СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИЯ И ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ
(Вычислительные системы)
1985 год Выпуск 108

УДК 519.6.681.3

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ЧЕБЫШЕВСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ НА КЛАССЕ СПЛАЙНОВ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ

В.К.Исаев, С.А.Плотников

Введение

Во многих приложениях теории сплайн-функций возникает задача приближения функций сплайнами с заданной точностью на сетках минимальной размерности [1-4]. В частности, в некоторых областях прикладной математики и вычислительной геометрии (решение ряда задач нелинейного программирования и автоматизированного проектирования, аппроксимация нелинейных характеристик объектов и систем, представление различной геометрической информации на дисплеях и графопостроителях, аппроксимация траектории движения режущего инструмента станков с ЧПУ, сжатие информации в цифровых управляющих машинах и т.д.) имеют место задачи приближения функций сплайнами первой степени [1,3,5-9,13]. Можно выделить три типа задач.

ЗАДАЧА 1. Заданы функция $f \in C[a,b]$ и нелинейное конечномерное многообразие $\{S_1\}_N \subset C[a,b]$ размерности $2(N-1)$ сплайнов первой степени дефекта 1 на сетках Δ: $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_N = b$ с заданным числом N узлов. Найти такой сплайн $s^* \in \{S_1\}_N$, что $\|f-s^*\| = \min_{s \in \{S_1\}_N} \|f-s\|$, где $\|\cdot\|$ – чебышевская норма в $C[a,b]$.

ЗАДАЧА 2. Заданы функция $f \in C[a,b]$ и точность приближения $\varepsilon > 0$. Найти сплайн $s^* \in \bigcup_{N=2}^{\infty} \{S_1\}_N$ такой, что число $N = N^*$ является наименьшим натуральным числом, для которого $\|f-s^*\| \le \varepsilon$ и $s^* \in \{S_1\}_N$.

ЗАДАЧА 3. Найти наилучшее чебышевское приближение функции $f \in C[a,b]$ на множестве всех решений задачи 2.

Эта задача вытекает из неединственности решения задачи 2.

Задачи приближения функций сплайнами первой степени стали привлекать к себе интенсивное внимание с конца 50-х годов. Для выпуклых функций класса $C[a,b]$ Е.Я.Ремезом [2] был предложен алгоритм построения решения задачи I. Ю.Л. Кетков [7] получил некоторые оценки сверху и снизу для решения задачи 2 для строго выпуклых функций класса $C^2[a,b]$ со знакопостоянной третьей производной. Точное решение задачи 2 для строго выпуклых функций из $C^2[a,b]$ со знакопостоянной второй производной дано Филлипсом [5]. Им также для этого класса функций был предложен алгоритм построения решения задачи I, использующий решения задачи 2. Кокс [6] обобщил результаты Филлипса на случай строго выпуклых функций класса $C^1[a, b]$, показал единственность решения задачи I для данного класса функций и поставил задачу 3. К сожалению, в работах Филлипса и Кокса не использовались и даже не упоминались классические результаты о наилучших равномерных приближениях, в частности, полученные П.Л.Чебышевым [10]. Используя альтернансные свойства, Б.М.Шумилов [8] исследовал асимптотически наилучшие равномерные приближения [I] для строго выпуклых функций класса $C^2[a,b]$ и затронул взаимосвязь между задачами I и 2. Обобщение результатов по квазинаилучшим (и, в частности, по асимптотически наилучшим) приближениям дано в [I]. Б.А.Попов на основе равномерных сплайнов [3] получил приближенные формулы для определения наименьшей точности приближения и минимального количества звеньев для решений задач I и 3 соответственно для функций из $C^2[a,b]$ с ограниченной второй производной [II]: $0< M_1< |f''(x)| < M_2< \infty$, $x \in [a,b]$. В [I2,I3] в качестве решения для выпуклых функций из $C^1[a,b]$ получены локально оптимальные сплайны первой степени.

В настоящей работе рассматривается задача 2 для функций из $C[a,b]$. Предложенные алгоритмы находят точные, а не приближенные решения задачи 2 при любой заданной точности аппроксимации.

§I. Задача оптимального приближения и двойственная к ней задача

Далее везде будем называть задачи I,2 и 3 соответственно прямой, обратной и смешанной задачами чебышевского приближения. В данной работе мы рассмотрим только обратную задачу.

Пусть заданы функция $f(x) \in C[a,b]$, нелинейное конечномерное многообразие $\{S_{n,\nu}\}_N$ размерности $n+1+(\nu+1)(N-2)$ полиномиальных сплайнов степени n дефекта ν на сетках Δ: $a = x_1 < \ldots < x_N = b$ с заданным числом N узлов и $\varepsilon > 0$ – точность приближения. Обозначим через G множество допустимых на $[a,b]$ сплайнов, а через $\bar{G}$ – границу замыкания множества G [I2,с.28]. Пусть Δ_N – множество сеток Δ: $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots < x_N = b$ сплайнов из $\{S_{n,\nu}\}_N \cap G$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Сплайн $s^{(\mp)}_{n,\nu,i} \in (\bigcup\limits_{N=2}^{\infty}(S_{n,\nu}\}_N) \cap G$ на сетке $\Delta_i^{(\mp)}$: $a_{(\leq)} x_1^{(\mp)} < x_2^{(\mp)} < \ldots < x_i^{(\mp)} {}_{(=)}^{\leq} b$ называется оптимальным слева (справа), если $x_i^- = \max\limits_{\Delta\in\Delta_N}\{x_i\}(x_1^+ = \min\limits_{\Delta\in\Delta_N}\{x_{N-i+1}\}$ для некоторого достаточно большого N такого, что $\Delta_N \neq \emptyset$.

Пусть $\{s^{(\mp)}_{n,\nu,i}\}$ – множество оптимальных слева (справа) сплайнов с индексом i, а $\{\Delta_i^{(\mp)}\}$ – множество соответствующих им сеток. В силу ограниченности отрезка $[a,b]$ и невырожденности сеток из $\{\Delta_i^{(\mp)}\}$ существует индекс $i^* = \max\limits_{\{\Delta_i^+\}\neq\emptyset} i = \max\limits_{\{\Delta_i^-\}\neq\emptyset} i$. Так как $i^* = N^* = \min\limits_{\Delta_N\neq\emptyset} N$, то индекс i^* с соответствующей $\Delta_{i^*}^{(\mp)}$ сеткой соответствующего сплайна $s^{(\mp)}_{n,\nu,i^*}$ и будет решением обратной задачи. Поэтому справедлива

ЛЕММА I.

$$\max_{\{\Delta_i^{(\mp)}\}\neq\emptyset} = \min_{\Delta_N\neq\emptyset} N.$$

СЛЕДСТВИЕ I.

$$(\{S^-_{n,\nu,i^*}\} \cup \{S^+_{n,\nu,i^*}\}) \subset (\{S^-_{n,\nu,i^*}\} \cap \{S^+_{n,\nu,i^*}\}).$$

Далее будем рассматривать сплайны из множества $\bigcup\limits_{i=2}^{i^*}\{S^{(\mp)}_{1,1,i}\}$, т.е. оптимальные слева (справа) непрерывные сплайны первой степени. Обозначим для простоты через $S_i^{(\mp)}$ сплайн из множества $\{S^{(\mp)}_{1,1,i}\}$, $2 \leq i \leq i^*$. Заметим, что узел $x_i^-(x_1^+)$ последнего (первого) звена сплайна $S_i^{(\mp)}(x)$ удовлетворяет условию: $S_i^-(x_i^-) \in \bar{G}$

$(s_i^+(x_1^+) \in G)$, $i = \overline{2,i^*}$, так как звено является одновременно локально оптимальным с некоторым фиксированным значением в узле $x_{i-1}^-(x_2^+)$ (см. [12,с.28]). Поэтому справедлива

ЛЕММА 2.

$$s_i^-(x_i^-) \in \bar{G}(s_i^+(x_1^+) \in \bar{G}), \quad i = \overline{2,i^*}.$$

Рассмотрим некоторые свойства непрерывных оптимальных слева (справа) сплайнов первой степени.

