СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИЯ И ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ
(Вычислительные системы)
1985 год Выпуск 108

УДК 681.3.06

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ КУБИЧЕСКИМ СПЛАЙНОМ КРИВОЙ С ЗАДАННЫМИ НАКЛОНАМИ КАСАТЕЛЬНЫХ И РАДИУСАМИ КРИВИЗНЫ НА КОНЦАХ

В.К.Исаев, Е.А.Григорьев

Параметрические кубические сплайны нашли широкое применение в задачах автоматизации проектирования и технологической подготовки производства как удобное средство представления информации. Как правило, в этих задачах представляют интерес графики параметрических кубических сплайнов. Поэтому на практике краевые условия для таких сплайнов удобно задавать в виде, не связанном с параметризацией кривой.

Поставим задачу о построении интерполяционного параметрического кубического сплайна в плоскости, удовлетворяющего в краевых точках заданным значениям первых и вторых производных в декартовой системе координат или заданным наклонам касательных и радиусов кривизны. Предварительно рассмотрим вопрос об установлении соответствия между кубическими сплайнами с различными краевыми условиями, который по способу своего решения примыкает к поставленной задаче.

Для кубического сплайна $s(t)$, построенного по таблице $\{t_i, s_i\}$, $i=\overline{1,n}$, примем следующие обозначения:

$$s_i = s(t_i),\quad s'_i = \left.\frac{ds(t)}{dt}\right|_{t=t_i},\quad s''_i = \left.\frac{d^2s(t)}{dt^2}\right|_{t=t_i},\quad i=\overline{1,n},$$

$$\Delta s_i = s_{i+1}-s_i,\quad \Delta t_i = t_{i+1}-t_i,\quad i=\overline{1,n-1}.$$

В дальнейшем будем использовать следующие выражения для вторых производных в узловых точках сплайна через соответствующие первые производные:

$$\left.\begin{aligned} S''_i &= 6\cdot\frac{\Delta S_i}{\Delta t_i^2} - 4\cdot\frac{S'_i}{\Delta t_i} - 2\cdot\frac{S'_{i+1}}{\Delta t_i}, \\ S''_{i+1} &= -6\cdot\frac{\Delta S_i}{\Delta t_i^2} + 2\cdot\frac{S'_i}{\Delta t_i} + 4\cdot\frac{S'_{i+1}}{\Delta t_i}, \quad i=\overline{1,n-1}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Рассмотрим кубический сплайн $S_0(t)$, построенный по таблице $\{t_i, S_i\}, i=\overline{1,n}$, с краевыми условиями $\left.\frac{dS_0(t)}{dt}\right|_{t=t_1}=0$, $\left.\frac{dS_0(t)}{dt}\right|_{t=t_n}=0$ и кубический сплайн $S(t)$, построенный по той же таблице, но для краевых условий $S'_1\neq 0$, $S'_n\neq 0$. Кубический сплайн $\tilde{S}(t)=S(t)-S_0(t)$, заданный таблицей $\{t_i, 0\}$, $i=\overline{1,n}$, с краевыми условиями S'_1, S'_n представляет вариацию сплайна $S_0(t)$ при изменении краевых условий. Условие непрерывности второй производной сплайна $\tilde{S}(t)$ во внутренних точках исходной таблицы запишем в виде:

$$\frac{\tilde{S}'_{i-1}}{\Delta t_{i-1}} + 2\cdot\tilde{S}'_i\cdot\left(\frac{1}{\Delta t_{i-1}} + \frac{1}{\Delta t_i}\right) + \frac{\tilde{S}'_{i+1}}{\Delta t_i} = 0, \quad i=\overline{2,n-1}. \qquad (2)$$

