СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИЯ И ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ
(Вычислительные системы)
1985 год Выпуск 108

УДК 519.651:519.653

СГЛАЖИВАЮЩИЕ СПЛАЙНЫ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ

Н.Н. Павлов

Вопросы обработки экспериментальной информации, такие как построение непрерывных восполнений табличных функций, численное дифференцирование и т.п. успешно решаются на пути использования сглаживающих сплайнов. В тех случаях, когда дифференцируемость аппроксимирующих функций не требуется, для этих целей может быть применен простой и эффективный аппарат сглаживающих сплайнов первой степени. В статье рассмотрены две постановки задачи сглаживания сплайнами первой степени. Изучены аппроксимационные свойства сплайнов первой степени в выпуклых множествах, приведены алгоритмы сглаживания.

Пусть известна сетка Δ: $a = x_1 < \ldots < x_N = b$, а также значения некоторой функции $f_i = f(x_i)$ в ее узлах. Интерполяционный сплайн первой степени на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ представим в виде

$$S(x) = f_i \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + f_{i+1} \frac{x - x_i}{h_i}, \tag{1}$$

где $h_i = x_{i+1} - x_i$. Такой сплайн, имея в общем случае разрывы первой производной в узлах сетки, принадлежит классу $C[a,b]$. Сплайны первой степени обладают экстремальным свойством, состоящим в том, что среди всех функций из $W_2^1[a\ b]$, интерполирующих значения f_i на сетке Δ, минимум функционалу

$$J(\varphi) = \int_a^b [\varphi'(x)]^2 dx \tag{2}$$

доставляет сплайн первой степени.

Пусть имеются три набора вещественных чисел: z_i^0, $\delta_i \ge 0$, $\rho_i > 0$, $i = 1, \ldots, N$. Рассмотрим две задачи.

1. Минимизировать функционал $J(\varphi)$ на множестве функций из $W_2^1[a,b]$, удовлетворяющих ограничениям

$$|\varphi(x_i) - z_i^0| \le \delta_i, \quad i = 1,\dots,N. \tag{3}$$

2. Минимизировать функционал

$$J(\varphi) + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\rho_i}[\varphi(x_i) - z_i^0]^2 \tag{4}$$

на множестве $W_2^1[a,b]$.

Решениями этих задач служат сплайны первой степени. Доказательство этого факта в первом случае непосредственно следует из экстремального свойства, во втором – аналогично доказательству в [1] для кубических сплайнов.

Задачу 1 часто называют задачей о сплайнах в выпуклых множествах. Она имеет единственное решение, если ограничения (3) таковы, что они не допускают ни одного многочлена нулевой степени.

Изучим аппроксимационные свойства сплайна, дающего решение задачи 1. Пусть z_i^0 – значения некоторой функции $f(x)$ в узлах сетки Δ, известные с погрешностями, по абсолютной величине не превышающими δ_i. Если $\tilde{S}(x)$ – сплайн, интерполирующий $f(x)$ на сетке Δ, а $S(x)$ – решение задачи 1, оценка для уклонения $S(x)$ от $f(x)$ в норме пространства $L_\infty[a,b]$ легко получается из оценки [1]

$$\|f(x) - \tilde{S}(x)\|_\infty \le \frac{\bar{h}^2}{8}\|f''\|_\infty , \tag{5}$$

где $\bar{h} = \max\limits_i h_i$, справедливой для функций из $CW^2_{\Delta,\infty}[a,b]$, т.е. таких, что $f(x) \in C[a,b]$, $f(x) \in W^2_\infty[x_i\ x_{i+1}]$, $i = 1,\dots, N-1$. Действительно,

$$\|f(x) - S(x)\|_\infty \le \|f(x) - \tilde{S}(x)\|_\infty + \|\tilde{S}(x) - S(x)\|_\infty \le$$

$$\le \frac{\bar{h}^2}{8}\|f''\|_\infty + 2\bar{\delta}, \tag{6}$$

где $\bar{\delta} = \max\limits_i \delta_i$.

