имеем

$$S(x) = (1-t)f_0+tf_1-h_0^2t(1-t)[(2-t)f_0'' + (1+t)f_1'']/6,$$

где $t = (x-x_0)/h_0$. Для $f(x) \in W_\infty^5[x_0,x_1]$, используя формулу Тейлора, нетрудно получить

$$S^{(r)}(x) = f^{(r)}(x) + \xi^{(r)}(t)h_0^{4-r}f^{IV}(x) + O(H^{5-r}),\ r=0,1, \quad (3)$$

где $\xi(t) = -t(1-t)[1+t(1-t)]/24$. Так как $\|\xi(t)\|_C = 5/384$ и $\|\xi'(t)\|_C = 1/24$, то отсюда приходим к оценкам

$$\| S^{(r)}(x) - f^{(r)}(x)\|_C \le K_r h_0^{4-r}\|f^{IV}\|_C + O(H^{5-r}),\ r=0,1. \quad (4)$$

Сравнение соотношений (4) и (I) показывает, что в данном случае выделение главного члена погрешности носит чисто формальный характер и, более того, приводит к загрублению оценки.

Можно показать, что для всех $N > 1$ главный член в асимптотических оценках для сплайнов с граничными условиями типа II меньше правой части (I). Однако в любом случае эта оценка будет хуже,чем (2). Этим обстоятельством объясняется, в частности, высказанное в [4] суждение о том, что граничные условия типа I предпочтительнее условий типа П.

Аналогичная ситуация имеет место для граничных условий типа IУ, для которых выделение главного члена при $N = 3$ приводит к загрублению оценки [5], а эффект, достигаемый при $N > 3$, незначителен по сравнению с неасимптотическими оценками, полученными в [2].

Наиболее полные результаты относительно асимптотики погрешности приближения кубическими сплайнами имеются для периодического случая, когда сетка Δ равномерная с шагом $h = (b-a)/N$. Описанная в [4] методика позволяет легко найти в явном виде не только главный член погрешности, но и любое наперед заданное количество членов асимптотического разложения погрешности по степеням h (в предположении достаточной гладкости функции $f(x)$). В частности, при $x \in [x_i,x_{i+1}]$ имеет место соотношение

$$S(x) = f(x) + \varphi(t)h^4f^{IV}(x) + \psi(t)h^5f^{V}(x) + O(h^6), \quad (5)$$

где $\varphi(t) = -u^2/24$, $\psi(t) = -u(1-2t)(1+3u)/180$, $t=(x-x_i)/h$, $u = t(1-t)$.

Выражения для $S^{(r)}(x)$, $r = 1,2,3$ получаются из (5) дифференцированием по x. Отметим, что упомянутая методика с успехом была использована при исследовании асимптотики периодических сплайнов произвольной степени [6,7].

Существенно менее детально изучена асимптотика погрешности кубическими сплайнами на равномерной сетке в непериодическом случае. Здесь известны результаты только для отдельных типов краевых условий. Так, в [4,теорема3.8] для сплайнов с краевыми условиями типа I получено соотношение

$$s^{(r)}(x) = f^{(r)}(x) + \varphi^{(r)}(t)h^{4-r} f^{IV}(x) + O(h^{5-r}),\ r=0,1,2,3, \quad (6)$$
$$x \in [x_i, x_{i+1}],\ i=0,\dots,N-1.$$

Отметим, что главные члены погрешности в (5) и (6) совпадают. Можно указать ряд других краевых условий, обладающих этим свойством [4,с.231; 8]. Однако в общем случае главный член погрешности зависит не только от типа краевых условий, но и от номера рассматриваемого промежутка – i и от количества промежутков – N. В этом основная трудность исследования асимптотики в непериодическом случае.

Интересно, что соотношение вида (6) справедливо для некоторых неравномерных сеток. Следующие два утверждения фактически содержатся в [4,с.127,130], хотя и не сформулированы там в явном виде.

ТЕОРЕМА 4*). Пусть кубический сплайн $s(x)$ интерполирует функцию $f(x) \in W^5_\infty[a,b]$ на сетке Δ, такой, что $|h_i - h_{i-1}| = O(H^2)$, $i = 1, \dots, N$. Если $s(x)$ периодический или удовлетворяет краевым условиям типа I, то на каждом промежутке $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, N-1$, справедливо соотношение

$$s^{(r)}(x) = f^{(r)}(x) + \varphi^{(r)}(t)h_i^{4-r} f^{IV}(x) + O(H^{5-r}),\ r=0,1,2. \quad (7)$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть кубический сплайн $s(x)$ интерполирует функцию $f(x) \in W^5_\infty[a,b]$ на сетке Δ и промежутки $[x_k, x_{k+1}]$, $k = i-1, i, i+1$; $1 \le i \le N-2$, таковы, что $h_{i-1} = \gamma_1 h_i$, $h_{i+1} = \gamma_2 h_i$, где $\gamma_1 = O(H^3)$, $\gamma_2 = O(H^3)$. Если $s(x)$ пе-

*) Нумерация теорем и лемм в данной статье является продолжением нумерации из работ [1,2].

риодический или удовлетворяет краевым условиям одного из типов I, П, IУ, то при $x \in [x_i, x_{i+1}]$ имеет место соотношение

$$s^{(r)}(x) = f^{(r)}(x) + \varphi^{(r)}(t)h_i^{4-r}f^{IV}(x) + h_i^{2-r}O(H^3), \quad r=0,1,2. \quad (8)$$

Если $f(x) \in W_\infty^6[a,b]$ и $\gamma_1 = O(H^4)$, $\gamma_2 = O(H^4)$, то

$$s^{(r)}(x) = f^{(r)}(x) + \varphi^{(r)}(t)h_i^{4-r} f^{IV}(x) +$$
$$+ [r\varphi^{(r-1)}(t) + \varphi_H^{(r)}(t)]h_i^{5-r}f^{V}(x) + h_i^{2-r}O(H^4),$$
$$x \in [x_i, x_{i+1}], \ r = 0,1,2,$$

где $\varphi_H(t) = -t^2(1-t)^2(1-2t)/60$.

Из теорем 4 и 5 вытекает

СЛЕДСТВИЕ. При выполнении условий теоремы 4 или теоремы 5 справедливы оценки

$$|s^{(r)}(x) - f^{(r)}(x)| \le K_{r0}h_i^{4-r}\|f^{IV}\|_C + O(H^{5-r}),$$
$$r = 0,1,2; \ x \in [x_i, x_{i+1}],$$

где $K_{0,0} = 1/384$, $K_{1,0} = \sqrt{3}/216$, $K_{2,0} = 1/12$.

Главная цель настоящей статьи - построение алгоритма нахождения асимптотики погрешности кубических интерполяционных сплайнов на равномерной сетке с граничными условиями общего вида. В начале, в §I излагается необходимый вспомогательный материал об обращении некоторых трехдиагональных матриц. Приведенные здесь выражения для элементов обратной матрицы представляют собой значительно упрощенные формулы из [9]. В качестве "побочного" результата дается простой критерий невырожденности трехдиагональных матриц, который позволяет легко формулировать необходимые и достаточные условия существования и единственности различных сплайнов на равномерной сетке: кубических, параболических и др. В § 2 доказывается теорема об асимптотическом представлении решения некоторых систем с ленточными матрицами.

Далее, в § 3 описывается алгоритм построения асимптотики погрешности для кубических сплайнов класса C^2. Помимо упомянутых выше граничных условий типов I, П, IУ рассматривается ряд других условий. В отличие от [4] под граничными условиями типа Ш будем понимать условия вида:

$$\text{Ш}.\ S'''(x_0+0) = f'''(x_0),\quad S'''(x_N-0) = f'''(x_N).$$

Обсуждаются два типа "плохих", с точки зрения точности приближения, условий:

$$\text{П}^0.\ S''(x_0) = S''(x_N) = 0.$$

$$\text{Ш}^0.\ S'''(x_0+0) = S'''(x_N-0) = 0.$$

Условия П^0 известны под названием "естественные". При выполнении условий Ш^0 кубический сплайн на отрезках $[x_0, x_1]$, $[x_{N-1}, x_N]$ будет многочленом второй степени. В [10] эти условия называются параболическим выходом.