Сплайн $\tilde{S}(t)$ можно представить как сумму кубических сплайнов $r(t)$ и $l(t)$: $\tilde{S}(t)=r(t)+l(t)$, где

$$l(t):\ l'_1=0,\ l'_n=\beta,\ l_i=0,\quad i=\overline{1,n},$$

$$r(t):\ r'_1=\alpha,\ r'_n=0,\ r_i=0,\quad i=\overline{1,n}.$$

Пусть $n\geq 3$. Рассмотрим сплайн $r(t)$. Обозначим $\rho_i=\frac{r'_{i+1}}{r'_i}$, $i=\overline{1,n-1}$. По определению, $\rho_{n-1}=0$. Из (2) получаем

$$\rho_{i-1} = -\frac{1}{2+\frac{\Delta t_{i-1}}{\Delta t_i}(2+\rho_i)}, \quad i=\overline{2,n-1}.$$

Легко видеть, что для ρ_i, $i=\overline{1,n-2}$, справедливо:

а) значения ρ_i, $i=\overline{1,n-1}$, $n\geq 3$, однозначно определяются значениями Δt_i, $i=\overline{1,n-1}$;

б) $\rho_i<0$, $i=\overline{1,n-2}$;

в) $|\rho_i|<\frac{1}{2}$, $i=\overline{1,n-1}$.

Аналогично для сплайна $l(t)$, полагая $n \geq 3$, получим

$$\varphi_i = -\frac{1}{2 + \frac{\Delta t_i}{\Delta t_{i-1}} \cdot (2 + \varphi_{i-1})}, \quad i=\overline{2,n-1},$$

где $\varphi_1 = 0$, $\varphi_i = \frac{l'_i}{l'_{i+1}}$.

Очевидно, что для φ_i, $i=\overline{1,n-1}$, справедливы те же свойства, что и для ρ_i.

Обозначим

$$\left.\begin{aligned} R_i &= \rho_{i-1}\cdot\rho_{i-2}\cdot\rho_{i-3}\cdots\rho_1, \\ F_i &= \varphi_i\cdot\varphi_{i+1}\cdots\varphi_{n-1}, \quad i=\overline{2,n-1}, \\ R_1 &= 1, \quad F_n = 1, \quad R_n = 0, \quad F_1 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

По определению, $R_i = \frac{r'_i}{r'_1} = \frac{r'_i}{\alpha}$, $F_i = \frac{l'_i}{l'_n} = \frac{l'_i}{\beta}$ и производную $\tilde{S}'_i$ можно представить следующим образом:

$$\tilde{S}'_i = R_i\cdot\alpha + F_i\cdot\beta. \qquad (4)$$

Для R_i, F_i справедливы оценки

$$|R_i| < \frac{1}{2^{i-1}}, \quad |F_i| < \frac{1}{2^{n-i}}, \quad i=\overline{2,n-1}, \qquad (5)$$

и неравенства

$$R_2 < 0, \quad F_{n-1} < 0, \quad R_{n-1}\cdot F_2 > 0, \qquad (6)$$

вытекающие непосредственно из определения (3), так как $F_{n-1} = \varphi_{n-1} < 0$, $R_2 = \rho_2 < 0$, а R_{n-1}, F_2 состоят из одинакового числа отрицательных сомножителей. Из (4) и (5), используя неравенство треугольника, получаем

$$|\tilde{S}'_i| < \frac{1}{2^{i-1}}\cdot|\alpha| + \frac{1}{2^{n-i}}\cdot|\beta|. \qquad (7)$$

Неравенство (7) дает для сплайна $\tilde{S}(t)$ оценку влияния значения производных $\tilde{S}'_1 = \alpha$, $\tilde{S}'_n = \beta$ на производную $\tilde{S}'_i$, $i = \overline{1,n}$. Эту оценку можно получить также из более общей оценки - погрешности определения первой производной кубического сплайна при пренебрежении информацией, заданной в удаленных узлах (локальные свойства кубических сплайнов [1]).

Рассмотрим множества кубических сплайнов, построенных по заданной таблице узловых точек для различных значений краевых условий, причем каждому множеству отвечает один из типов краевых условий:

- на концах интервала определения сплайна заданы значения первых производных (I);
- на обоих концах заданы значения вторых производных (П);
- смешанный тип: на левом конце задано значение первой производной, на правом - второй (Ш), и наоборот (IУ);
- периодический случай: задано условие равенства первых и вторых производных на концах интервала определения сплайна (У).

