СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИЯ И ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ
(Вычислительные системы)
1985 год Выпуск 108

УДК 519.652.3

О ЛОКАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ КУБИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ УЗЛАМИ

Б.М.Шумилов

Интерполяция функций является одной из основных проблем теории сплайнов. В [1] были получены локальные формулы решения этой задачи на классе кубических сплайнов гладкости C^2, имеющие точность $O(H^3)$, где H - максимальное расстояние между точками интерполяции. Ниже показано, что введение дополнительных узлов склейки сплайна позволяет указать схемы локальной интерполяции четвертого (наивысшего для кубических сплайнов) порядка точности по H.

§ 1. Вывод расчетных формул

Пусть заданы возрастающая последовательность точек $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ вещественной оси и значения некоторой функции $f_i = f(x_i)$, $i = 1,2,\ldots, n$; $n \geq 11$.

Введем дополнительные узлы $x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1$; $x_{i+1/2} = (x_i + x_{i+1})/2$, $i = 5,6,\ldots, n-5$; $x_n < \ldots < x_{n+3}$ и свяжем с полученной сеткой множество кубических B-сплайнов $B_j(x)$, $j = 0,1,\ldots,5,11/2,\ldots, n-4, n-3,\ldots, n+1$ [2]. Для любой функции $f(x)$ аппроксимационный кубический сплайн $S(x)$ дефекта 1 может быть представлен в виде линейной комбинации B-сплайнов

$$S(x) = \sum_{j=0}^{n+1} \alpha_j(f)\, B_j(x), \tag{1}$$

где $\alpha_j(f)$ - некоторые функционалы.

Определим для каждой группы из четырех точек $x_{i-1},\ldots, x_{i+2}$ интерполяционный многочлен третьей степени $p_i(x)$, а для пяти точек $x_{i-2},\ldots,x_{i+2}$ - интерполяционный сплайн третьей степени $q_i(x)$

с единственным узлом склейки в точке x_i и краевыми условиями типа IУ [2]. Введем функционалы [3]:

$$L_j(f) = \frac{1}{6} \sum_{r=0}^{3} (-1)^r \, \psi_j^{(3-r)} (\tau_{j2})\, f^{(r)} (\tau_{j2}) \ .$$

Здесь $\psi_j(x) = (x-\tau_{j1})(x-\tau_{j2})(x - \tau_{j3})$, а $\tau_{j1}, \tau_{j2}, \tau_{j3}$ - внутренние узлы B-сплайна $B_j(x)$. В соответствии с [4,5], положив в (I)

$$\alpha_{i+1/2}(f) = L_{i+1/2}(p_i), \quad i = 6,7,\dots, n-6;$$

$$\alpha_j(f) = \begin{cases} L_j(q_2), & j = 0,1,\dots,5,\ 11/2, \\ L_j(q_{n-2}), & j = n-9/2,\ n-4,\ n-3,\dots,n+1; \end{cases}$$

$$\alpha_i(f) = [f_i - \alpha_{i-1/2}(f)B_{i-1/2}(x_i) - \alpha_{i+1/2}(f) \times$$
$$\times B_{i+1/2}(x_i)]/B_i(x_i), \quad i = 6,7,\dots, n-5,$$

получим локальную аппроксимацию, вычисляемую по значениям f_i и точную для любых многочленов третьей степени, причем сплайн $S(x)$ интерполирует функцию $f(x)$ в точках $x_1, x_2, \dots, x_n$ и не имеет разрывов третьей производной в узлах $x_2, x_4, x_{n-3}, x_{n-1}$. В самом деле, проверим условие точности на многочленах третьей степени. Как известно [3], для этого необходимо и достаточно выполнения равенств

$$\alpha_j(X_l) = L_j(X_l), \ l = 0,1,2,3; \quad j = 0,\dots,n+1, \tag{2}$$

где $X_l(x) = x^l$. Пусть $j = 7,8,\dots, n-6$. Поскольку для функции $f(x) = x^l$ имеем $p_{j-1}(x) = p_j(x) = x^l$, то

$$\alpha_j(X_l) = [x_j^l - L_{j-1/2}(X_l)B_{j-1/2}(x_j) -$$
$$- L_{j+1/2}(X_l)B_{j+1/2}(x_j)]/B_j(x_j).$$