В практических задачах, как правило, трудно использовать граничные условия типов I,П,Ш, требующих задания производных функции $f(x)$ на концах отрезка $[a, b]$. Часто эти производные заменяют разностными аппроксимациями. Для того чтобы сохранить порядки в оценках приближения, нужно использовать по меньшей мере четырехточечные аппроксимации. Обозначим через $L_j(x)$ полином Лагранжа третьей степени, интерполирующий значения f_k в узлах x_k, $k = j, j+1, j+2, j+3$. Тогда граничные условия, основанные на четырехточечной аппроксимации производных, имеют вид:

$$\text{I}'.\ S'(x_0) = L_0'(x_0),\ S'(x_N) = L_{N-3}'(x_N);$$

$$\text{П}'.\ S''(x_0) = L_0''(x_0),\ S''(x_N) = L_{N-3}''(x_N);$$

$$\text{Ш}'.\ S'''(x_0+0) = L_0'''(x_0),\ S'''(x_N-0) = L_{N-3}'''(x_N).$$

Отметим, что условия Ш' были предложены в [11]. Минимальное число узлов, при котором можно использовать условия I',П',Ш', очевидно равно четырем ($N = 3$). По этому признаку к этой группе граничных условий можно отнести и условия типа IУ, тем более, что при $N = 3$ все они дают один и тот же сплайн - полином Лагранжа $L_0(x)$.

В [12] для граничных условий

$$S'(x_0) + \alpha S'(x_1) = L_0'(x_0) + \alpha L_0'(x_1),$$

$$\alpha S'(x_{N-1}) + S'(x_N) = \alpha L_{N-3}'(x_{N-1}) + L_{N-3}'(x_N)$$

(нетрудно показать, что среди них содержатся условия I',П',Ш',IУ) найдено оптимальное, с точки зрения минимизации главного члена погрешности, значение параметра $\alpha = 3$. В этом случае условия записываются в виде:

$$\text{V}.\ S'(x_0) + 3S'(x_1) = \frac{1}{6h}(-17f_0 + 9f_1 + 9f_2 - f_3),$$

$$3S'(x_{N-1}) + S'(x_N) = \frac{1}{6h}(f_{N-3} - 9f_{N-2} - 9f_{N-1} + 17f_N).$$

Главный член погрешности для сплайна с граничными условиями типа V совпадает с главным членом для сплайна с условиями I (6). Несмотря на то, что правые части соотношений V содержат по четыре значения функции, использовать эти условия можно только при $N \geq 4$, так как в случае $N = 3$ матрица системы для определения параметров сплайна вырождена.

При $N \geq 4$ можно рассматривать также граничные условия

$$\text{I}''.\ S'(x_0) = \tilde{L}_0'(x_0),\ S'(x_N) = \tilde{L}_{N-4}'(x_N),$$

где $\tilde{L}_j(x)$ – интерполяционный полином Лагранжа пятой степени с узлами x_k, $k = j, j+1, \ldots, j+4$. Интересно отметить, что при $N = 4$ (пять узлов интерполяции) сплайны с оптимальными граничными условиями V и условиями типа I" совпадают.

Дадим общую характеристику полученных асимптотических формул. При $f(x) \in W^5_\infty[a,b]$ для всех типов краевых условий, за исключением условий П^0 и Ш^0, имеют место соотношения

$$S(x) = f(x) + \varphi_{iN}(t)h^4 f^{IV}(x) + O(h^5),\quad x \in [x_i, x_{i+1}], \tag{9}$$

$$i = 0, 1, \ldots, N-1,$$

причем $\varphi_{N-i-1,N}(t) = \varphi_{i,N}(1-t)$. Функции $\varphi_{i,N}(t)$ зависят от типа граничных условий, но при удалении отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ от концов промежутка $[a,b]$ они быстро стремятся к $\varphi(t)$ из (6), что позволяет ограничиться их исследованием при сравнительно небольших значениях i для окрестности точки a ($N-i$ для окрестности точки b). Если обозначить $\varphi_{i,\infty}(t) = \lim\limits_{N\to\infty} \varphi_{iN}(t)$ для $i < N/2$, то при достаточно больших N (как показывают несложные оценки, практически уже для $N > 10$) вместо (9) вблизи левого конца промежутка $[a,b]$ (т.е. при малых i) можно полагать:

$$S(x) = f(x) + \varphi_{i\infty}(t)h^4 f^{IV}(x) + O(h^5), \quad x \in [x_i, x_{i+1}] . \quad (10)$$

Легко видеть, что отсюда можно получить формулу для i, близких к N (т.е. для малых $N-i$), если заменить t на $1-t$.

Если сплайн удовлетворяет граничным условиям I, V или I", то $\varphi_{iN}(t) = \varphi_{i\infty}(t) = \varphi(t)$, $i = 0,\ldots, N-1$. Поэтому в этих случаях, с целью выяснения различий в поведении погрешности приближения, мы выписываем два члена асимптотики. В результате для граничных условий I, V, I" получаем

$$S(x) = f(x) + \varphi(t)h^4 f^{IV}(x) + \phi_{iN}(t)h^5 f^{V}(x) + O(h^6), \quad (11)$$

$$x \in [x_i, x_{i+1}], \; i=0,\ldots,N-1,$$

где $f(x) \in W^6_\infty[a, b]$. Для больших N можно заменить $\phi_{iN}(t)$ на $\phi_{i\infty}(t) = \lim\limits_{N\to\infty} \phi_{iN}(t)$ при $i < N/2$.

Для граничных условий П^O, Ш^O имеем

$$S(x) = f(x) + \nu_{iN}(t)h^2 f''(x) + \eta_{iN}(t)h^3 f'''(x) + O(h^4), \quad (12)$$

$$x \in [x_i, x_{i+1}], \; i=0,\ldots,N-1,$$

причем $\nu_{iN}(t) \equiv 0$, $i = 0,\ldots,N-1$, когда сплайн удовлетворяет условиям типа Ш^O.

На основе анализа асимптотических представлений погрешности при различных краевых условиях можно сделать следующие выводы. Среди граничных условий I,П,Ш, использующих точные значения производных, наилучшие результаты дают условия типа I и наихудшие типа Ш. При четырехточечной аппроксимации производных (условия I', П',Ш') наихудшими являются условия типа I', а наилучшими - типа Ш'. Условия типа IУ лучше условий Ш', но хуже условий типа I. Сплайны с граничными условиями типов V и I" очень мало различаются между собой, т.е., на самом деле, условия I" столь же "оптимальные", как и условия V. Для больших N и условия V, и условия I" обеспечивают такую же точность приближения, как условия типа I. Самую большую погрешность приближения имеют сплайны с граничными условиями типа П^O. Немногим лучше условия Ш^O. Аналогичные выводы могут быть получены при анализе погрешности приближения производных. Соответствующие асимптотические формулы вытекают из (9)-(12) в результате дифференцирования по x. Таким образом, наибольший практический интерес представляют краевые условия I,IУ,V,I".

Мы всюду предполагаем, что на обоих концах отрезка $[a,b]$ краевые условия имеют одинаковый вид. Однако на практике нередко приходится задавать различные по типу условия в точках a и b. Пусть, например, в точке a задано условие типа I, т.е. $S'(a) = f'_0$, а в точке b любое из рассмотренных выше условий. Тогда, используя результаты § I, нетрудно показать, что при большом N вблизи точки a будут верны соотношения (6). Следовательно, поведение погрешности в окрестности a при большом числе узлов интерполяции определяется только граничным условием в этой точке. Этот вывод справедлив при любой комбинации перечисленных краевых условий.

Предложенный метод получения асимптотического представления погрешности приближения пригоден не только для кубических сплайнов, но и для многих других типов сплайнов, построение которых может быть сведено к решению систем с трехдиагональными матрицами.