Оценку для погрешности аппроксимации первой производной функции получим в норме пространства $L_2[a,b]$ в предположении, что $f(x) \in C^2[a,b]$ и что $f(x)$ – периодическая. Имеем

$$\|f'(x) - S'(x)\|_{L_2} \le \|f'(x) - \tilde{S}'(x)\|_{L_2} + \|\tilde{S}'(x) - S'(x)\|_{L_2}. \quad (7)$$

Оценим первый член в правой части неравенства (7). Обозначив $\eta(x) = f(x) - \tilde{S}(x)$, получаем

$$\int_a^b [f'(x) - \tilde{S}'(x)]^2 dx = \int_a^b [\eta'(x)]^2 dx =$$

$$= \eta'(x)\eta(x)\Big|_a^b - \int_a^b \eta(x)f''(x)dx = -\int_a^b \eta(x)f''(x)dx. \quad (8)$$

Здесь, кроме формулы интегрирования, по частям использовалось то, что $\eta(x) = 0$ в узлах сетки Δ. Воспользовавшись оценкой (5), для (8) получаем

$$-\int_a^b \eta(x)f''(x)dx \le \frac{1}{8}(b-a)\bar{h}^2\|f''\|^2_{C[a,b]}$$

или

$$\|f'(x) - \tilde{S}'(x)\|_{L_2} \le \frac{\sqrt{2}}{4}(b-a)^{1/2}\bar{h}\|f''\|_C. \quad (9)$$

Перейдем к оценке второго слагаемого в (7). Обозначим $\Delta S(x) = \tilde{S}(x) - S(x)$, тогда в силу экстремального свойства получаем неравенство

$$\|\tilde{S}'(x) - S'(x)\|^2_{L_2} = J(\tilde{S} - S) =$$

$$= J(S) - J(\tilde{S}) + 2\int_a^b \Delta S'(x)\tilde{S}'(x)dx \le 2\int_a^b \Delta S'(x)\tilde{S}'(x)dx.$$

Для периодического сплайна, т.е. такого, что $S(x_1) = S(x_N)$, можно записать

$$\int_a^b \Delta S'(x)\tilde{S}'(x)dx = \sum_{i=1}^{N-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \tilde{S}'(x)d\Delta S(x) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N-1} \tilde{S}'(x)\Delta S(x)\Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = \sum_{i=1}^{N-1} \Delta S(x_i)\tilde{d}_i ,$$

где $\tilde{d}_i = \tilde{S}'(x_i+0) - \tilde{S}'(x_i-0)$, $i=1,\ldots,N-1$. В случае равномерной сетки имеем

$$\Big|\sum_{i=1}^{N-1} \Delta S(x_i)\tilde{d}_i\Big| \le 2\bar{\delta} \max_i |\tilde{d}_i|(N-1) = 2\bar{\delta}(b-a) \max_i |\tilde{d}_i|/h.$$

Но $\tilde{d}_i = \tilde{S}'(x_i+0) - \tilde{S}'(x_i-0) = (f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1})/h$, следовательно, $|\tilde{d}_i|/h \le \|f''\|_{C[x_i,x_{i+1}]} \le \|f''\|_C$. Отсюда получаем

$$\Big|\sum_{i=1}^{N-1} \Delta S(x_i)\tilde{d}_i\Big| \le 2\bar{\delta}(b-a)\|f''\|_C , \tag{10}$$

или

$$\|\tilde{S}'(x) - S'(x)\|_{L_2} \le 2[\bar{\delta}(b-a)\|f''\|_C]^{1/2} . \tag{11}$$

Окончательно из (7),(9) и (II) получаем

$$\|f'(x) - S'(x)\|_{L_2} \le \frac{\sqrt{2}}{4}(b-a)^{1/2}h\|f''\|_C + 2[\bar{\delta}(b-a)\|f''\|_C]^{1/2}. \tag{12}$$

Для построения приближенного (однако с любой наперед заданной точностью) решения задачи I, являющейся по существу задачей квадратичного программирования, применим метод штрафов. Функцию штрафа ,так же как и в [2], выберем в виде

$$V^L(z) = \sum_{i=1}^{N} V_i^L(z_i),$$

где $z_i = S(x_i)$, $z=(z_1,\ldots,z_N)$; $V_i^L(z_i) = r_L[(z_i - z_i^0 - \delta_i)_+^3 + (z_i^0 - z_i - \delta_i)_+^3] + (z_i - z_i^0)^2/r_L$, $r_L > 0$ – параметр штрафа, $(x)_+ = (|x| + x)/2$. Получение L-го приближения решения, отвечающего значению параметра штрафа r_L, сводится к минимизации выпуклого функционала

$$I^L(z) = J(S) + V^L(z). \tag{13}$$

Для этой цели используем метод Ньютона. Система для определения приближения на k+1-й итерации метода Ньютона имеет вид

$$z_i + \rho_i^{(k)} d_i = z_i^{(k)} - q_i^{(k)}, \quad i=1,\dots,N, \tag{14}$$

где $z^{(k)}$ – k-е приближение решения,

$$\rho_i^{(k)} = 2\{6r_L[(z_i^{(k)}-z_i^0-\delta_i)_+ + (z_i^0 - z_i^{(k)} - \delta_i)_+ + 2/r_L\}^{-1},$$