Добавим и вычтем в квадратных скобках выражение $L_j(X_l)\ B_j(x)$. Учитывая, что $\sum_i L_i(X_l)B_i(x_j) = x_j^l$, приходим к требуемому равенству (2). Для остальных значений j выполнение (2) очевидно. Докажем теперь свойство интерполяции полученной схемы в крайних точках $x_1, x_2, \dots, x_5,\ x_{n-4}, x_{n-3}, \dots, x_n$.Действительно, коэффициенты $\alpha_j(f)$, $j = 0, 1, \dots, 5, 11/2$, строятся по схеме, точной для одного и того же сплайна $q_2(x)$ [4], а значит, сплайн $S(x)$ совпадает с ним на отрезке $[x_1, x_5]$, т.е. интерполирует значения $f(x_1), \dots, f(x_5)$. Отсюда также вытекает отсутствие разрывов третьей производной в точках x_2, x_4 . (Аналогично и на правом конце.) Интерполяция во внутренних точках x_i обеспечивается по построению [5].

Из проведенных рассуждений вытекает, что выражения для крайних коэффициентов $\alpha_j(f)$ совпадают с выражениями, приведенными в [6]:

$$\alpha_j(f) = f_j + \frac{1}{3(h_{j-1}+h_j)}\left(h_j^2\,\frac{f_j-f_{j-1}}{h_{j-1}} - h_{j-1}^2\,\frac{f_{j+1}-f_j}{h_j}\right),$$

$$h_j = x_{j+1} - x_j, \quad j = 2, 4, n-3, n-1;$$

$$\alpha_j(f) = [f_j - \alpha_{j-1}(f)B_{j-1}(x_j) - \alpha_{j+1}(f)B_{j+1}(x_j)]/B_j(x_j),$$
$$j = 3, n-2;$$

$$\alpha_{j-1}(f) = [f_j - \alpha_j(f)B_j(x_j) - \alpha_{j+1}(f)B_{j+1}(x_j)]/B_{j-1}(x_j),$$
$$j = 2, 1, n-3;$$

$$\alpha_{j+1}(f) = [f_j - \alpha_j(f)B_j(x_j) - \alpha_{j-1}(f)B_{j-1}(x_j)]/B_{j+1}(x_j),$$
$$j = 4, n-1, n;$$

$$\alpha_{11/2}(f) = [f_5 - \alpha_5(f)B_5(x_5) - \alpha_4(f)B_4(x_5)]/B_{11/2}(x_5);$$

$$\alpha_{n-9/2}(f) = [f_{n-4} - \alpha_{n-4}(f)B_{n-4}(x_{n-4}) - \alpha_{n-3}(f)B_{n-3}(x_{n-4})]/B_{n-9/2}(x_{n-4}).$$

Для нецелых значений индекса j во внутренних узлах непосредственным вычислением получаем (см. [3])

$$\alpha_{i+1/2}(f) = f_i + \frac{h_i}{2} f_{i,i+1} - \frac{h_i^2}{3} f_{i-1,i,i+1} -$$
$$-\frac{h_i^2}{6}(2h_{i-1}+h_i)f_{i-1,\dots,i+2} = \frac{f_i + f_{i+1}}{2} +$$
$$+\frac{h_i}{6}\left[\frac{2h_{i+1}+h_i-2h_{i-1}}{(h_{i+1}+h_i)h_{i-1}}\, f_i + \frac{2h_{i-1}+h_i-2h_{i+1}}{(h_{i-1}+h_i)h_{i+1}}\, f_{i+1} -\right.$$
$$\left.-\frac{h_i}{h_{i-1}+h_i+h_{i+1}}\left(\frac{2h_{i+1}+h_i}{h_{i-1}+h_i}\cdot\frac{f_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{2h_{i-1}+h_i}{h_{i+1}+h_i}\cdot\frac{f_{i+2}}{h_{i+1}}\right)\right].$$

Здесь введено обозначение $f_{i,\dots,j}$ для разделенной разности по точкам $x_i,\dots,x_j$. Полученные выше соотношения полностью определяют значения коэффициентов в формуле (I).