§ I. О решении некоторых трехдиагональных систем

Пусть A_N - $(N+1)\times(N+1)$-матрица вида

$$A_N = \begin{bmatrix} a & \alpha & & & 0 \\ 1 & a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & a & 1 \\ 0 & & & \beta & a \end{bmatrix},$$

где a, α, β - заданные числа, причем $|a| > 2$. В [9] при более слабых ограничениях на величину a получены необходимые и достаточные условия невырожденности A_N и найдены элементы обратной матрицы $A_N^{-1} = [a_{ij}]$. Однако при $|a| > 2$ эти результаты можно существенно упростить. Действительно, вводя поправку на то, что в [9] размерность матрицы A_N считается равной $N\times N$, имеем

$$\left.\begin{aligned} a_{i0} &= \{a_i[1+a_1(\beta-2)] + a_{N-i}[a_0 + a_2(1-\beta)]\}/\tilde{Q}, \\ a_{iN} &= \{a_{N-i}[1+a_1(\alpha-2)] + a_i[a_0+a_2(1-\alpha)]\}/\tilde{Q}, \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

$$i = 0,1,\dots,N,$$

$$a_{ij} = a_{i0}[a_{N-j+2}(1-\alpha)+a_{N-j}]+a_{iN}[a_{N-j+1} + a_{N-j-1}(1-\beta)]+a_{N+i-j+1}, \quad i=0,\dots,N;\ j=1,\dots,N-1, \qquad (14)$$

где

$$\tilde{Q} = [1+a_1(\alpha-2)][1+a_1(\beta-2)]-[a_0+a_2(1-\alpha)][a_0 + a_2(1-\beta)], \qquad (15)$$

$$a_i = \frac{\sigma^i + \sigma^{N-i+1}}{(a+2\sigma)(1-\sigma^{N+1})}, \quad i = 0,1,\ldots,N; \quad a_{N+k+1} = a_k, \qquad (16)$$

$\sigma = \sigma(a)$ – минимальный по модулю корень уравнения $\sigma^2 + a\sigma+1 = 0$, т.е.

$$\sigma = [-a+\sqrt{a^2-4}\,\mathrm{sgn}(a)]/2, \quad |\sigma| < 1. \qquad (17)$$

Подставляя выражения для a_i в (I3)-(I5) и выполняя тождественные преобразования, нетрудно получить

$$\left.\begin{aligned} a_{i0} &= \sigma^i[a+\beta\sigma-\sigma^{2N-2i-1}(\beta+a\sigma)]/Q, \\ a_{iN} &= \sigma^{N-i}[a+\alpha\sigma-\sigma^{2i-1}(\alpha+a\sigma)]/Q, \end{aligned}\right\} \quad i = 0,\ldots,N, \qquad (18)$$

$$Q = (a+\alpha\sigma)(a+\beta\sigma)-\sigma^{2N-2}(\alpha+a\sigma)(\beta+a\sigma), \qquad (19)$$

$$a_{ij} = \frac{\sigma^{j-i}}{Q(a+2\sigma)}[a+\alpha\sigma-(\alpha+a\sigma)\sigma^{2i-1}][a+\beta\sigma-(\beta+a\sigma)\sigma^{2N-2j-1}], \qquad (20)$$

$$0 \le i \le j \le N-1;$$

$$a_{ij} = \frac{\sigma^{i-j}}{Q(a+2\sigma)}[a+\alpha\sigma-(\alpha+a\sigma)\sigma^{2j-1}][a+\beta\sigma-(\beta+a\sigma)\sigma^{2N-2i-1}], \qquad (21)$$

$$0 < j \le i \le N.$$

Очевидно, условием корректности формул (I8),(20),(2I) и одновременно условием невырожденности A_N является предположение $Q \neq 0$. Таким образом,справедлива

ТЕОРЕМА 6. Если $|a| > 2$, то $|A_N| \neq 0$ тогда и только тогда, когда

$$Q = (a+\alpha\sigma)(a+\beta\sigma) - \sigma^{2N-2}(\alpha+a\sigma)(\beta+a\sigma) \neq 0, \qquad (22)$$

где σ определено формулой (I7).

При $\alpha = \beta$ условие (22) эквивалентно условиям:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha \neq \pm a, \text{ если } N = 1; \\ &\alpha \neq a^2/2, \text{ если } N = 2; \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

$$\left.\alpha \neq \frac{-a(1\pm\sigma^N)}{\sigma\pm\sigma^{N-1}}, \quad \text{если} \quad N > 2. \right\} \qquad (23)$$

Легко видеть, что $|A_N| \neq 0$ для всех достаточно больших $N \geq N_0(\sigma)$, если выполнены условия $\alpha \neq -a/\sigma$, $\beta \neq -a/\sigma$.

Из теоремы 6, в частности, тривиальным образом получаются необходимые и достаточные условия существования и единственности интерполяционных кубических и параболических сплайнов на равномерной сетке. Так, нахождение параметров $m_i = S'(x_i)$, $i = 0,\dots,N$, кубического сплайна $S(x)$ с краевыми условиями общего вида сводится к решению системы

$$\left.\begin{aligned} 4m_0 + \alpha m_1 &= c_0, \\ m_{i-1}+4m_i+m_{i+1} &= c_i, \quad i=1,\dots,N-1, \\ \beta m_{N-1} + 4m_N &= c_N. \end{aligned}\right\}$$

Согласно теореме 6 условиями ее разрешимости будут соотношения (22),(23), где следует положить $a = 4$, $\sigma = -2+\sqrt{3}$ (для больших N достаточно потребовать $\alpha \neq 4(2+\sqrt{3})$, $\beta \neq 4(2+\sqrt{3})$).

Аналогично коэффициенты $\tilde{m}_i = S_2'(x_i)$ параболического сплайна $S_2(x)$ [13] определяются из системы вида

$$\left.\begin{aligned} 6\tilde{m}_0 + \alpha\tilde{m}_1 &= d_0, \\ \tilde{m}_{i-1}+6\tilde{m}_i+\tilde{m}_{i+1} &= d_i, \quad i = 1,\dots,N-1, \\ \beta\tilde{m}_{N-1}+6m_N &= d_N. \end{aligned}\right\}$$

Она разрешима при выполнении условий (22),(23), где нужно положить $a = 6$, $\sigma = -3+2\sqrt{2}$ (для больших N достаточно, чтобы $\alpha \neq 6(3+2\sqrt{2})$, $\beta \neq 6(3+2\sqrt{2})$).

В дальнейшем нам потребуются результаты о решении систем вида

$$\left.\begin{aligned} az_0 + \alpha z_1 &= A, \\ z_{i-1} + az_i + z_{i+1} &= C, \quad i = 1,\dots,N-1, \\ \beta z_{N-1} + az_N &= B. \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

ЛЕММА 6. Пусть для системы (24) выполнены условия $|a| > 2$, $Q \neq 0$. Тогда

$$z_i = \frac{C}{a+2} + a_{i0}\left[A - \frac{(a+\alpha)C}{a+2}\right] + a_{iN}\left[B - \frac{(a+\beta)C}{a+2}\right], \tag{25}$$

$$i = 0,1,\ldots,N.$$

Если $\alpha = \beta$ и $A = B$, то

$$z_i = \frac{C}{a+2} + \left[A - \frac{(a+\alpha)C}{a+2}\right]\cdot\frac{\sigma^i + \sigma^{N-i}}{a+\alpha\sigma+\sigma^{N-1}(\alpha+a\sigma)}, \quad i=0,\ldots,N. \tag{26}$$

Если $\alpha = \beta$ и $B = -A$, то

$$z_i = \frac{C}{a+2}\left[1 - \frac{(a+\alpha)(\sigma^i+\sigma^{N-i})}{a+\alpha\sigma+\sigma^{N-1}(\alpha+a\sigma)}\right] + \frac{A(\sigma^i-\sigma^{N-i})}{a+\alpha\sigma-\sigma^{N-1}(\alpha+a\sigma)}, \tag{27}$$

$$i = 0,\ldots,N.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сделаем в системе (24) замену $z_i = C/(a+2) + \delta_i$, $i = 0,1,\ldots, N$. Тогда

$$\left.\begin{aligned} a\delta_0 + \alpha\delta_1 &= \tilde{A}, \\ \delta_{i-1} + a\delta_i + \delta_{i+1} &= 0, \quad i=1,\ldots,N-1, \\ \beta\delta_{N-1} + a\delta_N &= \tilde{B}, \end{aligned}\right\}$$

где $\tilde{A} = A - C(a+\alpha)/(a+2)$, $\tilde{B} = B - C(a+\beta)/(a+2)$. Очевидно, решение этой системы имеет вид $\delta_i = a_{i0}\tilde{A} + a_{iN}\tilde{B}$, $i = 0,\ldots, N$. Учитывая связь неизвестных z_i и δ_i, получаем (25). Формулы (26),(27) вытекают из (25) в результате элементарных преобразований.