ЛЕММА 3. Для любой сетки $\Delta_i^{(\mp)}$, $i = \overline{2,i^* - 1}$, оптимального слева (справа) сплайна на интервале (x_{i-1}^-, x_i^-) (на интервале (x_1^+, x_2^+)) находится хотя бы одна допустимая локально опорная точка (см. [12,с.28]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что на (x_{i-1}^-, x_i^-) (на (x_1^+, x_2^+)) нет ни одной допустимой локально опорной точки. Так как $x_i^- = \max_{\Delta\in\Delta_N}\{x_i\}$ $(x_1^+ = \min_{\Delta\in\Delta_N}\{x_{N-i+1}\})$, то $x_i^- = x_{i-1}^- + \max_{\Delta\in\Delta_N}\{x_i - x_{i-1}^-\}$ $(x_1^+ = x_2^+ - \max_{\Delta\in\Delta_N}\{x_2^+ - x_{N-i+1}\})$. Но так определяется i-й узел локально оптимального сплайна ([12, с.28]). Поэтому (i-1)-е (первое) звено сплайна $s_i^{(\mp)}(x)$ должно быть опорно справа (слева) к $\bar{G}$ [12, с.29], что противоречит максимальности его шага. Следовательно, по лемме 2 из [12,с.29], на интервале (x_{i-1}^-, x_i^-) (на (x_1^+, x_2^+)) имеется хотя бы одна допустимая локально опорная точка. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Для любой сетки $\Delta_i^{(\mp)}$, $i = \overline{2,i^* - 1}$, оптимального слева (справа) сплайна существует допустимая локально опорная точка $x^* \in (x_{i-1}^-, x_i^-)$ $(x^* \in (x_1^+, x_2^+))$ такая, что $\delta(x^*; s_i^{(\mp)}) = -\delta(x_{i(1)}^{(\mp)}; s_i^{(\mp)})$, где $\delta(x; s_i^{(\mp)}) = f(x) - s_i^{(\mp)}(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3, существует допустимая локально опорная точка $x^* \in (x_{i-1}^-, x_i^-)$ $(x^* \in (x_1^+, x_2^+))$. По лемме 2, $s_i^-(x_i^-) \in \bar{G}$ $(s_i^+(x_1^+) \in \bar{G})$. Предположим, что $\delta(x^*; s_i^{(\mp)}) = \varepsilon = \delta(x_i^-; s_i^-)(= \delta(x_1^+; s_i^+))$.

Тогда $-\varepsilon < \delta(x;s_i^{(\mp)})$, $x \in [x_{i-1}^-, x_i^-]$ $(x \in [x_1^+, x_2^+])$ (здесь ε – заданная точность приближения). Но в таком случае существует сплайн $s(x) \in \{S_i^{(\mp)}\}$ с иным последним (первым) звеном: $s(x) = s_i^-(x_{i-1}^-) + \alpha(x - x_{i-1}^-)$, $x \in [x_{i-1}^-, x_i]$ $(s(x) = s_i^+(x_2^+) + \alpha(x - x_2^+)$, $x \in [x_1, x_2^+])$, при некотором α таком, что $-\varepsilon < \delta_1(x;s) < \delta(x;s_i^{(\mp)})$, $x \in (x_{i-1}^-, x_i^-]$ $(x \in [x_1^+, x_2^+))$, где $\delta_1(x;s) = f(x) - s(x)$. Так как функция $f(x)$ непрерывна, а $s(x_i) \in \bar{G}$ $(S(x_1) \in \bar{G})$ по лемме 2, то $x_i > x_i^-$ $(x_1 < x_1^+)$. Получено противоречие. Лемма доказана.

Из леммы 4 следует, что допустимая локально опорная точка $x^* \in (x_{i-1}^-, x_i^-)$ и x_i^- $(x^* \in (x_1^+, x_2^+)$ и x_1^+) на сетке $\Delta_i^{(\mp)}$ образуют альтернанс из двух точек.

ТЕОРЕМА I (прямая). Для любой сетки $\Delta_i^{(\mp)}$, $i = \overline{2, i^* - 1}$, оптимального слева (справа) сплайна на $[x_{i-1}^-, x_i^-]$ (на $[x_1^+, x_2^+]$) существует альтернанс как минимум из трех точек.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отрезок $[x_{i-1}^-, x_i^-]$ $([x_1^+, x_2^+])$, согласно лемме 4, должен иметь как минимум две альтернансные точки. Предположим, что он имеет только две альтернансные точки: $x^* \in (x_{i-1}^-, x_i^-)$ $(x^* \in (x_1^+, x_2^+))$ и x_i^- (и x_1^+), причем $\delta(x_i^-; s_i^-) = -\delta(x^*; s_i^-)$ $(\delta(x_1^+; s_i^+) = -\delta(x^*; s_i^+))$. Так как $-\varepsilon < \delta(x_{i-1}^-; s_i^-) < \varepsilon$ $(-\varepsilon < \delta(x_2^+; s_i^+) < \varepsilon)$, то $-\varepsilon \le \delta(x; s_i^{(\mp)}) < \varepsilon$, $x \in [x_{i-1}^-, x_i^-)$ $(x \in (x_1^+, x_2^+])$. Угловые коэффициенты предпоследнего (второго) и последнего (первого) звеньев сплайна $s_i^{(\mp)}(x)$ различны, поэтому существует сплайн $s \in \{S_i^{(\mp)}\}$ с иным последним (первым) звеном: $s(x) = s_i^-(x_{i-1}) + \alpha(x - x_{i-1})$, $x \in [x_{i-1}, x_i^-]$ $(s(x) = s_2^+(x_2) + \alpha(x - x_2), x \in [x_1^+, x_2])$ при некотором α, таком что $-\varepsilon < \delta_1(x;s) < \delta(x; s_i^{(\mp)})$, $x \in [x_{i-1}^-, x_i^-)$ $(x \in (x_1, x_2^+])$, $\delta_1(x;s) = f(x) - s(x)$. Но тогда $-\varepsilon < \delta_1(x^*;s)$, т.е. шаг $[x_{i-1}, x_i^-]$ $([x_1^+, x_2])$ сплайна $s(x)$ имеет только одну допустимую локальную опорную точку x_i^- (x_1^+), что противоречит лемме 3. Итак, $[x_{i-1}^-, x_i^-]$ $([x_1^+, x_2^+])$ имеет не менее трех альтернансных точек.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $s_i^-(x_{i-1}^-) \notin \overline{G}(s_i^+(x_2^+) \notin \bar{G})$, $i = \overline{2, i^* - 1}$, то интервал (x_{i-1}^-, x_i^-) (интервал (x_1^+, x_2^+)) имеет альтернанс хотя бы из двух точек.