§ 2. Оценка погрешности локальной интерполяции

Ограничимся изучением погрешности локальной интерполяции на внутренних интервалах в случае равномерно распределенных с шагом h точек x_i. Тогда

$$\alpha_i(f) = \frac{1}{48}(f_{i-2} - 6f_{i-1} + 58f_i - 6f_{i+1} + f_{i+2}),$$

$$\alpha_{i+1/2}(f) = \frac{1}{12}(-f_{i-1} + 7f_i + 7f_{i+1} - f_{i+2}),$$

$$S_i' = \frac{1}{12h}(f_{i-2} - 8f_{i-1} + 8f_{i+1} - f_{i+2}),$$

$$S_i'' = \frac{1}{2h^2}(-f_{i-2} + 6f_{i-1} - 10f_i + 6f_{i+1} - f_{i+2}),$$

$$S_{i+1/2}' = \frac{1}{48h}(f_{i-2} + 7f_{i-1} - 64f_i + 64f_{i+1} - 7f_{i+2} + f_{i+3}).$$

Для функции $f \in W_\infty^4$, используя формулу Тейлора, отсюда находим

$$|f_i' - S_i'| \le \frac{1}{18} h^3 \|f^{IV}\|_\infty, \quad |f_i'' - S_i''| \le \frac{5}{12} h^2 \|f^{IV}\|_\infty,$$

$$|f_{i+1/2}' - S_{i+1/2}'| \le \frac{1}{144} c\, h^3 \|f^{IV}\|_\infty,$$

$$c = \frac{51}{32} + \frac{1020\sqrt{165} - 10207}{(29)^3} \approx 1{,}714.$$

Теперь для введенной параметризации сплайна $S(x)$ на внутренних интервалах $[x_i, x_{i+1/2}]$ имеем

$$S(x) = f_i + \frac{1}{6} S_i' \cdot th(3-t^2) + \frac{1}{24} S_i'' t^2 h^2 (3-2t) + \frac{1}{6} S_{i+1/2}' t^3 h,$$

$$t = 2(x - x_i)/h.$$

После применения формулы Тейлора получаем

$$|f(x) - S(x)| \le \frac{h^4}{96} \Big\{ \Big| \int_0^t [\tau^2 - \tau t(3-t^2) + t^2(3-2t)]\, \tau f^{IV}(x_i + \tau h/2)\, d\tau +$$

$$+ t^3 \int_t^1 (1-\tau)^2 f^{IV}(x_i + \tau h/2) d\tau \Big| + \frac{t}{9}[24 + 45t - (38-c)t^2] \|f^{IV}\|_\infty \Big\} \le$$

$$\le \frac{1}{3456} h^4 t[96+180t-(140-4c)t^2-9t^3]\|f^{IV}\|_\infty \le \frac{h^4}{384}\cdot\frac{127+4c}{9}\|f^{IV}\|_\infty ,$$

что почти в три раза больше оценки погрешности обычной нелокальной интерполяции [2]. Из соображений симметрии полученная оценка справедлива и на подынтервалах $[x_{i-1/2}, x_i]$, а значит, и на интервале $[x_7, x_{n-6}]$. Отметим, что, как показывает пример функции $f(x) = x^4$, эту оценку можно уменьшить асимптотически по h примерно в два раза.