В соответствии с теоремой существования и единственности для кубических сплайнов множества I-IУ совпадают, а множество У включается, например, в множество I. Поэтому имеют смысл задачи об установлении соответствия между элементами указанных множеств. Задачи I-2 устанавливают соответствие между элементами множеств I-П и I-У.

ЗАДАЧА I. Пусть сплайн $S(t)$ задан таблицей $\{t_i, S_i\}$, $i=\overline{1,n}$, и краевыми условиями $S_1' = \alpha$, $S_n' = \beta$. При каких значениях α, β выполняется $S_1'' = \gamma$, $S_n'' = \delta$, где γ, δ - наперед заданные числа?

Положим сначала $n \geqslant 3$. Для сплайна $S(t)$ по определению сплайнов $S_0(t)$, $\widetilde{S}(t)$ следует

$$S(t) = S_0(t) + r(t) + l(t). \tag{8}$$

Из (8) в условиях задачи следует

$$r_1'' + l_1'' = \gamma - S_0''(t_1), \quad r_n'' + l_n'' = \delta - S_0''(t_n). \tag{9}$$

Согласно (I) для сплайнов $r(t)$, $l(t)$ получаем выражения для r_1'', r_n'' и l_1'', l_n'', подставив в них согласно (4) значения r_2', r_{n-1}', l_2', l_{n-1}':

$$\left.\begin{aligned} r_1'' &= -\alpha \cdot \frac{4+2R_2}{\Delta t_1}, \quad l_1'' = -\beta \cdot \frac{2 \cdot F_2}{\Delta t_1}, \\ r_n'' &= \alpha \cdot \frac{2 \cdot R_{n-1}}{\Delta t_{n-1}}, \quad l_n'' = \beta \cdot \frac{2 \cdot F_{n-1}+4}{\Delta t_{n-1}} \end{aligned}\right\}. \tag{10}$$

Используя полученные выражения в (9), имеем

$$-\frac{4+2 \cdot R_2}{\Delta t_1}\alpha - \frac{2 \cdot F_2}{\Delta t_1} \cdot \beta = \gamma_* ,$$

$$\left.\frac{2\cdot R_{n-1}}{\Delta t_{n-1}}\cdot\alpha + \frac{2\cdot F_{n-1}+4}{\Delta t_{n-1}}\cdot\beta = \delta_*,\ \right\} \tag{11}$$

где $\gamma_* = \gamma - S_0''(t_1)$, $\delta_* = \delta - S_0''(t_n)$.

Определитель системы (II)

$$\Delta = -\frac{4}{\Delta t_1\cdot\Delta t_{n-1}}\cdot[-R_{n-1}\cdot F_2 + R_2\cdot F_{n-1} + 2\cdot(R_2+F_{n-1}) + 4]$$

отличен от нуля, так как согласно (5), (6) при $n \geq 3$

$$|-R_{n-1}\cdot F_2 + R_2\cdot F_{n-1} + 2\cdot(R_2+F_{n-1}) + 4| > \left|-\frac{1}{2^2} + 2\right| = \frac{7}{4}.$$

По правилу Крамера решение (II) существует и единственно

$$\alpha = A\cdot\gamma_* + B\cdot\delta_*, \quad \beta = C\cdot\gamma_* + D\cdot\delta_*, \tag{12}$$

где

$$A = \frac{1}{\Delta}\cdot\frac{2\cdot F_{n-1}+4}{\Delta_{t-1}}, \quad B = \frac{1}{\Delta}\cdot\frac{2F_2}{\Delta t_1},$$

$$C = -\frac{1}{\Delta}\cdot\frac{2\cdot R_{n-1}}{\Delta t_{n-1}}, \quad D = -\frac{1}{\Delta}\cdot\frac{4+2\cdot R_2}{\Delta t_1},$$

что и решает поставленную задачу.