В самом деле, если x_{i-1}^- (x_2^+) не есть точка альтернанса, то, по теореме I, две альтернансные точки находятся на интервале (x_{i-1}^-, x_i^-) (интервале (x_1^+, x_2^+)).

ТЕОРЕМА 2 (обратная). Если на полуинтервале $(x_{j-1}, x_j]$ $([x_1, x_2))$ сплайн $s(x) \in G$ на сетке $\Delta: a \underset{(\le)}{=} x_1 < x_2 < \ldots < x_j \underset{(=)}{\le} b$ имеет более двух альтернансных точек $\{\tilde{x}_k\}$, $k = \overline{1, n}$; $n \ge 3$, причем $s(x_j) \in \bar{G}$ $(s(x_1) \in \bar{G})$ и $\tilde{x}_n = x_j$ $(x_1 = \tilde{x}_1)$, то существует сплайн $s^*(x) \in \{S_{1,1,i}^{(+)}\}$, $2 \le i \le j$, такой, что $s^*(x) \equiv s(x)$, $x \in [\tilde{x}_1, x_j]$ $(x \in [x_1, \tilde{x}_n])$.

Доказательство данной теоремы опирается на факт однозначности определения трехточечным альтернансом углового коэффициента звена сплайна первой степени.

§2. Оптимальные слева (справа) сплайны с максимальным индексом. Альтернансные сплайны

Обозначим для простоты через $\{S_i^-\}$ множество $\{S_{1,1,i}^-\}$, $i = \overline{2, i^*-1}$. Множество $\{S_2^-\}$ состоит из единственного оптимального слева сплайна $s_2^-(x)$, $x \in [a = x_1^-, x_2^-]$, представляющего собой (рис.I) однозвенник (так как угловой коэффициент у него определяется по теореме I трехточечным альтернансом). Множество $\{S_3^-\}$ есть множество двузвенников, причем по теореме I угловые коэффициенты последних звеньев сплайнов из $\{S_3^-\}$ одинаковы (рис.2). То же самое касается и угловых коэффициентов последних звеньев сплайнов из $\{S_4^-\}$, $\{S_5^-\}$, $\{S_6^-\}$ и т.д. до $\{S_{i^*-1}^-\}$ включительно.

Рассмотрим $\{S_2^-\} \cap \{S_3^-\}$ (пересечение берется как пересечение точечных множеств!). Оно состоит (рис.3) из одного элемента (однозвенника) $\hat{s}_2^- \subset s_2^-$, второй (последний) узел x_2^- которого есть точка пересечения сплайна $s_2^-(x)$ со множеством последних звеньев сплайнов из $\{s_3^-\}$ (так как по теореме I все последние звенья у них лежат на одной прямой $(3 \le i^*-1)$).Далее,пересечение $\{S_3^-\} \cap \{S_4^-\}$

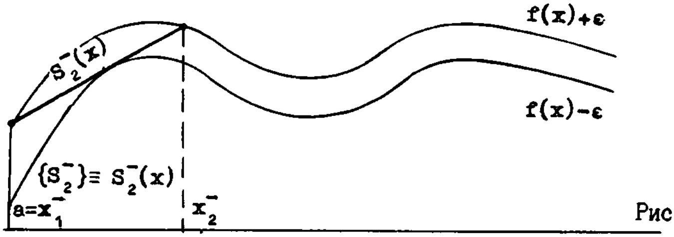

Рис. I

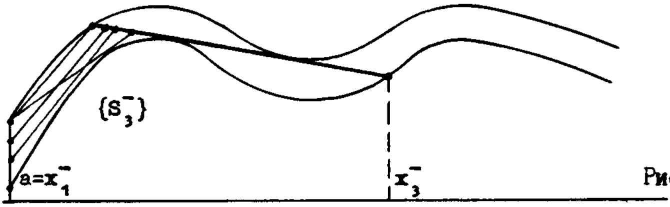

Рис. 2

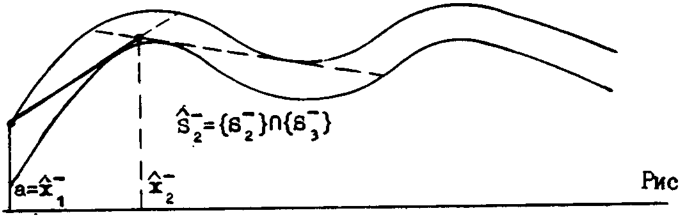

Рис. 3

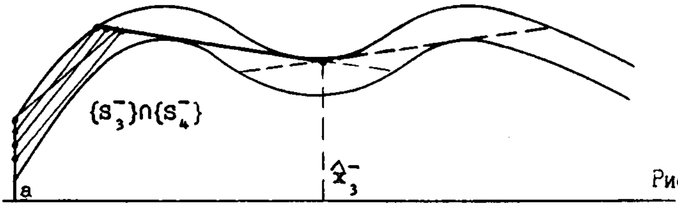

Рис. 4

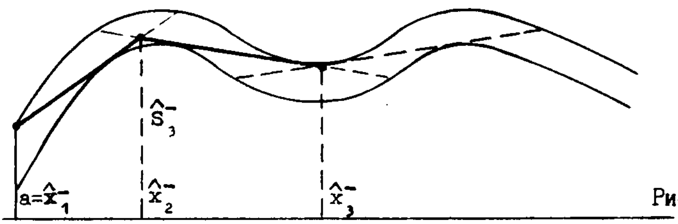

Рис.5

состоит уже из множества элементов (двухзвенников), причем вторые (последние) звенья у них снова лежат на некоторой общей прямой (рис.4). Третий (последний) узел всех этих двухзвенников один и тот же и является пересечением двух прямых: первой принадлежат все последние звенья рассматриваемых двухзвенников, второй – все последние звенья сплайнов из множества $\{S_4^-\}$. Выделим из $\{S_3^-\} \cap$

$\cap \{S_4^-\}$ двухзвенник $\hat{s}_3^-(x) = \hat{s}_{3,j}^-(x)$, $x \in [\hat{x}_j^-, \hat{x}_{j+1}^-]$, $j = 1,2$, где

$\hat{s}_3^-(x) \equiv \hat{s}_2^-(x)$, $x \in [\hat{x}_1^-, \hat{x}_2^-]$. Третий узел $\hat{x}_3^-$ двухзвенника $\hat{s}_3^-$ есть точка пересечения рассматриваемых выше прямых (рис.5). Продолжая последовательно описываемый выше процесс до пересечения множеств $\{S_{i^*-2}^-\}$ и $\{S_{i^*-1}^-\}$ включительно, получим однозначно определенный

сеткой $\{x_j^-\}_1^i$ набор многозвенников $\hat{s}_{i+1}^-(x)=\hat{s}_{i+1,j}(x), x\in[\hat{x}_j^-,\hat{x}_{j+1}^-]$,

$j = \overline{1,i}$; $i=\overline{1,i^*-3}$, таких что $\hat{s}_{i+2}^-(x)=\hat{s}_{i+1}^-(x)$, $x \in [\hat{x}_1^-, \hat{x}_{i+1}^-]$,

$i = \overline{1,i^*-4}$. Количество таких многозвенников равно i^*-3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Сплайн $p_i(x)$, $i = \overline{1,i^*-2}$, следующего вида:

$$p_1(x) = s_2^-(x),\ x \in [a = \hat{x}_1^-, \hat{x}_2^-],$$

$$p_i(x) = \begin{cases} \hat{s}_i^-(x),\ x \in [\hat{x}_1^-, \hat{x}_i^-], \\ s_{i+1}^-(x),\ x\in[\hat{x}_i^-, x_{i+1}^-], \end{cases} \qquad i = \overline{2,i^*-2},$$

где $s_{i+1}^-(x)$ есть оптимальный слева сплайн, произвольно выбранный из $\{S_{i+1}^-\}$, называется альтернансным слева сплайном.