§ 3. Локальные фундаментальные сплайны

Заменив индекс суммирования j в (I) на номер точки i, для внутренних промежутков $[x_k, x_{k+1}]$ формулу локальной интерполяции можно переписать в следующем виде:

$$S(x) = \sum_{i=k-2}^{k+2} f_i\, \Phi_i(x), \qquad (3)$$

где для случая равномерной сетки $\Phi_i(x) = \frac{1}{48}[B_{i-2}(x) - 4B_{i-3/2}(x) - 6B_{i-1}(x) + 28B_{i-1/2}(x) + 58B_i(x) + 28B_{i+1/2}(x) - 6B_{i+1}(x) - 4B_{i+3/2}(x) + B_{i+2}(x)]$. Функции $\Phi_i(x)$ представляют из себя фундаментальные сплайны введенного процесса локальной интерполяции для случая бесконечно продолженной в обе стороны сетки (либо в периодическом случае). Носителем данного локального фундаментального сплайна служит отрезок $[x_{i-3}, x_{i+3}]$, который шире носителя B-сплайна $B_i(x)$, играющего аналогичную роль в задаче простейшей локальной аппроксимации кубическими сплайнами без дополнительных узлов [2], отрезка $[x_{i-2}, x_{i+2}]$. Аналогично [7] можно сделать носитель фундаментального сплайна локальной интерполяции почти равным носителю стандартного B-сплайна, вводя вместо одного по четыре дополнительных узла на каждом интервале $[x_k, x_{k+1}]$.

Обозначим $x_{i\pm m/5} = x_i \pm m\gamma h$, $m = 1,2$, $0 < \gamma < 1/4$. Действуя как в § I, в случае равномерно распределенных точек x_i находим

$$\alpha_{i+1/5}(f) = f_i + \gamma[hf_{i,i+1} - (3-2\gamma)\cdot\frac{h^2}{3} f_{i-1,i,i+1} -$$

$$- h^3 f_{i-1,\dots,i+2}] = f_i - \gamma(\frac{1-\gamma}{3} f_{i-1} + \frac{3+4\gamma}{6} f_i - \frac{3+\gamma}{3} f_{i+1} + \frac{1}{6} f_{i+2});$$

$$\alpha_{i+2/5}(f) = f_i + (1+\gamma)\frac{h}{3} f_{i,i+1} - (1-2\gamma+4\gamma^2)\frac{h^2}{3} f_{i-1,i,i+1} -$$

$$- (1+\gamma-6\gamma^2+12\gamma^3)\frac{h^3}{6} f_{i-1,\dots,i+2} = \frac{1}{18}(-2+7\gamma - 18\gamma^2 + 12\gamma^3)f_{i-1} +$$

$$+\frac{1}{6}(5-7\gamma + 14\gamma^2-12\gamma^3)f_i + \frac{1}{6}(2+5\gamma-10\gamma^2+12\gamma^3)f_{i+1} -$$

$$-\frac{1}{18}(1 + \gamma - 6\gamma^2 + 12\gamma^3)f_{i+2}.$$

Выражения для $\alpha_{i+4/5}(f)$, $\alpha_{i+3/5}(f)$ выглядят симметрично полученным выше, а

$$\alpha_i(f) = f_i + \frac{\gamma}{24}[f_{i-2} + 4(1+\gamma)(f_{i-1}+f_{i+1}) + 2(3+4\gamma)f_i + f_{i+2}].$$

Отсюда, отбрасывая величины второго и третьего порядков малости по γ, получаем

$$\Phi_i^\gamma(x) \approx (1 + \frac{\gamma}{4})B_i(x) + (1 - \frac{\gamma}{2})[B_{i-1/5}(x) + B_{i+1/5}(x)] +$$

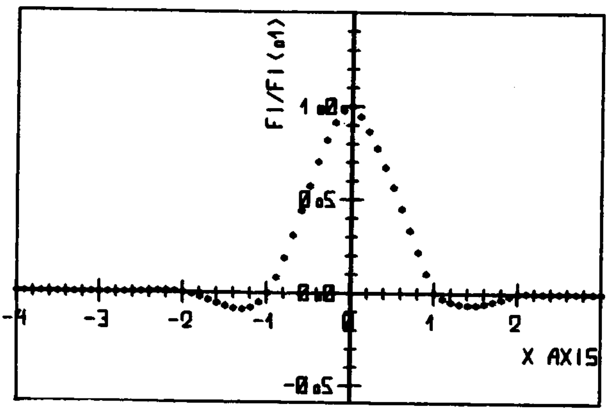
$$+ \frac{5-7\gamma}{6}[B_{i-2/5}(x) + B_{i+2/5}(x)] + \frac{2+5\gamma}{6}[B_{i-3/5}(x) + B_{i+3/5}(x)] +$$