Для вычислений при достаточно больших n в силу малости R_{n-1}, F_2 можно использовать приближенное решение

$$\alpha^* = -\frac{\Delta t_1}{4+2R_2}\cdot\gamma_*, \quad \beta^* = \frac{\Delta t_{n-1}}{4+2\cdot F_{n-1}}\cdot\delta_*. \tag{13}$$

Используя (5),(6), можно показать, что при этом для ошибок $\varepsilon_\alpha = |\alpha-\alpha^*|$, $\varepsilon_\beta = |\beta-\beta^*|$, $\varepsilon = \max(\varepsilon_\alpha,\varepsilon_\beta)$ имеем

$$\varepsilon_\alpha < \frac{2}{7}\cdot\frac{\Delta t_1}{2^{2n-4}}\cdot|\gamma_*| + \frac{2}{7}\cdot\frac{\Delta t_{n-1}}{2^{n-2}}\cdot|\delta_*|,$$

$$\varepsilon_\beta < \frac{2}{7}\cdot\frac{\Delta t_1}{2^{n-2}}\cdot|\gamma_*| + \frac{2}{7}\cdot\frac{\Delta t_{n-1}}{2^{2n-4}}\cdot|\delta_*|,$$

$$\varepsilon < \frac{4}{7}\cdot\frac{\max(\Delta t_1,\Delta t_{n-1})}{2^{n-2}}\cdot\max(|\gamma_*|,|\delta_*|).$$

Рассмотрим случай $n = 2$. В условиях задачи из (I) следует

$$-\frac{4}{\Delta t_1}\cdot\alpha - \frac{2}{\Delta t_1}\cdot\beta = \gamma_*, \qquad \frac{2}{\Delta t_1}\cdot\alpha + \frac{4}{\Delta t_1}\cdot\beta = \delta_*,$$

где $\gamma_* = \gamma - 6\cdot\frac{\Delta S_1}{\Delta t_1^2}$, $\delta_* = \delta + 6\cdot\frac{\Delta S_1}{\Delta t_1^2}$, откуда

$$\alpha = -\frac{\Delta t_1}{3}\cdot\gamma_* - \frac{\Delta t_1}{6}\cdot\delta_*, \qquad \beta = \frac{\Delta t_1}{6}\cdot\gamma_* + \frac{\Delta t_1}{3}\cdot\delta_*. \tag{14}$$

ЗАДАЧА 2. Пусть сплайн $S(t)$ задан таблицей $\{t_i, S_i\}$, $i = \overline{1,n}$, и краевыми условиями $S_1' = S_n' = \alpha$. При каких значениях α выполняется $S_1'' = S_n''$ (периодический случай)?

Пусть $n \geq 3$. Используя разложение (8), запишем условие $S_1'' = S_n''$ в виде $r_1''+l_1''-r_n''-l_n'' = S_0''(t_n)-S_0''(t_1)$ и, выражая производные через α с учетом (10), условия $S_1' = S_n' = \alpha$:

$$\left(-\frac{4+2R_2}{\Delta t_1} - \frac{2\cdot R_{n-1}}{\Delta t_{n-1}} - \frac{2F_2}{\Delta t_1} - \frac{2F_{n-1}+4}{\Delta t_{n-1}}\right)\cdot\alpha = S_0''(t_n) - S_0''(t_1).$$

В силу оценок (5)

$$-\frac{4+2R_2}{\Delta t_1} - \frac{2R_{n-1}}{\Delta t_{n-1}} - \frac{2F_2}{\Delta t_1} - \frac{2F_{n-1}+4}{\Delta t_{n-1}} < 0,$$

и для α получаем

$$\alpha = \frac{S_0''(t_1) - S_0''(t_n)}{\frac{4+2R_2}{\Delta t_1} + \frac{2R_{n-1}}{\Delta t_{n-1}} + \frac{2F_2}{\Delta t_1} + \frac{2F_{n-1}+4}{\Delta t_{n-1}}}, \tag{15}$$

что и решает поставленную задачу.