§ 2. Асимптотическое представление решения системы с ленточной матрицей

В качестве нормы вектора $\bar{z} = (z_0, z_1, \ldots, z_N)^T$ будем рассматривать величину $\|z\| = \max\limits_i |z_i|$. Согласованная с ней норма матрицы $A = [a_{ij}]$, $i,j = 0,\ldots,N$, определяется равенством $\|A\| = \max\limits_i \sum\limits_j |a_{ij}|$. Матрицу A будем называть $(2m+1)$-диагональной, если $a_{ij} = 0$ при $|i-j| > m$. Обозначим $f_i^{(k)} = f^{(k)}(x_i)$, где $x_i = a + (i-1)h$, $i = 0,\ldots,N$; $h = (b-a)/N$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть в системе

$$A\bar{z} = \bar{d} \tag{28}$$

с невырожденной $(2m+1)$-диагональной

матрицей $A=[a_{ij}]$, $i,j=0,1,\dots,N$, компоненты правой части имеют вид

$$d_i = \sum_{s=0}^{p} c_{is} h^{k+s} f_i^{(n+s)} + e_i, \quad i=0,1,\dots,N, \tag{29}$$

причем $e_i = O(h^{k+p+1})$. Если $\|\bar{c}_s\|$, $s=0,\dots,p$; $\|A\|$, $\|A^{-1}\|$, где $\bar{c}_s=(c_{0s},c_{1s},\dots,c_{Ns})^T$, ограничены величинами, не зависящими от N и $f(x) \in W_\infty^{n+p+1}[a,b]$, то

$$z_i = \sum_{s=0}^{p} \alpha_{is} h^{k+s} f_i^{(n+s)} + O(h^{k+p+1}), \quad i=0,1,\dots,N, \tag{30}$$

где коэффициенты α_{is} определяются соотношениями

$$\sum_j a_{ij}\alpha_{j0} = c_{i0}, \quad i=0,1,\dots,N; \tag{31.0}$$

$$\sum_j a_{ij}\alpha_{j1} = c_{i1} - \sum_j a_{ij}\alpha_{j0}(j-i), \quad i=0,1,\dots,N; \tag{31.1}$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\sum_j a_{ij}\alpha_{jp} = c_{ip} - \sum_j a_{ij}\left\{\alpha_{j0}\frac{(j-i)^p}{p!} + \alpha_{j1}\frac{(j-i)^{p-1}}{(p-1)!} + \dots \right.$$
$$\left. \dots + \alpha_{jp-1}(j-i)\right\}, \quad i=0,1,\dots,N. \tag{31.p}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждое из соотношений (31) представляет собой систему уравнений с матрицей A. Последовательно решая их, можно вычислить все коэффициенты α_{is}: сначала $\bar{\alpha}_0=\{\alpha_{00},\dots,\alpha_{N0}\}^T$, затем $\bar{\alpha}_1=\{\alpha_{01},\dots,\alpha_{N1}\}^T$ и т.д. Отметим также, что из неравенств

$$\|\bar{\alpha}_0\| \le \|A^{-1}\|\|\bar{c}_0\|,$$

$$\|\bar{\alpha}_1\| \le \|A^{-1}\|\{\|\bar{c}_1\| + m\|A\|\|\bar{\alpha}_0\|\},$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\|\bar{\alpha}_p\| \le \|A^{-1}\|\left\{\|\bar{c}_p\| + \|A\|\left(\frac{m^p}{p!}\|\bar{\alpha}_0\| + \frac{m^{p-1}}{(p-1)!}\|\bar{\alpha}_1\| + \dots + m\|\bar{\alpha}_{p-1}\|\right)\right\},$$

очевидным образом вытекающих из (3I), следует ограниченность норм векторов $\bar{\alpha}_s = (\alpha_{0s},\dots,\alpha_{Ns})^T$ константами, независящими от N.

Чтобы не загромождать изложение, мы проведем дальнейшие рассуждения для случая $p = 1$. Обозначим

$$z_i^0 = \alpha_{i0}h^k f_i^{(n)} + \alpha_{i1}h^{k+1}f_i^{(n+1)},\quad i=0,\dots,N,$$

где α_{i0},α_{i1} удовлетворяют условиям (3I). Подставляя величины z_i^0 вместо z_i в левую часть системы (28), используя формулу Тейлора и учитывая (3I.0), (3I.I), имеем

$$\begin{aligned}\sum_j a_{ij}z_j^0 &= \sum_j a_{ij}\alpha_{i0}h^k[f_i^{(n)} + (j-i)hf_i^{(n+1)} + R_{ij0}] + \\ &+ \sum_j a_{ij}\alpha_{i1}h^{k+1}[f_i^{(n+1)} + R_{ij1}] = \\ &= c_{i0}h^k f_i^{(n)} + c_{i1}h^{k+1}f_i^{(n+1)} + \delta_i = d_i - e_i + \delta_i,\end{aligned} \tag{32}$$

где $\delta_i = h^k(\sum_j a_{ij}\alpha_{i0}R_{ij0} + h\sum_j a_{ij}\alpha_{i1}R_{ij1})$. Очевидно, $|R_{ij0}| \le$ $\le m^2/2h^2\|f^{(n+2)}\|_\infty$, $|R_{ij1}| \le mh\|f^{(n+2)}\|_\infty$. Поэтому $|\delta_i| = O(h^{k+2})$. Из (28) и (32) получаем $A(\bar{z}-\bar{z}^0) = 2\bar{e}-\bar{\delta}$. Отсюда

$$\|\bar{z}-\bar{z}^0\| \le \|A^{-1}\|(2\|\bar{e}\| + \|\bar{\delta}\|) = O(h^{k+2}),$$

т.е. $z_i = z_i^0 + O(h^{k+2})$, что и требовалось показать.

Отметим, что доказанную теорему можно интерпретировать как обоснование метода неопределенных коэффициентов для нахождения решения системы (28) в виде асимптотического разложения (30).

§ 3. Асимптотическое представление погрешности приближения кубическим сплайном класса C^2 на равномерной сетке

Всюду в дальнейшем узлы x_i сетки Δ предполагаются равномерно расположенными с шагом $h = (b-a)/N$, т.е. $x_i = a+(i-1)h, i=0,\dots$ $\dots, N$. Функция $f(x)$ считается дифференцируемой нужное число раз.

Кубический интерполяционный сплайн $S(x)$ класса C^2 записывается при $x \in [x_i,x_{i+1}]$ (см. [4]) в виде

$$\begin{aligned}S(x) &= (1-t)^2(1+2t)f_i + t^2(3-2t)f_{i+1} + \\ &+ m_i ht(1-t)^2 - m_{i+1}ht^2(1-t),\end{aligned} \tag{33}$$

где обозначено $m_j = S'(x_j)$, $j=0,\dots,N$. Наряду с $S(x)$ рассмотрим кубический эрмитов сплайн $H(x)$, определяемый условиями $H(x_i) = f_i$, $H'(x_i) = f'_i$, $i = 0,\dots,N$. Имеем

$$H(x) = (1-t)^2(1+2t)f_i + t^2(3-2t)f_{i+1} +$$

$$+ ht(1-t)^2 f'_i - ht^2(1-t)f'_{i+1}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}]. \tag{34}$$

Сопоставляя (33) и (34), находим

$$S(x) = H(x) + ht(1-t)[q_i(1-t) - q_{i+1}t], \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \tag{35}$$

где $q_j = m_j - f'_j$. Известно [4,с.68], что

$$H(x) = f(x) + \varphi(t)h^4 f^{IV}(x) + \phi_H(t)h^5 f^V(x) + O(h^6), \tag{36}$$

$$x \in [x_i, x_{i+1}],$$

где $\varphi(t) = -u^2/24$, $\phi_H(t) = -u^2(1-2t)/60$, $u = t(1-t)$. Таким образом, построение асимптотики для $S(x)$ сводится к нахождению асимптотических представлений для величин m_i, $i = 0,\dots,N$. Их вид определяется краевыми условиями кубического сплайна.