Сплайн $p_i(x)$, $i=\overline{1,i^*-2}$, определяется однозначно при каждом i (независимо от выбора $s_{i+1}^-(x)$), так как на $[x_i^-,x_{i+1}^-]$ все сплайны из $\{S_{i+1}^-\}$ (i – фиксировано) совпадают (теорема I). Итак, имеем набор $p_1(x), p_2(x), \dots, p_{i^*-2}(x)$ из (i^*-2) альтернансных слева сплайнов (рис.6). Аналогично

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2′: Сплайн $r_i(x)$, $i=\overline{1,i^*-2}$, вида

$$r_1(x) = s_2^+(x),\quad x\in[x_1^+, x_2^+ = b],$$

$$r_i(x) = \begin{cases} \hat{s}_i^+(x), & x \in [\hat{x}_2^+, \hat{x}_{i+1}^+ = b], \\ s_{i+1}^+(x), & x \in [x_1^+, x_2^+], \end{cases} \qquad i = \overline{2, i^*-2},$$

где $s_{i+1}^+(x)$ есть оптимальный справа сплайн, произвольно выбранный из $\{S_{i+1}^+\}$, называется альтернансным справа сплайном.

Сплайны $r_i(x)$, $i = \overline{1, i^*-2}$, определяются тоже однозначно при каждом i, и их количество равно i^*-2.

Рассмотрим пару сплайнов: $p_{i^*-2}(x)$, $x \in [a = \hat{x}_1^-, x_{i^*-1}^-]$, и $r_1(x)$, $x \in [x_1^+, \hat{x}_2^+ = b]$. Так как $x_1^+ \le x_{i^*-1}^-$, то существует точка ξ_{i^*-1} пересечения последнего звена сплайна $p_{i^*-2}(x)$ и первого (здесь и последнего) звена сплайна $r_1(x)$ (рис.7):

$$p_{i^*-2}(\xi_{i^*-1}) = r_1(\xi_{i^*-1}).$$

Введем в рассмотрение некоторый сплайн $q_1(x)$ на сетке

Δ_1: $a = \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{i^*-1} < \xi_{i^*} = b$, $\xi_j = \hat{x}_j^-$, $j = \overline{1, i^*-2}$ $(\hat{x}_j^- \in \Delta_{i^*-1}^-)$,

$\xi_{i^*} = \hat{x}_2^+$ $(\hat{x}_2 \in \Delta_2^+)$:

$$q_1(x) = \begin{cases} p_{i^*-2}(x), & x \in [\xi_1, \xi_{i^*-1}], \\ r_1(x), & x \in [\xi_{i^*-1}, \xi_{i^*}], \end{cases}$$

который принадлежит множеству $\{S_{i^*}^-\}$ (или $\{S_{i^*}^+\}$), т.е. множеству оптимальных слева (справа) сплайнов с индексом i^* (рис.7). Аналогично пересечение сплайнов $p_{i^*-3}(x)$ и $r_2(x)$ определяет точку ξ_{i^*-2}, такую что $p_{i^*-3}(\xi_{i^*-2}) = r_2(\xi_{i^*-2})$, и т.д.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Сплайн $q_k(x)$, $k = \overline{1, i^*-2}$, на сетке Δ_k: $a = \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{i^*-1} < \xi_{i^*} = b$, $\xi_j = \hat{x}_j^-$ $(\hat{x}_j^- \in \Delta_{i^*-k})$, $j = \overline{1, i^*-k-1}$, $\xi_{i^*-j+1} = \hat{x}_{k-j+2}^+$ $(\hat{x}_{k-j+2}^+ \in \Delta_{k+1}^+)$, $j = \overline{1, k}$, $p_{i^*-k-1}(\xi_{i^*-k}) = r_k(\xi_{i^*-k})$, такой что

$$q_k(x) = \begin{cases} p_{i^*-k-1}(x), & x \in [a = \xi_1, \xi_{i^*-k}], \\ r_k(x), & x \in [\xi_{i^*-k}, \xi_{i^*} = b], \end{cases}$$

$$k = \overline{1, i^*-2},$$

называется альтернансным сплайном.

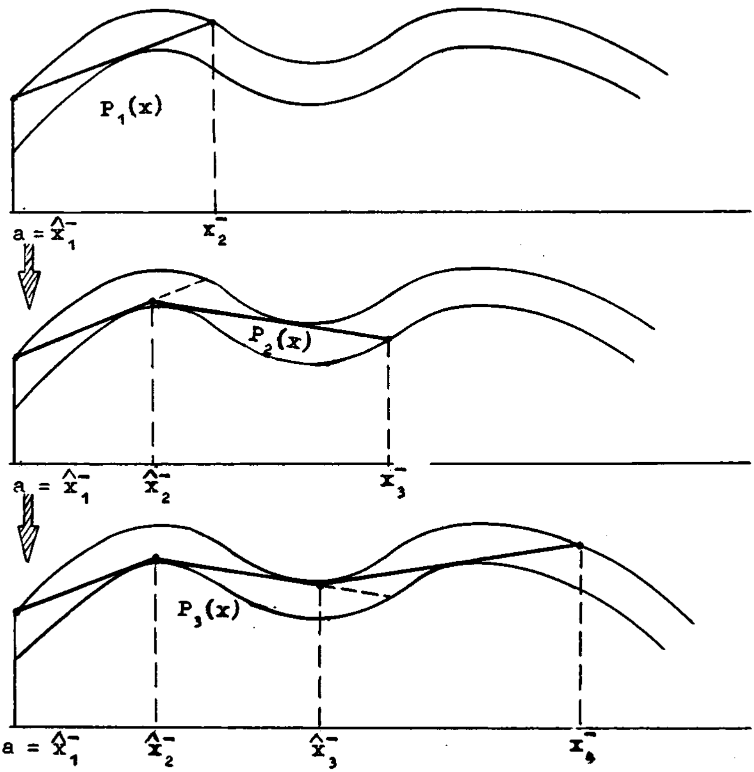
P₁(x)
a = x̂₁⁻
x₂⁻
P₂(x)
a = x̂₁⁻
x̂₂⁻
x₃⁻
P₃(x)
a = x̂₁⁻
x̂₂⁻
x̂₃⁻
x₄⁻