Учитывая малость F_2, R_{n-1} для достаточно больших n, можно пользоваться приближенным соотношением

$$\alpha^* = \frac{S_0''(t_1) - S_0''(t_n)}{\frac{4+2R_2}{\Delta t_1} + \frac{2F_{n-1}+4}{\Delta t_{n-1}}}. \tag{16}$$

Можно показать, что для ошибки $\varepsilon_\alpha = |\alpha - \alpha^*|$ справедливо

$$\varepsilon_\alpha < 3\cdot|S_0''(t_1) - S_0''(t_n)|\cdot\frac{\Delta t_1\cdot\Delta t_{n-1}}{\Delta t_1 + \Delta t_{n-1}}\cdot\frac{1}{2^{n-2}}.$$

При этом равенство $S''_1 = S''_n$ выполняется с точностью

$$|S''_n - S''_1| < \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2^{n-2}}.$$

Рассмотрим случай $n=2$. С учетом (I) запишем условие $S''_1 = S''_2$ в виде

$$6\cdot\frac{\Delta S_1}{\Delta t_1^2} - 4\cdot\frac{S'_1}{\Delta t_1} - 2\cdot\frac{S'_2}{\Delta t_1} = -6\cdot\frac{\Delta S_1}{\Delta t_1^2} + 2\cdot\frac{S'_1}{\Delta t_1} + 4\cdot\frac{S'_2}{\Delta t_1}$$

и в силу $S'_1 = S'_2 = \alpha$ получим

$$\alpha = \frac{\Delta S_1}{\Delta t_1}. \tag{17}$$

Решения задач I-2 практически означают, что для построения кубических сплайнов можно пользоваться только краевыми условиями типа I. Пересчет краевых условий осуществляется следующим образом: строится сплайн $S_0(t)$ с краевыми условиями $S'_0(t_1) = 0$, $S'_0(t_n) = 0$, вычисляются $S''_0(t_1), S''_0(t_n)$, и по формулам (I2), (I4) или (I5),(I7) находятся необходимые значения первых производных.

Пусть вектор-функция $(x(t), y(t))$, где $x(t), y(t)$ - кубические сплайны, представляет параметрический кубический сплайн.

ЗАДАЧА 3. Пусть параметрический кубический сплайн $(x(t), y(t))$ задан таблицей $\{x_i, y_i\}$ при значениях параметра $\{t_i\}, i=\overline{1,n}$, и краевых условиях x'_1, x'_n, y'_1, y'_n. При каких значениях x'_1, x'_n, y'_1, y'_n для указанного сплайна $(x(t), y(t))$ одновременно удовлетворяются условия

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t_1} = \alpha, \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t_n} = \beta, \quad \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t_1} = \lambda, \quad \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t_n} = \mu,$$

где $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ - наперед заданные числа?

Представим первые производные в виде $x'_1 = k_1$, $y'_1 = k_1\cdot\alpha$, $x'_n = k_n$, $y'_n = k_n\cdot\beta$. Очевидно, что тем самым удовлетворяются условия для первых производных $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_1} = \alpha$, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_n} = \beta$. Из условий для вторых производных, используя представление для x'_1, x'_n, y'_1, y'_n, получим

$$y''_1 - \alpha\cdot x''_1 = \lambda\cdot k_1^2, \quad y''_n - \beta\cdot x''_n = \mu\cdot k_n^2. \tag{18}$$

Пусть $n \geq 3$. Разложение (8) для сплайнов $x(t)$, $y(t)$ запишем в виде

$$x(t) = x_0(t) + r_x(t) + l_x(t),$$

$$y(t) = y_0(t) + r_y(t) + l_y(t).$$

Согласно (10) получаем для сплайнов $r_x(t)$, $l_x(t)$, $r_y(t)$, $l_y(t)$ выражения для $r_x''(t_1)$, $l_x''(t_1)$, $r_x''(t_n)$, $l_x''(t_n)$, $r_y''(t_1)$, $l_y''(t_1)$, $r_y''(t_n)$, $l_y''(t_n)$:

$$\left.\begin{aligned} r_x''(t_1) &= -k_1\cdot\frac{4+2R_2}{\Delta t_1}, \quad & l_x''(t_1) &= -k_n\cdot\frac{2F_2}{\Delta t_1}, \\ r_x''(t_n) &= k_1\cdot\frac{2R_{n-1}}{\Delta t_{n-1}}, \quad & l_x''(t_n) &= k_n\cdot\frac{2F_{n-1}+4}{\Delta t_{n-1}}, \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