Дальнейшее изложение разбито на пункты, которые нумеруются в соответствии с рассматриваемым типом краевых условий. Рассуждения носят одинаковый характер для всех типов краевых условий и поэтому подробно излагаются лишь в случае краевых условий типа I.

I. Для условий типа I система относительно параметров m_i имеет вид [4,с.98]:

$$\left.\begin{aligned} m_0 &= c_0, \\ m_{i-1} + 4m_i + m_{i+1} &= c_i, \quad i = 1,\dots,N-1, \\ m_N &= c_N, \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

где $c_0 = f'_0$, $c_N = f'_N$, $c_i = 3(f_{i+1} - f_{i-1})/h$, $i = 1,\dots,N-1$. Переходя к неизвестным q_i, получаем

$$\left.\begin{aligned} q_0 &= q_N = 0, \\ q_{i-1} + 4q_i + q_{i+1} &= \tilde{c}_i = c_i - f'_{i-1} - 4f'_i - f'_{i+1}, \end{aligned}\right\}$$

$$i = 1,\dots,N-1 .$$

Разлагая в выражении для $\tilde{c}_i$ величины $f_{i-1}, f_{i+1}, f'_{i-1}, f'_{i+1}$ по формуле Тейлора в точке x_i, приходим к системе

$$\left.\begin{aligned} 4q_0 &= 0, \\ q_{i-1}+4q_i+q_{i+1} &= -h^4/30 f_i^V + O(h^5), \quad i=1,\dots,N-1, \\ 4q_N &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Применяя к этой системе теорему 7 ($k = 4$, $n = 5$, $p = 0$), имеем

$$q_i = \alpha_i h^4 f_i^V + O(h^5), \quad i = 0,1,\dots,N, \tag{38}$$

где α_i определяются из условий

$$\left.\begin{aligned} 4\alpha_0 &= 0, \\ \alpha_{i-1}+4\alpha_i+\alpha_{i+1} &= -1/30, \quad i = 1,\dots,N-1, \\ 4\alpha_N &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Согласно лемме 6 решение этой системы записывается по формуле (26), где следует положить $a = 4$, $\sigma = -2+\sqrt{3}$, $\alpha = \beta = 0$, $A = B = 0$, $C = -1/30$. Следовательно,

$$\alpha_i = -\frac{1}{180}\left[1 - \frac{\sigma^i + \sigma^{N-i}}{1 + \sigma^N}\right], \quad i = 0,\dots,N,$$

и, учитывая (38), получаем

$$q_i = -\frac{h^4}{180}\left[1 - \frac{\sigma^i + \sigma^{N-i}}{1 + \sigma^N}\right] f_i^V + O(h^5), \quad i = 0,\dots,N. \tag{39}$$

Подставим выражения q_i, q_{i+1} в (35) и разложим f_i^V, f_{i+1}^V по формуле Тейлора в точке x, т.е. $f_k^V = f^V(x) + O(h)$, $k = i, i+1$. Принимая во внимание (36), в итоге приходим к формуле (II) для $S(x)$, где

$$\phi_{iN}(t) = -\frac{u}{180}\left\{(1-2t)(1+3u) - \frac{v\sigma^i + w\sigma^{N-i-1}}{1 + \sigma^N}\right\}, \quad i=0,\dots,N-1, \tag{40}$$

$$v = 1-t(1+\sigma), \quad w = \sigma-t(1+\sigma).$$

Так как $|\sigma| = 2-\sqrt{3} < 0.27$, то из (40) видно, что при удалении от концов отрезка $[a,b]$ (предполагается, что N достаточно велико) слагаемое, содержащее σ^i и σ^{N-i} быстро стремится к нулю и в этом случае в (II) можно полагать

$$\phi_{iN}(t) = \phi(t) = -u(1-2t)(1+3u)/180 .$$

Фактически, при больших N достаточно исследовать поведение ϕ_{iN} вблизи одного из концов отрезка $[a, b]$, например, в окрестности точки a. Из соображений симметрии ясно, что точно такая же картина будет в окрестности точки b. Из (40) видно, что при большом N и $i < N/2$ в (II) вместо $\phi_{iN}(t)$ можно взять

$$\phi_{i\infty}(t) = -\frac{u}{180}[(1-2t)(1+3u) - v\sigma^i]. \qquad (41)$$

Нетрудно получить оценку

$$|\phi_{iN}(t) - \phi_{i\infty}(t)| < |\sigma|^{N-i-1}/720 < |\sigma|^{N/2}/720, \quad i < N/2,$$

из которой видно, что при $N > 10$ функции ϕ_{iN} и $\phi_{i\infty}$ практически совпадают между собой.

П. Система для m_i [4,с.98]:

$$\left.\begin{aligned} 4m_0 + 2m_1 &= c_0, \\ m_{i-1} + 4m_i + m_{i+1} &= c_i, \quad i=1,\dots,N-1, \\ 2m_{N-1} + 4m_N &= c_N, \end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

где $c_0 = 6(f_1-f_0)/h-hf_0''$, $c_N = 6(f_N - f_{N-1})/h + hf_N''$. Отсюда для q_i получаем систему

$$\left.\begin{aligned} 4q_0 + 2q_1 &= -h^3/12\, f_0^{IV} + O(h^4), \\ q_{i-1} + 4q_i + q_{i+1} &= O(h^4), \quad i=1,\dots,N-1, \\ 2q_{N-1} + 4q_N &= h^3/12\, f_N^{IV} + O(h^4). \end{aligned}\right\}$$

В результате применения теоремы 7 и леммы 6 находим

$$q_i = -\frac{h^3}{24\sqrt{3}}\cdot\frac{\sigma^i-\sigma^{N-i}}{1+\sigma^N} f_i^{IV} + O(h^4), \; i=0,1,\dots,N.$$

После подстановки q_i в (35) получаем формулу (9), где

$$\varphi_{iN}(t) = -\frac{u}{24}\left[u + \frac{v\sigma^i - w\sigma^{N-i-1}}{\sqrt{3}(1+\sigma^N)} \right], \quad i=0,\dots,N-1,$$

или для больших N – формулу (10), где

$$\varphi_{i\infty}(t) = -\frac{u}{24}\left[u + \frac{\sqrt{3}}{3}\, v\sigma^i \right], \qquad i < N/2. \tag{43}$$

Степень близости между функциями $\varphi_{iN}(t)$ и $\varphi_{i\infty}(t)$ характеризуется оценкой

$$|\varphi_{iN}(t) - \varphi_{i\infty}(t)| < \frac{|\sigma|^{N-i-1}}{96\sqrt{3}} < \frac{|\sigma|^{N/2}}{96\sqrt{3}}, \quad i < N/2.$$

Ш. Система для m_i:

$$\left.\begin{aligned} m_0 + m_1 &= c_0, \\ m_{i-1} + 4m_i + m_{i+1} &= c_i, \quad i=1,2,\dots,N-1, \\ m_{N-1} + m_N &= c_N, \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

где $c_0 = 2(f_1-f_0)/h + h^2 f_0''' /6$, $c_N = 2(f_N-f_{N-1})/h + h^2 f_N''' /6$.