Рис. 6

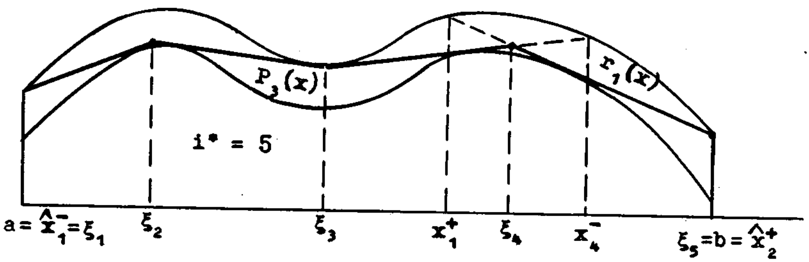
P₃(x)
r₁(x)
i* = 5
a = x̂₁⁻ = ξ₁
ξ₂
ξ₃
x₁⁺
ξ₄
x₄⁻
ξ₅ = b = x̂₂⁺

Рис. 7

Альтернансный сплайн определяется однозначно при каждом k (рис.8). Число альтернансных сплайнов равно i^*-2. Так как эти сплайны принадлежат множеству решений обратной задачи и обладают определенными альтернансными свойствами, в дальнейшем ограничимся их рассмотрением. Далее, пусть имеются альтернансные слева сплайны $p_i(x) = p_{i,j}(x)$, $x\in[x^-_{i,j}, x^-_{i,j+1}]$, $j=\overline{1,i}$, $i=\overline{1,i^*-2}$. Рассмотрим $p_1(x) = p_{1,1}(x)$, $x\in[x^-_{1,1}, x^-_{1,2}]$. Отрезок $[x^-_{1,1}, x^-_{1,2}]$ имеет не менее трех альтернансных точек (теорема I). Если $x^-_{1,j}$ ($j=1,2$)- узлы сплайна $p_1(x)$, то существует альтернансная точка $\tilde{x}^-_{1,1}\in$ $\in(x^-_{1,1}, x^-_{1,2})$. Далее рассмотрим $p_2(x) = p_{2,j}(x)$, $x\in[x^-_{2,j}, x^-_{2,j+1}]$, $j=1,2$. Так как звенья $p_{2,1}(x)$ и $p_{2,2}(x)$ у сплайна $p_2(x)$ могут иметь только одну точку "склейки" $x^-_{2,2}\in[\tilde{x}^-_{1,1}, x^-_{1,2}]$, то на отрезке $[x^-_{2,1}, x^-_{2,2}]$ есть, по крайней мере, две альтернансные точки. В силу теоремы I существует альтернансная точка $\tilde{x}^-_{2,2}\in(x^-_{2,2}, x^-_{2,3})$. Тогда $x^-_{3,3}\in[\tilde{x}^-_{2,2}, x^-_{2,3}]$ (рис.9,здесь $a=x^-_{1,1}=x^-_{2,1}=x^-_{3,1}$). Но тогда на $[x^-_{3,2}, x^-_{3,3}]$ есть,по крайней мере,две альтернансные точки. По индукции,то же самое верно для любого $p_k(x)$, $k=\overline{1,i^*-2}$.

Рассмотрим $r_i(x)=r_{i,j}(x)$, $x\in[x^+_{i,j}, x^+_{i,j+1}]$, $j=\overline{1,i}$; $i=\overline{1,i^*-2}$. У сплайнов $r_1(x)=r_{1,1}(x)$, $x\in[x^+_{1,1}, x^+_{1,2}]$ и $r_2(x) = r_{2,j}(x)$, $x\in[x^+_{1,j}, x^+_{1,j+1}]$, $j=1,2$, звенья $r_{1,1}(x)$ и $r_{2,2}(x)$ "склеиваются" также в единственной точке $x^+_{2,2}\in[x^+_{1,1}, \tilde{x}^+_{1,1}]$, где $\tilde{x}^+_{1,1}\in$ $\in(x^+_{1,1}, x^+_{1,2})$- точка альтернанса внутри $[x^+_{1,1}, x^+_{1,2}]$. С другой стороны, $x^+_{2,2}\in[\tilde{x}^+_{2,2}, \tilde{x}^+_{1,1}]$, где $\tilde{x}^+_{2,2}$, $\tilde{x}^+_{1,1}$ - точки альтернанса соответственно на $[x^+_{2,1}, x^+_{2,2}]$ и на $[x^+_{2,2}, x^+_{2,3}]$ (рис.10). По индукции можно доказать, что то же самое справедливо для любого узла сплайна $r_i(x)$, $1\le i\le i^*-2$. Итак, каждый отрезок $[x_{i,j}, x_{i,j+1}]$ альтернансного сплайна $q_k(x)$, $1\le k\le i^*-2$, имеет не менее двух альтернансных точек. Заметим, что хотя на каждом отрезке и имеются две альтернансные точки, на всем $[a,b]$ альтернанса из $2(i^*-1)$ точек может и не быть. Это обусловлено различными характерами альтернансов "склеиваемых" альтернансных слева и справа сплайнов, которые образуют $q_k(x)$. Таким образом, справедлива

ЛЕММА 5. На каждом шаге альтернансного сплайна находится как минимум двухточечный альтернанс.