$$\left.\begin{aligned} r_y''(t_1) &= \alpha\cdot r_x''(t_1), \quad & l_y''(t_1) &= \beta\cdot l_x''(t_1), \\ r_y''(t_n) &= \alpha\cdot r_x''(t_n), \quad & l_y''(t_n) &= \beta\cdot l_x''(t_n). \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Подставив выражения (19), (20) в (18) и перегруппировав члены, получим

$$\left.\begin{aligned} &\lambda\cdot k_1^2 + (\beta-\alpha)\,\frac{2F_2}{\Delta t_1}\cdot k_n = y_0''(t_1) - \alpha\cdot x_0''(t_1), \\ &(\beta-\alpha)\cdot\frac{2R_{n-1}}{\Delta t_{n-1}}\cdot k_1 + \mu\cdot k_n^2 = y_0''(t_n) - \beta\cdot x_0''(t_n), \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

и окончательно для $\beta = \alpha$:

$$k_1^2 = \frac{1}{\lambda}\cdot G, \quad k_n^2 = \frac{1}{\mu}\cdot H, \qquad (22)$$

где $G = y_0''(t_1) - \alpha\cdot x_0''(t_1)$, $H = y_0''(t_n) - \beta\cdot x_0''(t_n)$, а для $\beta \neq \alpha$:

$$\left.\begin{aligned} &k_n = \frac{C}{B} - \frac{A}{B}\cdot k_1^2, \\ &(A^2E)\cdot k_1^4 + (-2A\cdot C\cdot E)\cdot k_1^2 + (B^2D)\cdot k_1 + (EC^2 - B^2F) = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

где

$$A=\lambda,\ B=(\beta-\alpha)\cdot\frac{2F_2}{\Delta t_1},\ C=y_0''(t_1)-\alpha\cdot x_0''(t_1),$$

$$E=\mu,\ D=(\beta-\alpha)\cdot\frac{2R_{n-1}}{\Delta t_{n-1}},\quad F=y_0''(t_n)-\beta\cdot x_0''(t_n).$$

Таким образом, решение задачи сводится к решению алгебраического уравнения четвертой степени. Практически задача решается следующим образом: по заданной таблице $\{x_i,y_i\}$ при значениях параметра $\{t_i\}$ для краевых условий $x_0'(t_1)=x_0'(t_n)=0$, $y_0'(t_1)=y_0'(t_n)=0$ строится сплайн $(x_0(t),\ y_0(t))$. Вычисляются $x_0''(t_1)$, $y_0''(t_1)$, $x_0''(t_n)$, $y_0''(t_n)$, и коэффициенты уравнения четвертой степени (23) и из решений (23) образуются возможные пары (k_1,k_n).

Для случая $n=2$, подставляя в (I8) значения для x_1'', x_2'', y_1'', y_2'', полученные согласно (I), имеем:

$$\lambda\cdot k_1^2+\frac{(\beta-\alpha)}{\Delta t_1}\cdot k_2=\frac{6}{\Delta t_1^2}\cdot(\Delta y_1-\alpha\cdot\Delta x_1),$$

$$\frac{(\beta-\alpha)}{\Delta t_1}\cdot k_1+\mu\cdot k_2^2=\frac{6}{\Delta t_1^2}(\Delta y_1-\beta\cdot\Delta x_1).$$

Откуда получаем (22) для случая $\beta=\alpha$, где

$$G=6\cdot\left(\frac{\Delta y_1}{\Delta t_1^2}-\alpha\cdot\frac{\Delta x_1}{\Delta t_1^2}\right),\quad H=6\cdot\left(\frac{\Delta y_1}{\Delta t_1^2}-\beta\cdot\frac{\Delta x_1}{\Delta t_1^2}\right),$$