Система для q_i:

$$\left.\begin{aligned} 4q_0 + 4q_1 &= -h^3/3\, f_0^{IV} + O(h^4), \\ q_{i-1} + 4q_i + q_{i+1} &= O(h^4), \quad i=1,\dots,N-1, \\ 4q_{N-1} + 4q_N &= h^3/3\, f_N^{IV} + O(h^4). \end{aligned}\right\}$$

Отсюда

$$q_i = -\frac{h^3}{12}\cdot\frac{\sigma^i - \sigma^{N-i}}{(1+\sigma)(1-\sigma^{N-1})}\cdot f_i^{IV} + O(h^4), \quad i=0,\dots,N.$$

В итоге имеем (9), где

$$\varphi_{iN}(t) = -\frac{u}{24}\left[u + (1+\sqrt{3})\,\frac{v\sigma^i - w\sigma^{N-i-1}}{1-\sigma^{N-1}} \right], \quad i=0,\dots,N-1.$$

Кроме того,

$$\varphi_{i\infty}(t) = -\frac{u}{24}\,[u + (1+\sqrt{3})v\sigma^i], \quad i < N/2. \tag{45}$$

Погрешность приближения для сплайнов с граничными условиями I–Ш характеризуется функциями $\varphi_{iN}(t)$ в (9) или, что практически то же самое, функциями $\varphi_{i\infty}(t)$. На рис. I приведены графики функций $-384\,\varphi_{i\infty}(t)$, $i = 0, I, 2, 3$, для этих краевых условий (для условий типа I $\varphi_{i\infty}(t) = \varphi_{iN}(t) = \varphi(t)$, для условий типов П, Ш функции $\varphi_{i\infty}(t)$ определены соответственно формулами (43), (45)). График функции $-384\,\varphi_{0\infty}(t)$ для условий типа Ш выходит за рамки рис. I. В табл. I

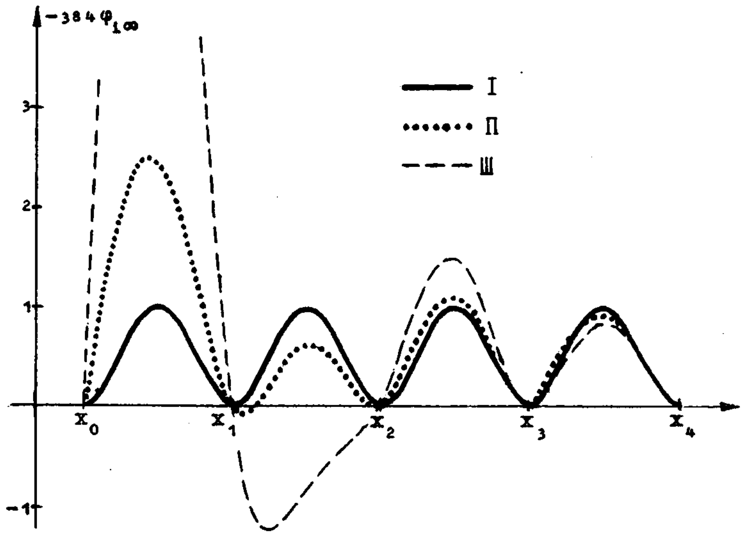

Рис. I

Таблица I

Тип краевых условий	$384\,\|\varphi_{i\infty}\|_C$			
	$i = 0$	$i = I$	$i = 2$	$i = 3$
I	I.0	I.0	I.0	I.0
П	2.5I	0,62	I.II	0.97
Ш	8.34	I.23	I.5I	0.87
I'	I5.45	5.29	0.53	I.30
П'	I4.83	5.I3	0.50	I.28
Ш'	I3.99	4.90	0.46	I.27
IУ	I0.85	4.07	0.30	I.2I

даны значения величин $\|\varphi_{i\infty}\|_C = \|\varphi_{i\infty}(t)\|_{C[0,1]}$, $i = 0,1,2,3$, которые можно интерпретировать как постоянные $K_{i\infty}$ в асимптотических оценках

$$|S(x) - f(x)| \le h^4 K_{i\infty} \|f^{IV}\|_\infty + O(h^5), \quad x \in [x_i, x_{i+1}].$$

Из рис.I и табл.I наглядно видно, что граничные условия типа I существенно эффективнее условий II и особенно III с точки зрения точности приближения.

I'. Система для m_i получается из (37), где следует положить

$$c_0 = L_0'(x_0) = (-11f_0+18f_1 - 9f_2 + 2f_3)/(6h),$$

$$c_N = L_{N-3}'(x_N) = (-2f_{N-3}+9f_{N-2}-18f_{N-1}+11f_N)/(6h).$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} 4q_0 \qquad\qquad &= h^3 f_0^{IV} + O(h^4), \\ q_{i-1} + 4q_i + q_{i+1} &= O(h^4), \quad i=1,\dots,N-1, \\ 4q_N &= -h^3 f_N^{IV} + O(h^4). \end{aligned}\right\}$$

Отсюда

$$q_i = h^3 \frac{\sigma^i - \sigma^{N-i}}{4(1-\sigma^N)} f_i^{IV} + O(h^4), \quad i=0,1,\dots,N,$$

и в формулах (9) и (10) соответственно

$$\varphi_{iN}(t) = -\frac{u}{24}\left[u - \frac{6}{1-\sigma^N}(v\sigma^i - w\sigma^{N-i-1})\right], \; i=0,\dots,N-1;$$

$$\varphi_{i\infty}(t) = -u(u - 6v\sigma^i)/24, \quad i < N/2.$$

II'. Система для m_i вытекает из (42), где нужно положить

$$c_0 = 6(f_1-f_0)/h - hL_0''(x_0) = (-8f_0+11f_1-4f_2+f_3)/h,$$

$$c_N = 6(f_N-f_{N-1})/h + hL_{N-3}''(x_N) = (8f_N-11f_{N-1}+4f_{N-2}-f_{N-3})/h.$$

Тогда

$$4q_0 + 2q_1 \qquad = 5h^3/6\, f_0^{IV} + O(h^4),$$

$$\left.\begin{aligned} q_{i-1}+4q_i+q_{i+1} &= O(h^4), \quad i=1,\dots,N-1, \\ 2q_{N-1}+4q_N &= -5h^3/6\, f_N^{IV} + O(h^4). \end{aligned}\right\}$$

Отсюда

$$q_i = \frac{10h^3}{24\sqrt{3}} \cdot \frac{\sigma^i - \sigma^{N-i}}{1+\sigma^N} f_i^{IV} + O(h^4),\ i=0,\dots,N,$$

и далее

$$\varphi_{iN}(t) = -\frac{u}{24}\left[u - \frac{10\sqrt{3}}{3(1+\sigma^N)}(v\sigma^i - w\sigma^{N-i-1})\right], \quad i=0,\dots,N-1;$$

$$\varphi_{i\infty}(t) = -\frac{u}{24}\,(u - 10\sqrt{3}v\sigma^i/3), \quad i < N/2.$$

Ш'. Система для m_i вытекает из (44), где нужно положить

$$c_0 = 2(f_1-f_0)/h+h^2L_0'''(x_0)/6 = (-13f_0+15f_1-3f_2+f_3)/(6h),$$

$$c_N = 2(f_N-f_{N-1})/h + h^2L_{N-3}'''(x_N)/6 =$$

$$=(13f_N-15f_{N-1}+3f_{N-2}-f_{N-3})/(6h).$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} 4q_0+4q_1 &= 2h^3/3f_0^{IV} + O(h^4), \\ q_{i-1}+4q_i+q_{i+1} &= O(h^4), \quad i=1,\dots,N-1, \\ 4q_{N-1}+4q_N &= -2h^3/3f_N^{IV} + O(h^4). \end{aligned}\right\}$$

Отсюда

$$q_i = \frac{h^3}{6} \cdot \frac{\sigma^i - \sigma^{N-i}}{(1+\sigma)(1-\sigma^{N-1})} f_i^{IV} + O(h^4), \quad i=0,\dots,N;$$

и далее

$$\varphi_{iN}(t) = -\frac{u}{24}\left[u - \frac{4(v\sigma^i - w\sigma^{N-i-1})}{(1+\sigma)(1-\sigma^{N-1})}\right], \quad i=0,\dots,N-1;$$

$$\varphi_{i\infty}(t) = -\frac{u}{24}\left(u - \frac{4v\sigma^i}{1+\sigma}\right), \quad i < N/2.$$

IУ. Система для m_i, приведенная в [4], имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} m_0 - m_2 &= -2(f_0-2f_1+f_2)/h\,, \\ m_{i-1} + 4m_i + m_{i+1} &= c_i\,, \quad i=1,\dots,N-1\,, \\ -m_{N-2} + m_N &= 2(f_N-2f_{N-1}+f_{N-2})/h\,. \end{aligned}\right\}$$