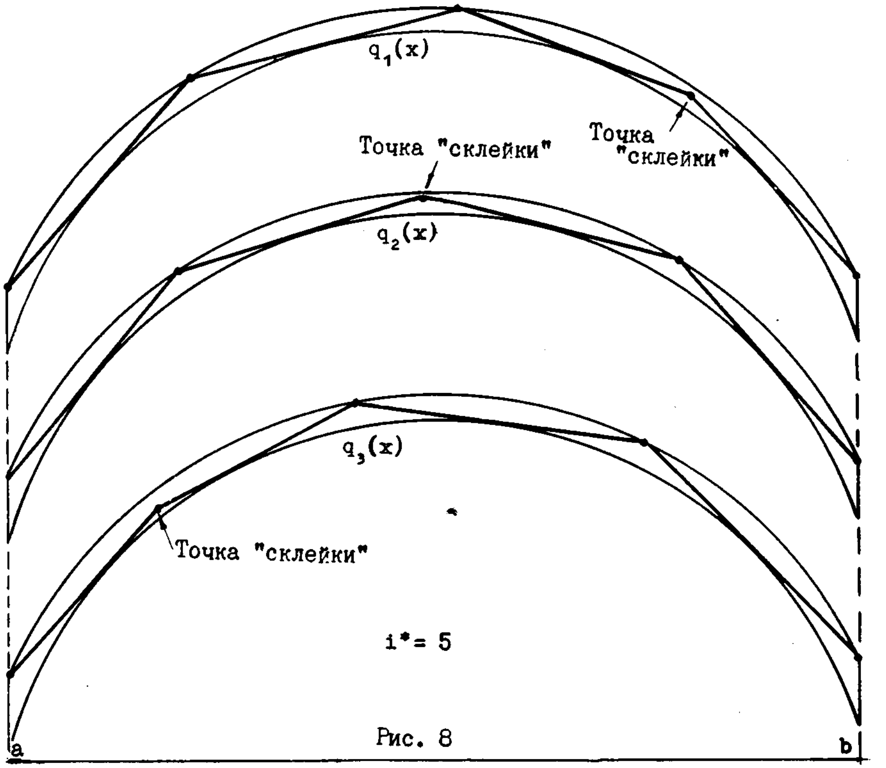

Рис. 8

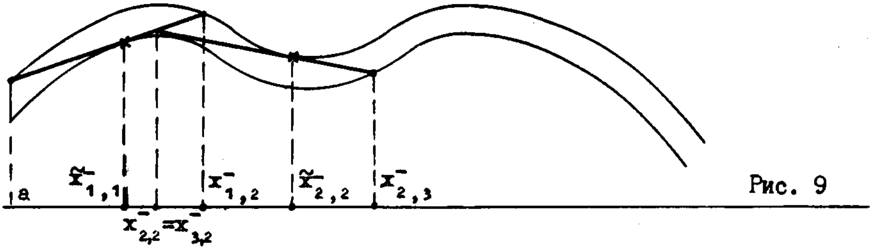

Рис. 9

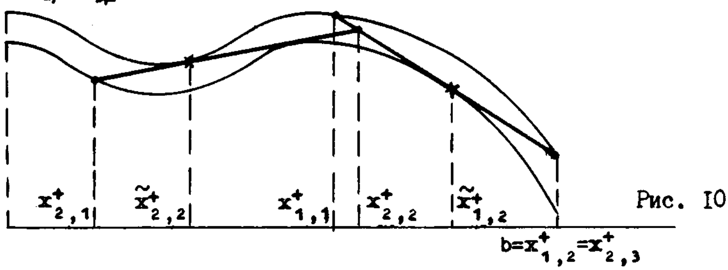

Рис. 10

Согласно данной лемме общее число допустимых локально опорных точек [12, с.28], которое альтернансный сплайн имеет на $[a,b]$, не меньше чем $2(i^*-1)$.

ЛЕММА 6 (связь с локально оптимальными сплайнами первой степени). Альтернансный слева (справа) сплайн является локально оптимальным на $[a,x^-_{i^*-1}]$ ($[x^+_1,b]$), если аппроксимируемая функция выпукла на данном отрезке.

Из леммы 6 вытекает факт существования для выпуклой функции при некотором $\varepsilon>0$ такого альтернансного сплайна, что он является решением задачи 3 и причем единственным [12,с.31].

Так как на каждом шаге альтернансного сплайна имеются две альтернансные точки, то возможны три варианта их размещения:

1) одна находится внутри шага, другая – на его границе;

2) обе находятся внутри шага;

3) обе являются граничными.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если на каком-то шаге альтернансного сплайна две допустимые локально опорные точки расположены в соответствии со вторым или третьим вариантами и образуют альтернанс, то аппроксимируемая функция на рассматриваемом шаге не строго выпукла.

Следствие 3 очевидно, так как в окрестности одной альтернансной точки функция выпукла (вогнута), а в окрестности другой – вогнута (выпукла).

Заметим, что третий вариант возможен лишь для недифференцируемых функций, так как в этом случае у функции должны быть изломы на концах шага.

Исходя из свойств альтернансных слева и справа сплайнов, предложим два алгоритма построения решений (альтернансных сплайнов) обратной задачи.

§3. Алгоритм I (сведение обратной задачи к задаче двойной максимизации

Пусть $f(x)\in C[a,b]$. Построим альтернансный сплайн $q_k(x)$, непосредственно исходя из определения образующих его альтернансных слева и справа сплайнов $p_{i^*-k-1}(x)$ и $r_k(x)$. Для определенности построим $q_{i^*-2}(x)$.

Сплайн $p_1(x)$ единствен, поэтому сначала найдем $p_1(x) = p_{1,1}(x)$, $x \in h_{1,1}$ (здесь $h_{1,1}=[x_{1,1}, x_{1,2}]$). Так как $x_{1,1}=a$ фиксирован, то $x_{1,2} = \max\limits_{\Delta\in\Delta_N} \{x_2\}$, по определению оптимального слева сплайна. Пусть $p_{1,1}(x) = \alpha+\beta(x-a)$, $x > a$, $\alpha\in[f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon]$, тогда

$$x_{1,2} = \max_{\alpha} \max_{\beta} x(\alpha,\beta), \tag{1}$$

причем

$$|p_{1,1}(x)-f(x)| \le \varepsilon, \quad x\in[a,x_{1,2}], \tag{2}$$

т.е. задача нахождения $x_{1,2}$ сводится к двойной максимизации по α и β с ограничением (2).

При численном решении задачи поступим следующим образом. Разобьем компакт $[f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon]$ равноудаленными точками $\alpha_i \in [f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon]$, $i=\overline{1,N}$, $\alpha_1 = f(a)-\varepsilon$, $\alpha_N = f(a)+\varepsilon$, такими, что $\alpha_{i+1}-\alpha_i \ll \varepsilon$, $i=\overline{1,N-1}$. Тогда задача (I)-(2) трансформируется в задачу:

$$x_{1,2} = \max_{i=\overline{1,N}} \max_{\beta} x(\alpha_i,\beta), \tag{3}$$

$$|\alpha_i+\beta(x-a)-f(x)| \le \varepsilon, \quad x\in[a,x_{1,2}]. \tag{4}$$

Таким образом, задача (I)-(2) свелась к решению N задач (3)-(4) поиска звена с максимальным шагом и закрепленным концом сплайна с заданным значением в первом узле: $p_{1,1}(a)=\alpha_i$, $i=\overline{1,N}$. Алгоритм поиска звена с максимальным шагом и закрепленным концом сплайна первой степени дан в [I2-I4].

Пусть найдено решение задачи (3)-(4) - узел $x_{1,2}$ сплайна $p_1(x)$. Построим $p_2(x)$. Пусть $x^*_{1,1}$ - внутренняя альтернансная точка сплайна $p_1(x)$, тогда второй узел $x_{2,2}$ сплайна $p_2(x)$ находится на интервале $[x^*_{1,1}, x_{1,2}]$. Задача (I)-(2) для $x_{2,3}$ (последнего узла сплайна $p_2(x)$) будет выглядеть: $p_{2,2}(x)=\alpha+\beta(x-\xi)$, $x > \xi$, $\alpha = p_{1,1}(\xi)$, $\xi\in[x^*_{1,1}, x_{1,2}]$,

$$x_{2,3} = \max_{\xi} \max_{\beta} x(\alpha(\xi),\beta), \tag{5}$$

$$|p_{2,2}(x)-f(x)| \le \varepsilon, \quad x\in[x_{2,2}, x_{2,3}]. \tag{6}$$

Подобно процессу нахождения $x_{1,2}$ возьмем на интервале $[x^*_{1,1}, x_{1,2}]$ N точек $\xi_i\in[x^*_{1,1}, x_{1,2}]$, $i=\overline{1,N}$, $\xi_N = x_{1,2}$. Им должны соответствовать $\alpha_i=p_{1,1}(\xi_i)$, $i=\overline{1,N}$, такие, что $\alpha_{i+1}-\alpha_i \ll \varepsilon$, $i=\overline{1,N-1}$. Задача (5)-(6) преобразуется в следующую:

$$x_{2,3} = \max_{i=\overline{1,N}} \max_{\beta} x(\xi_i,\beta), \tag{7}$$

$$|\alpha(\xi_i)+\beta(x-\xi_i)-f(x)| \le \varepsilon, \quad x\in[\xi_i,x_{2,3}]. \tag{8}$$