$$+ \gamma[B_{i-4/5}(x) + B_{i+4/5}(x)] - \frac{\gamma}{6}[B_{i-1}(x) + B_{i+1}(x) + B_{i-9/5}(x) +$$

$$+ B_{i+9/5}(x)] - \frac{\gamma}{3}[B_{i-6/5}(x)+B_{i+6/5}(x)] - \frac{2-7\gamma}{18}[B_{i-7/5}(x)+B_{i+7/5}(x)] -$$

$$-\frac{1+\gamma}{18}[B_{i-8/5}(x) + B_{i+8/5}(x)] - \frac{\gamma}{24}[B_{i-2}(x) + B_{i+2}(x)],$$

причем носитель функции $\Phi_i^\gamma(x)$ сосредоточен на интервале $[x_{i-2}-2\gamma h, x_{i+2}+2\gamma h]$.



Графики $\Phi_i(x)$ и $\Phi_i^\gamma(x)$ для $\gamma = 0{,}1$ изображены на рисунке. (В силу симметрии представлено лишь по половине каждой функции.)

В заключение приведем результаты численных экспериментов по локальной интерполяции четырех функций $f_1(x)=e^x$, $f_2(x) = e^{-10x}$, $f_3(x)=\sin(\pi x)$, $f_4(x) = 1/[1 + 100(x-0{,}5)^2]$ на отрезке $[0,1]$. В табл.1 приведены значения $\max|f(x)-S(x)|$, где x принадлежит равномерной сетке на $[0,1]$ с шагом $h/10$, для формулы (3), а в табл.2 - для случая $\Phi_i^\gamma(x)$ при $\gamma = 0{,}01$.

Таблица 1

Функции	h	
	0,1	0,05
$f_1(x)$	$1{,}3\cdot10^{-5}$	$8\cdot10^{-7}$
$f_2(x)$	0,0099	0,0008
$f_3(x)$	$1{,}6\cdot10^{-4}$	$1{,}5\cdot10^{-5}$
$f_4(x)$	0,013	0,0084

Таблица 2

Функции	h	
	0,1	0,05
$f_1(x)$	$6{,}3\cdot10^{-6}$	$7{,}5\cdot10^{-7}$
$f_2(x)$	0,015	0,0012
$f_3(x)$	$2{,}2\cdot10^{-4}$	$1{,}4\cdot10^{-5}$
$f_4(x)$	0,02	0,01

Сравнение этих результатов с данными, приведенными в [2, с.252], говорит о близости погрешности введенных схем локальной интерполяции и обычной локальной аппроксимации кубическими сплайнами.

Литература

1. MAO-dong Ye. On the splines with the property of local interpolation.-Math.numer.Sin.,1984,v.6,N 2,p.138-147.

2. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций.- М.: Наука,1980. - 352 с.

3. LYCHE T., SCHUMAKER L.L. Local spline approximation methods.-J.Approximat.Theory,1975,v.15,N 4,p.294-325.

4. ШУМИЛОВ Б.М. Локальная аппроксимация сплайнами: формулы, точные на сплайнах.- Новосибирск,Б.и.,1981.-24 с.(Препринт ВЦ СО АН СССР: № 86).

5. МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Об интерполяции и аппроксимации сплайнами.- В кн.: Проблемы обработки информации (Вычислительные системы,вып.100).Новосибирск,1983,с.83-100.

6. ЖАНЛАВ Т. О краевых условиях для интерполяционных кубических сплайнов.-В кн.: Приближение сплайнами (Вычислительные системы,вып.106).Новосибирск,1984,с.25-28.

7. LIANG Xue-zhang. A note on splines interpolation formulas with high exactness.-Numer.Math.J.Chinese Univ.,1981,v.3, N 1,p.83-87.

Поступила в ред.-изд.отд
29 апреля 1985 года