$$q_i^{(k)} = \rho_i^{(k)}\{\frac{3}{2}r_L[(z_i^{(k)}-z_i^0-\delta_i)_+^2-(z_i^0-z_i^{(k)}-\delta_i)_+^2]+(z_i^{(k)}-z_i^0)/r_L\},$$

$$d_i = \begin{cases} (z_2-z_1)/h_1, \\ (z_{i+1}-z_i)/h_i-(z_i-z_{i-1})/h_{i-1}, & i=2,\dots,N-1, \\ -(z_N-z_{N-1})/h_{N-1}. \end{cases} \tag{15}$$

С учетом (I5) система (I4) принимает вид

$$\begin{gathered} a_1 z_1 + c_1 z_2 = z_1^{(k)} - q_1^{(k)}, \\ b_i z_{i-1} + a_i z_i + c_i z_{i+1} = z_i^{(k)} - q_i^{(k)}, \quad i=2,\dots,N-1, \\ b_N z_{N-1} + a_N z_N = z_N^{(k)} - q_N^{(k)}, \end{gathered} \tag{16}$$

где $b_i = \rho_i^{(k)}/h_{i-1}$, $i=2,\dots,N$, $c_i = \rho_i^{(k)}/h_i$, $i=1,\dots,N-1$, $a_i = 1 - (b_i+c_i)$, $i=1,\dots,N$, $b_1 = 0$, $c_N = 0$.

Можно показать, что матрица системы (I6) невырождена и имеет трехдиагональную структуру. Для решения системы (I6) целесообразно использовать метод прогонки [I].

Выберем $r_1 > 0$ и будем минимизировать функционал $I^1(z)$. Итерационный процесс отыскания его минимума состоит в многократном решении системы (I6). Процесс прерывается, как только $\max_i |z_i^{(k+1)}-z_i^{(k)}|$ становится меньше некоторого $\varepsilon > 0$. Затем, выбрав $r_2 > r_1$ и используя полученное решение в качестве начального приближения, переходим к следующему шагу.

Увеличиваем r_L до тех пор, пока не станет выполняться

$$|z_i^L - z_i^0| \le \delta_i + \varepsilon',$$

где $\varepsilon' > 0$ – требуемая точность выполнения ограничений (3), для этой цели последовательность $\{r_L\}$ будем вычислять по формуле $r_L = 2 \max_i |d_i^{L-1}|/3\varepsilon'$.

Рассмотрим еще один алгоритм построения решения задачи, основанный на использовании метода покоординатного спуска для минимизации функционала $J(S)$ в параллелепипеде (3). Пусть $\tilde{z}_i^k = (z_{i-1}^k h_i + z_{i+1}^{k-1} h_{i-1})/(h_{i-1} + h_i)$, тогда на k-й итерации z_i^k будем вычислять по формуле:

$$z_i^k = \begin{cases} z_i^0 - \delta_i, & \tilde{z}_i^k < z_i^0 - \delta_i, \\ \tilde{z}_i^k, & z_i^0 - \delta_i \le \tilde{z}_i^k \le z_i^0 + \delta_i, \quad i=1,\dots,N, \\ z_i^0 + \delta_i, & \tilde{z}_i^k > z_i^0 + \delta_i, \end{cases} \tag{17}$$

где $h_0=h_1$, $h_N=h_{N-1}$, $z_0 = z_2$, $z_{N+1} = z_{N-1}$. В периодическом случае: $h_0 = h_{N-1}$, $h_N = h_1$, $z_0 = z_{N-1}$, $z_{N+1} = z_2$. Процесс следует продолжать до тех пор, пока не станет $\max\limits_i |z_i^{k+1} - z_i^k| < \varepsilon$.

Рассмотренный алгоритм при своей простоте требует существенно больших затрат машинного времени для получения решения, чем алгоритм штрафов. Однако в задачах небольшой размерности ($N < 100$) его использование вполне оправдано.

Отыскание решения задачи 2 связано с однократным решением системы вида (16), где $\rho_i^{(k)} = \rho_i$, а правые части равняются z_i^0 [3].

Литература

1. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций.- М.: Наука, 1980. - 350 с.

2. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., ЛЕУС В.А., СКОРОСПЕЛОВ В.А. Сплайны в инженерной геометрии.- М.: Машиностроение, 1985. - 221 с.

3. СТЕЧКИН С.Б., СУББОТИН Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. - М.: Наука, 1976. - 248 с.

Поступила в ред.-изд.отд.
28 мая 1985 года