Таким образом, задача (5)-(6) тоже свелась к решению N задач поиска звена локально оптимального сплайна с заданным левым концевым значением $\alpha(\xi_i)$. Решая (7)-(8) последовательно для узлов $x_{i,i+1}$ сплайнов $p_i(x)$, $i=\overline{3,i^*-2}$, в результате получим сплайн $p_{i^*-2}(x)$. Узлы $x_{i,i}$, $i=\overline{1,i^*-2}$, представляют собой по определению узлы сплайна $q_{i^*-2}(x)$. Необходимо найти (i^*-1)-й узел (i^*-й узел равен b) сплайна $q_{i^*-2}(x)$. Построив $r_1(x)=r_{1,1}(x)$, $x\in[\phi_{1,1},\phi_{1,2}=b]$, найдем первый узел $\phi_{1,1}$ сплайна $r_1(x)$ (второй узел фиксирован и равен b). Очевидно, что процесс построения сплайна $q_{i^*-2}(x)$ от a к b оборвется при условии:

$$x_{i,i+1} \ge \phi_{1,1}, \quad i=1,2,\ldots \tag{9}$$

Условие (9) означает существование точки пересечения $\phi^*\in[\phi_{1,1},x_{i,i+1}]$ звеньев $p_{i,i}(x)$ и $r_{1,1}(x)$. Данная точка пересечения легко находится, она и будет (i^*-1)-м узлом сплайна $q_{i^*-2}(x)$. Таким образом, имеем

$$q_{i^*-2}(x) = \begin{cases} p_{i^*-2}(x), & x\in[a,\phi^*], \\ r_1(x), & x\in[\phi^*,b]. \end{cases}$$

Одно из решений обратной задачи построено. Как видно из его построения, оно является асимптотически зависящим от N: $q_{i^*-2}(x) = q_{i^*-2}(x;N)$, причем точное $q^{\text{точное}}_{i^*-2}(x) = \lim_{N\to\infty} q_{i^*-2}(x;N)$.

§4. Алгоритм 2 (построение решения с использованием альтернансных свойств для $f(x)\in C^1[a,b]$)

Пусть $f(x)\in C^1[a,b]$ и имеет конечное число участков выпуклости (вогнутости). Приведем алгоритм построения $q_{i^*-2}(x)$, основывающегося на альтернансных свойствах. Воспользуемся следствием 3. Если какое-то звено сплайна $q_{i^*-2}(x)$ имеет внутри соответствующего шага две альтернансные точки (рассматривается непрерывно дифференцируемая функция), то внутри этого шага имеется точка локального экстремума производной $f'(x)$. Разобьем $[a,b]$ на подынтервалы $(u_0,u_1),(u_1,u_2),\dots,(u_J, u_{J+1})$, где $\{u_j\}_1^J$ - точки локальных экстремумов производной $f'(x)$, $u_0=a$, $u_{J+1}=b$. Если точки какого-то j-го экстремума образуют компакт, то в качестве u_j берется любая точка из этого компакта. Определив знак производной $f'(x)$ на (u_0,u_1), мы найдем участки выпуклости (вогнутости) на всем отрезке $[a,b]$. При $f'(a)>0$ функция $f(x)$ выпукла на (u_0,u_1), при $f'(a)<0$ вогнута. Если $f'(a)=0$, то $f(x)$ выпукла на $[u_0, u_1]$ при $f'(u_1)<0$, а если $f'(u_1)>0$, то $f(x)$ вогнута на (u_0,u_1). Для определенности положим, что $f(x)$ выпукла на (u_0,u_1), а поэтому и на $(u_2,u_3),\dots,(u_{2k},u_{2k+1})$, $k=1,2,\dots,[J/2]$ ($[\cdot]$ - означает целую часть). Для построения $q_{i^*-2}(x)$ будем последовательно находить альтернансные слева сплайны $p_i(x)$, $i=1,2,\dots$,и т.д. до $i=i^*-2$, а затем находим $r_1(x)$. Нахождение $p_1(x)$ и $r_1(x)$ гораздо проще остальных, поэтому мы рассмотрим только построение $p_i(x)$, $i>1$, предположив, что сплайн $p_{i-1}(x)$ уже построен.

Пусть точки $x^*_{i-1,1}, x^*_{i-1,2}$ и $x_{i-1,i}$ суть альтернансные точки последнего звена $p_{i-1,i-1}(x)$ сплайна $p_{i-1}(x)$ (теорема I) и пусть для определенности $x^*_{i-1,1}\in(u_{2k_0},u_{2k_0+1})$, $k_0\le[J/2]$, $x^*_{i-1,2}\in(u_{2m_0-1}, u_{2m_0})$, $k_0+1\le m_0\le[(J+1)/2]$. Так как $x_{i-1,i}>x^*_{i-1,2}>x^*_{i-1,1}$, то $x_{i-1,i}\in[u_l,u_{l+1}]$, $l\ge m_0$. Тогда

$$
\begin{aligned}
&\delta(x^*_{i-1,1};p_{i-1}) = (\mp)\varepsilon,\ x^*_{i-1,i}\in[u_0,u_{l+1}],\\
&\delta(x^*_{i-1,2};p_{i-1}) = (\pm)\varepsilon,\ x^*_{i-1,2}\in[u_0,u_{l+1}],\\
&\delta(x_{i-1,i};p_{i-1}) = (\mp)\varepsilon,\ x_{i-1,i}\in[u_0,u_{l+1}],
\end{aligned}
\tag{10}
$$

где $\delta(x;p_{i-1}) = f(x)-p_{i-1}(x)$. Так как мы ищем $p_i(x)$, то имеем первое ограничение на $p_{i,i}(x)$:

$$\frac{dp_{i,i}(x)}{dx}\ (\lesseqgtr)\ \frac{dp_{i-1,i-1}(x)}{dx}. \tag{11}$$

Первый узел $x_{i,i}$ последнего звена $p_{i,i}(x)$ находится на полуинтервале $(x^*_{i-1,2}, x_{i-1,i}]$. Если $x_{i,i}=x_{i-1,i}$, то звено $p_{i,i}(x)$

должно удовлетворять условию локальной оптимальности, т.е. быть с максимальным шагом. Поэтому из точки $x_{i-1,i}$ проводим локально оптимальное звено, используя, например, алгоритм из [12] или [14]. Если среди допустимых локально опорных точек этого звена найдутся точки, удовлетворяющие (10), то $p_{i,i}(x)$ построен. Так как данный случай тривиален, рассмотрим случай, когда полученное звено не удовлетворяет (10). В этом случае $x_{i,i} \in (x^*_{i-1,2}, x_{i-1,i})$. Образуем следующую совокупность пар интервалов:

$$\{(u_{2l-2}, u_{2l-1}), \{(u_{2k-1}, u_{2k})\}_{k=1}^{[(J+1)/2]}\}_{l=1}^{[(J+1)/2]}, \qquad (12)$$

$$\{(u_{2l-1}, u_{2l}), \{(u_{2k}, u_{2k+1})\}_{k=1}^{[J/2]}\}_{l=1}^{[J/2]}. \qquad (13)$$