Исключая из первого уравнения неизвестное m_2, а из последнего m_{N-2}, имеем

$$\left.\begin{aligned} 2m_0 + 4m_1 &= (-5f_0+7f_1-2f_2)/h\,, \\ m_{i-1} + 4m_i + m_{i+1} &= c_i\,, \quad i=1,2,\dots,N-1\,, \\ 4m_{N-1} + 2m_N &= (5f_N-7f_{N-1}+2f_{N-2})/h\,. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда находим

$$\left.\begin{aligned} 4q_0 + 8q_1 &= h^3/3f_0^{IV} + O(h^4)\,, \\ q_{i-1} + 4q_i + q_{i+1} &= O(h^4)\,, \ i=1,\dots,N-1\,, \\ 8q_{N-1} + 4q_N &= -h^3/3f_N^{IV} + O(h^4)\,. \end{aligned}\right\}$$

Откуда получаем

$$q_i = \frac{(2+\sqrt{3})h^3}{12\sqrt{3}} \cdot \frac{\sigma^i - \sigma^{N-i}}{1+\sigma^{N-2}} f_i^{IV} + O(h^4)\,,\ i=0,\dots,N.$$

В итоге

$$\varphi_{iN}(t) = -\frac{u}{24}\left[u - \frac{2(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}(1+\sigma^{N-2})}(v\sigma^i - w\sigma^{N-i-1})\right],\ i=0,\dots,N-1\,,$$

$$\varphi_{i\infty}(t) = -\frac{u}{24}\left(u + \frac{2}{\sqrt{3}} v\sigma^{i-1}\right),\ \ i < N/2.$$

Графики функций 384 $\varphi_{i\infty}(t)$, $i = 0,1,2,3$, для граничных условий I'-Ш', IУ, представленные на рис.2, а также приведенные в табл. I значения $\|\varphi_{i\infty}\|_C$ позволяют утверждать, что лучшими среди этих граничных условий являются условия типа IУ.

П^0. Система для m_i получается из (42) при $c_0 = 6(f_1-f_0)/h$, $c_N = 6(f_N-f_{N-1})/h$. Тогда

$$\left.\begin{array}{l} 4q_0 + 2q_1 = hf''_0 + O(h^3), \\ q_{i-1} + 4q_i + q_{i+1} = O(h^3),\ i=1,\dots,N-1, \\ 2q_{N-1} + 4q_N = -hf''_N + O(h^3). \end{array}\right\}$$

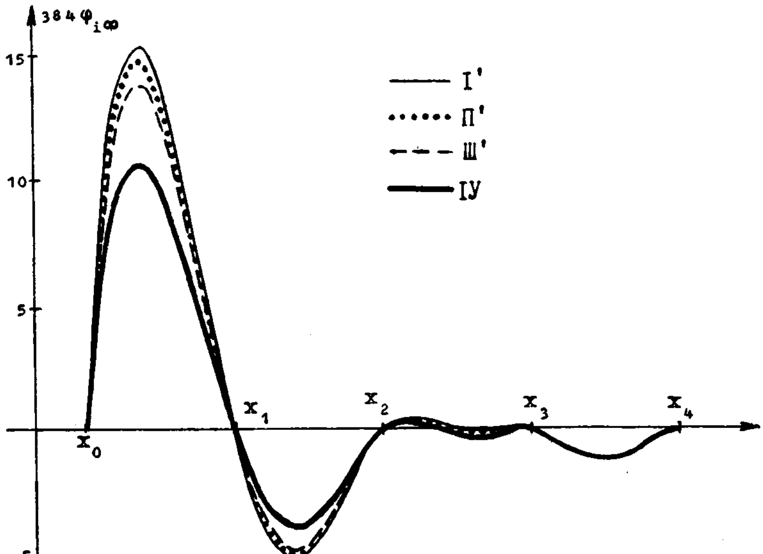

Рис. 2

В соответствии с теоремой 7

$$q_i = \alpha_i hf''_i + \beta_i h^2 f'''_i + O(h^3),\ i=0,\dots,N. \tag{46}$$

Коэффициенты α_i легко находятся с помощью леммы 6

$$\alpha_i = \frac{\sigma^i - \sigma^{N-i}}{2\sqrt{3}(1+\sigma^N)},\ i=0,\dots,N.$$

Это позволяет получить выражения для функций ν_{iN} в формуле (12)

$$\nu_{iN}(t) = \frac{u(v\sigma^i - w\sigma^{N-i-1})}{2\sqrt{3}(1+\sigma^N)},\ i=0,\dots,N-1;\quad \nu_{i\infty}(t) = \frac{uv\sigma^i}{2\sqrt{3}},\ i < N/2.$$

Существенно сложнее обстоит дело с вычислением величин β_i в (46). Согласно теореме 7 они удовлетворяют системе

$$\left.\begin{aligned} 4\beta_0 + 2\beta_1 \qquad\qquad &= d_0, \\ \beta_{i-1} + 4\beta_i + \beta_{i+1} &= d_i, \quad i=1,\dots,N-1, \\ 2\beta_{N-1} + 4\beta_N &= d_N, \end{aligned}\right\} \qquad (47)$$

где

$$d_0 = d_N = -\frac{\sigma - \sigma^{N-1}}{\sqrt{3}(1+\sigma^N)}, \quad d_i = -\frac{\sigma^i + \sigma^{N-i}}{1+\sigma^N}, i=1,\dots,N-1.$$

Однако ее решение нельзя найти с помощью леммы 6 и поэтому мы вынуждены привлекать общую формулу

$$\beta_i = \sum_{j=0}^{N} a_{ij} d_j, \ i=0,\dots,N,$$

где a_{ij} - элементы матрицы, обратной к матрице системы (47). Их явные выражения имеются в § I. После довольно громоздких выкладок получаем

$$\beta_i = -\frac{1}{6(1-\sigma^{2N})}\Big\{(\sigma-\sigma^{N-1})(\sigma^i+\sigma^{N-i}) +$$

$$+\frac{\sigma^i(1+\sigma^{2N-2i})}{1+\sigma^N}[\sqrt{3}i(1+\sigma^N)-\sigma(1-\sigma^{2i})(1+\sigma^{N-2i-2})/2] +$$

$$+\frac{\sigma^{N-i}(1+\sigma^{2i})}{1+\sigma^N}[\sqrt{3}(N-i-1)(1+\sigma^N)-\sigma(1-\sigma^{2N-2i-2})(1+\sigma^{2i-N})/2]\Big\}.$$

На наш взгляд эти формулы не представляют практической пользы и мы не будем выводить на их основе выражения для функций $\eta_{iN}(t)$ в (12). Мы остановились подробно на выводе формул β_i лишь для того, чтобы продемонстрировать те трудности, с которыми приходится сталкиваться при попытке получения более одного члена в асимптотическом представлении для $S(x)$.

При больших N коэффициенты β_i можно заменить на $\beta_{i\infty} = \lim\limits_{N\to\infty} \beta_i$, которые очень просты. Имеем $\beta_{i\infty} = -i\sigma^i/(2\sqrt{3})$, $i < N/2$. Теперь нетрудно получить

$$\eta_{i\infty}(t) = -\frac{u\sigma^i}{2\sqrt{3}}[u(1+\sigma) + iv - \sigma t] , \qquad i < N/2 .$$

Как видно из формулы (I2), сплайн с "естественными" краевыми условиями типа Π^0 дает невысокую точность приближения. Во-первых, порядок приближения равен $O(h^2)$ вместо оптимального $O(h^4)$. Во-вторых, нетрудно вычислить: $8\|\nu_{0,\infty}\|_C = 0.39$, $8\|\nu_{1,\infty}\|_C = 0.11$, $8\|\nu_{2,\infty}\|_C = 0.03$, $8\|\nu_{3,\infty}\|_C = 0.008$ и, следовательно, на крайних интервалах $[x_0, x_1], [x_1, x_2]$ точность приближения кубическим сплайном с условиями Π^0 сравнима с точностью обычной линейной интерполяции. Вместе с тем отметим, что отрицательное воздействие краевых условий типа Π^0 быстро затухает по мере удаления от концов отрезка $[a, b]$.