Каждая пара состоит из одного выпуклого (вогнутого) и вогнутого (выпуклого) интервала, причем в (12) первый интервал - выпуклый, а второй - вогнутый в отличие от (13), где все наоборот. На каждой паре из (12) и (13) решаем следующую систему уравнений:

$$f'(\xi) = f'(\psi) = (f(\psi) - f(\xi))/(\psi - \xi), \qquad (14)$$

где ξ ищется на первом, а ψ соответственно на втором интервале пары (12) или (13). Пусть (ξ_m, ψ_m), $m=\overline{1,M}$, суть всевозможные решения уравнений (14). Они определяют прямые $y_m(x) = f(\xi_m) + [(f(\psi_m) - f(\xi_m))/(\psi_m - \xi_m)](x - \xi_m)$ с двумя точками альтернанса. Звено $p_{i,i}(x)$ является частью какой-то прямой из совокупности $\{y_m(x)\}_{m=1}^{M}$. Отбрасываем прямые, не удовлетворяющие ограничению (11), а из оставшихся M_0 прямых $\{y_{m_0}(x)\}_{m_0=1}^{M_0 \le M}$ оставим только те, которые являются допустимыми, т.е. удовлетворяющие условию:

$$|f(x) - y_{m_0}(x)| \le \varepsilon,\ x \in [\psi^*_{m_0}, \psi_{m_0}],\ m_0 = \overline{1, M_0},\quad (M_0 \le M), \qquad (15)$$

где $\psi^*_{m_0}$ - точка пересечения звена $p_{i-1,i-1}(x)$ и прямой $y_{m_0}(x)$. Ограничение (15) можно проверить, например, по алгоритму, предложенному в [12]. Среди оставшихся M_0^* прямых $\{y_{m_0^*}(x)\}_{m_0^*=1}^{M_0^* \le M_0}$ должна находиться прямая, содержащая звено $p_{i,i}(x)$ (следствие 3). Ищем ближайшие к $\psi_{m_0^*}$ точки пересечения $\psi^+_{m_0^*}$ и $\psi^-_{m_0^*}$ прямой $y_{m_0^*}(x)$ функциями $f(x)+\varepsilon$ и $f(x)-\varepsilon$ соответственно, т.е. решаем уравнение:

$$|f(x)-y_{m_0^*}(x)| = \epsilon,\ x\in(\phi_{m_0^*},b],\ m_0^* = \overline{1,M_0^*}\ (M_0^*\le M_0\le M). \qquad (16)$$

Для каждого m_0^* находим наименьший корень $\tilde{\phi}_{m_0^*}$ уравнения (I6), т.е. $\tilde{\phi}_{m_0^*} = \min\{\phi^+_{m_0^*},\phi^-_{m_0^*}\}$. В силу теорем I и 2 и единственности альтернанса для $p_{i,i}(x)$ среди точек $\tilde{\phi}_{m_0^*}$, $m_0^*=\overline{1,M_0^*}$, существует единственная точка $\tilde{\phi}_0\in\{\tilde{\phi}_{m_0^*}\}_{m_0^*=1}^{M_0^*}$, образующая трехточечный альтернанс с точками $\xi_0\in\{\xi_{m_0^*}\}_{m_0^*=1}^{M_0^*}$ и $\phi_0\in\{\phi_{m_0^*}\}_{m_0^*=1}^{M_0^*}$. Таким образом,

$$x_{i,i} = \phi_0^*,\ x^*_{i,1} = \xi_0,\ x^*_{i,2} = \phi_0,\ x_{i,i+1} = \tilde{\phi}_0$$

и

$$p_{i,i}(x) = f(\phi_0^*)+(f(\phi_0^*)-f(\xi_0))\cdot(x-\phi_0^*)/(\phi_0^*-\xi_0),\ x\in[\phi_0^*,\tilde{\phi}_0],$$

где $\phi_0^*\in\{\phi^*_{m_0^*}\}_{m_0^*=1}^{M_0^*}$. Звено $p_{i,i}(x)$ сплайна $p_i(x)$ построено.

Пусть на некотором i-м шаге окажется, что какая-то точка $\xi_{m_0^*}$ или $\phi_{m_0^*}$ находится на (u_J,u_{J+1}) или (I5) выполняется для какой-то прямой $y(x)\in\{y_{m_0^*}(x)\}_{m_0^*=1}^{M_0^*}$ на полуинтервале $(\phi_{m_0^*}, b]$. Тогда процесс построения сплайнов $p_i(x)$, $i=1,2,\ldots$, заканчивается (т.е. $i^*=i+1$) и строится $r_1(x)$ по тому же алгоритму, что и $p_1(x)$ (построение $p_1(x)$ отличается от построения $p_i(x)$, $i>1$, только тем, что левые узлы рассматриваемых альтернансных лучей фиксированы и равны a). Предпоследний узел сплайна $q_{i^*-2}(x)$ находится как точка пересечения $y(x)$ и $r_1(x)$. Сплайн $q_{i^*-2}(x)$ построен.

Заметим, что алгоритмы I и 2 допускают распараллеливание процесса построения решения обратной задачи, так как построение решения может происходить одновременно с левого и правого концов отрезка $[a, b]$, а также и в обе стороны от любой из точек u_j, $j=\overline{1,J}$.

Литература

1. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. - М.: Наука, 1980. - 352 с.

2. РЕМЕЗ Е.Я. Основы численных методов чебышевского приближения. - Киев: Наукова думка, 1969. - 623 с.

3. ПОПОВ Б.А., ТЕСЛЕР Г.С. Приближение функций для технических приложений. -Киев: Наукова думка, 1980. -350 с.

4. ГРЕБЕННИКОВ А.И. Метод сплайнов и решение некорректных задач теории приближений. -Москва, 1983.-208 с. (Моск.Гос.ун-т).

5. PHILLIPS G.M. Algorithms for piecewise straightline approximations.-Computer J.,1968,v.11,p.211-212.

6. COX M.G. An algorithm for approximating convex functions by means of first-degree splines. - Computer J., 1971, v. 14, N 3, p.272-275.

7. КЕТКОВ Ю.Л. Об оптимальных методах кусочно-линейной аппроксимации. -Изв. вузов, сер.: радиофизика, 1966, т. 9,№6,с.1202-1209.

8. ШУМИЛОВ Б.М. О локальной аппроксимации сплайнами первой степени. -В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып. 75). Новосибирск, 1978, с. 16-22.

9. Некоторые задачи оптимизации траекторий обработки деталей со сложными техническими формами /Исаев В.К., Плотников С.А., Ситников В.П., Щербаков Н.В. -В кн.: Опыт и перспективы эффективного использования технологического оборудования с программным управлением. Ленинград, 1982, с.48-51.

10. ЧЕБЫШЕВ П.Л. Теория механизмов, известных под названием параллелограммов. -Полн. собр. соч., т.2. М-Л., 1948, с.23-51.

11. ПОПОВ Б.А. Точность приближения равномерными сплайнами (абсолютная погрешность). -Львов; 1983. - 50 с. (Препринт/ФМИ АН УССР: №73).

12. ИСАЕВ В.К., ПЛОТНИКОВ С.А. О приближении функций сплайнами первой степени. -В кн.: Методы сплайн-функций в численном анализе (Вычислительные системы, вып. 98). Новосибирск,1983,с.27-34.

13. ПЛОТНИКОВ С.А. Об оптимальной аппроксимации с заданной точностью траекторий дискретных управляемых систем.-Труды МФТИ, сб.деп.рук., ВИНИТИ, № 3690-82ДЕП, с.70-73.

14. ИСАЕВ В.К., ПЛОТНИКОВ С.А. Алгоритм приближения функций ломанной с заданной точностью и минимальным числом узлов.-В кн.: Современные достижения в области механической обработки криволинейных поверхностей на станках с ЧПУ. Ленинград, 1983, с.42-47.

Поступила в ред.-изд.отд.
9 июля 1984 года