$Ш^0$. Система для m_i вытекает из (44), если положить

$$c_0 = 2(f_1 - f_0)/h, \quad c_N = 2(f_N - f_{N-1})/h .$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} 4q_0 + 4q_1 &= -2h^2/3\, f_0''' + O(h^3), \\ q_{i-1} + 4q_i + q_{i+1} &= O(h^3), \quad i=1,\ldots,N-1, \\ 4q_{N-1} + 4q_N &= -2h^2/3\, f_N''' + O(h^3). \end{aligned}\right\}$$

Отсюда

$$q_i = -\frac{h^2}{6}\cdot\frac{\sigma^i + \sigma^{N-i}}{(1+\sigma)(1+\sigma^{N-1})} f_i''' + O(h^3), \quad i=0,\ldots,N,$$

и, следовательно, в формуле (I2)

$$\eta_{iN}(t) = -\frac{u(v\sigma^i + w\sigma^{N-i-1})}{6(1+\sigma)(1+\sigma^{N-1})}, \ i=0,\ldots,N-1; \quad \eta_{i\infty}(t) = -\frac{uv\sigma^i(\sqrt{3}+1)}{12} .$$

Таким образом, точность приближения для сплайна с граничными условиями $Ш^0$ равна $O(h^3)$, т.е. она выше, чем у сплайна с граничными условиями Π^0, но оптимальный порядок точности $O(h^4)$ не достигается. Для полноты приведем значения: $48\|\eta_{0\infty}\|_C = 1.86$, $48\|\eta_{1\infty}\|_C = 0.50$, $48\|\eta_{2\infty}\|_C = 0.13$, $48\|\eta_{3\infty}\|_C = 0.036$.

I". Система для m_i получается из (37), где следует положить

$$c_0 = \tilde{L}_0'(x_0) = (-25f_0 + 48 f_1 - 36 f_2 + 16 f_3 - 3f_4)/(12h),$$

$$c_N = \tilde{L}_{N-4}'(x_N) = (3f_{N-4} - 16 f_{N-3} + 36 f_{N-2} - 48 f_{N-1} + 25f_N)/(12h).$$

Тогда имеем

$$\left.\begin{aligned} 4q_0 &= -4h^4/5f_0^V + O(h^5), \\ q_{i-1} + 4q_i + q_{i+1} &= -h^4/30f_i^V + O(h^5), \quad i=1,\dots,N-1, \\ 4q_N &= -4h^4/5\, f_N^V + O(h^5). \end{aligned}\right\}$$

Отсюда

$$q_i = -\frac{h^4}{180}\left[1 + \frac{35(\sigma^i + \sigma^{N-i})}{1 + \sigma^N}\right] f_i^V + O(h^5),\ i=0,\dots,N,$$

что позволяет получить для сплайна с граничными условиями I" соотношение (II), где

$$\phi_{iN}(t) = -\frac{u}{180}\left[(1-2t)(1+3u) + \frac{35(v\sigma^i + w\sigma^{N-i-1})}{1 + \sigma^N}\right], \tag{48}$$

$$i=0,\dots,N-1,$$

$$\phi_{i\infty}(t) = -u[(1-2t)(1+3u) + 35v\sigma^i]/180, \quad i < N/2. \tag{49}$$

V. Система для m_i имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} m_0 + 3m_1 &= (-17 f_0 + 9f_1 + 9f_2 - f_3)/(6h), \\ m_{i-1} + 4m_i + m_{i+1} &= c_i, \quad i=1,\dots,N-1, \\ 3m_{N-1} + m_N &= (f_{N-3} - 9f_{N-2} - 9f_{N-1} + 17f_N)/(6h). \end{aligned}\right\}$$

Отсюда получаем систему

$$\left.\begin{aligned} 4q_0 + 12q_1 &= -h^4/5\, f_0^V + O(h^5), \\ q_{i-1} + 4q_i + q_{i+1} &= -h^4/30\, f_i^V + O(h^5), \quad i=1,\dots,N-1, \\ 12q_{N-1} + 4q_N &= -h^4/5f_N^V + O(h^5), \end{aligned}\right\}$$

решение которой записывается в виде:

$$q_i = -\frac{h^4}{180}\left[1 - \frac{5(\sigma^i + \sigma^{N-i})}{\sigma(1+\sigma)(1+\sigma^{N-3})}\right] f_i^V + O(h^5), \quad i=0,\ldots,N .$$

В результате для сплайна с краевыми условиями V справедливо равенство (II), где

$$\phi_{iN}^{(t)} = -\frac{u}{180}\left[(1-2t)(1+3u) - \frac{5(v\sigma^i + w\sigma^{N-i-1})}{\sigma(1+\sigma)(1+\sigma^{N-3})}\right], \tag{50}$$

$$i=0,\ldots,N-1,$$

$$\phi_{i\infty}(t) = -\frac{u}{180}[(1-2t)(1+3u) - 5v\sigma^{i-1}/(1+\sigma)], \quad i < N/2. \tag{51}$$

Таким образом, сплайны с граничными условиями типов I", V и I имеют один и тот же главный член погрешности и поэтому при больших N, когда влияние второго члена асимптотики незначительно, все эти сплайны дают одинаковую точность приближения. Отсюда очевидна практическая ценность условий I" и V, так как они не требуют задания производных функции $f(x)$. Сравнивая между собой выражения (48),(49) и (50),(5I), нетрудно заметить, что для сплайнов с граничными условиями I", V вторые члены асимптотики при всех $N \geq 4$ мало различаются и, следовательно, эти условия практически эквивалентны с точки зрения точности приближения.

В заключение приведем один тип краевых условий, при которых имеет место (6). Они записываются в виде:

$$4m_0+14m_1 = (-71f_0+26f_1+54f_2-10f_3+f_4)/(6h),$$

$$14m_{N-1}+4m_N = (71f_N-26f_{N-1}-54f_{N-2}+10f_{N-3}-f_{N-4})/(6h).$$

При этих условиях $q_i = -h^4 f_i^V/180 + O(h^5)$, $i = 0,\ldots,N$, что вместе с (35),(36) влечет (6).

Литература

I. МИРОШНИЧЕНКО В.Л. О погрешности приближения кубическими интерполяционными сплайнами. I. - В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып.93). Новосибирск, 1982, с.3-29.

2. МИРОШНИЧЕНКО В.Л. О погрешности приближения кубическими интерполяционными сплайнами. II. - В кн.: Методы сплайн-функций в численном анализе (Вычислительные системы, вып.98). Новосибирск, 1983, с.51-66.

3. HALL C.A., MEYER W.W. Optimal error bounds for cubic spline interpolation.–J.Approxim.Theory, 1976, v.16, N 2, p.105–121.

4. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций.–М.: Наука, 1980. – 352 с.

5. МИРОШНИЧЕНКО В.Л. О погрешности приближения многочленами Лагранжа третьей степени.– В кн.: Приближение сплайнами (Вычислительные системы, вып.106). Новосибирск, 1984, с.3–24.

6. КИНДАЛЕВ Б.С. О точности приближения периодическими интерполяционными сплайнами нечетной степени.– В кн.: Методы сплайн-функций в численном анализе (Вычислительные системы, вып.98). Новосибирск, 1983, с.67–82.

7. KINDALEV B.S. Asymptotics of error for interpolating splines of even degree. – In: Constructive theory of functions. Sofia, 1984, p.445–450.

8. LUCAS T. Error bounds for interpolating cubic splines under various end conditions. – SIAM J.Numer.Anal., 1974, v.11, N 3, p.569–584.

9. МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Некоторые свойства трехдиагональных матриц и их применение к теории кубической сплайн-интерполяции.– В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып.65). Новосибирск, 1975, с.29–49.

10. АЛБЕРГ Дж., НИЛЬСОН Э., УОЛШ Дж. Теория сплайнов и ее приложения.– М.: Мир, 1972.– 316 с.

11. ФОРСАЙТ Дж., МАЛЬКОЛЬМ М., МОУЛЕР К.М. Машинные методы математических вычислений. – М.: Мир, 1980. – 279 с.

12. BEHFOROOZ G.H., PAPAMICHAEL N. End conditions for cubic spline interpolation.–J.Inst.Math.Applic., 1979, v.23, p.355–366.

13. СТЕЧКИН С.Б., СУББОТИН Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике.– М.: Наука, 1976. – 248 с.

Поступила в ред.-изд.отд.
2 августа 1985 года