и (23) для случая $\beta\neq\alpha$, где

$$A=\lambda,\quad B=\frac{\beta-\alpha}{\Delta t_1},\quad C=6\cdot\frac{\Delta y_1}{\Delta t_1^2}-6\cdot\alpha\cdot\frac{\Delta x_1}{\Delta t_1^2},$$

$$E=\mu,\quad D=\frac{\beta-\alpha}{\Delta t_1},\quad F=6\cdot\frac{\Delta y_1}{\Delta t_1^2}-6\cdot\beta\cdot\frac{\Delta x_1}{\Delta t_1^2}.$$

ЗАДАЧА 4. Пусть параметрический кубический сплайн $(x(t),\ y(t))$ задан таблицей $\{x_i,\ y_i\}$ при значениях параметра $\{t_i\}$, $i=\overline{1,n}$, и краевых условиях x_1', x_n', y_1', y_n'. При каких значениях x_1', x_n', y_1', y_n' для сплайна $(x(t),y(t))$ одновременно удовлетворяются $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t_1}=\alpha$, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t_n}=\beta$, $\frac{1}{R(t_1)}=\lambda$, $\frac{1}{R(t_n)}=\mu$, где α,β,λ,μ – наперед заданные числа, $R(t)$ – радиус кривизны.

Рассмотрим случай $n \geq 3$. Представим первые производные в виде $x_1' = k_1$, $x_n' = k_n$, $y_1' = k_1 \cdot \alpha$, $y_n' = k_n \cdot \beta$, что обеспечивает выполнение условий задачи для первых производных. Из условий для кривизн :

$$y_1'' - \alpha \cdot x_1'' = \lambda_* \cdot (1 + \alpha^2)^{3/2} \cdot k_1^2 ,$$

$$y_n'' - \beta \cdot x_n'' = \mu_* \cdot (1 + \beta^2)^{3/2} \cdot k_n^2 ,$$

где $\lambda_* = \lambda \cdot \mathrm{sign}(y_1'' - \alpha \cdot x_1'')$, $\mu_* = \mu \cdot \mathrm{sign}(y_n'' - \beta \cdot x_n'')$. Откуда, учитывая (19), (20), аналогично задаче 3 получаем

$$\left. \begin{aligned} \lambda_* \cdot k_1^2 \cdot (1 + \alpha^2)^{3/2} + (\beta - \alpha) \frac{2F_2}{\Delta t_1} k_n &= y_0''(t_1) - \alpha \cdot x_0''(t_1), \\ (\beta - \alpha) \cdot \frac{2R_{n-1}}{\Delta t_{n-1}} \cdot k_1 + \mu_* \cdot k_n^2 \cdot (1 + \beta^2)^{3/2} &= y_0''(t_n) - \beta \cdot x_0''(t_n), \end{aligned} \right\} \tag{24}$$

и окончательно для $\beta = \alpha$:

$$k_1^2 = \frac{1}{\lambda_*} \cdot G, \quad k_n^2 = \frac{1}{\mu_*} \cdot H, \tag{25}$$

где

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{(1+\alpha^2)^{3/2}} \cdot [y_0''(t_1) - \alpha \cdot x_0''(t_1)], \\ H &= \frac{1}{(1+\beta^2)^{3/2}} \cdot [y_0''(t_n) - \beta \cdot x_0''(t_n)], \end{aligned} \tag{26}$$

а для $\beta \neq \alpha$:

$$k_n = \frac{C}{B} - \frac{A}{B} \cdot k_1^2, \tag{27}$$

$$(A^2 E) \cdot k_1^4 - (2 \cdot A \cdot C \cdot E) \cdot k_1^2 + (B^2 D) \cdot k_1 + (E \cdot C^2 - B^2 F) = 0, \tag{28}$$

где

$$A = \lambda_* \cdot (1 + \alpha^2)^{3/2}, \quad B = (\beta - \alpha) \cdot \frac{2F_2}{\Delta t_1}, \quad C = y_0''(t_1) - \alpha \cdot x_0''(t_1),$$

$$E = \mu_* \cdot (1+\beta^2)^{3/2}, \quad D = (\beta-\alpha)\cdot\frac{2R_{n-1}}{\Delta t_{n-1}}, \quad F = y_0''(t_n) - \beta\cdot x_0''(t_n).$$

Таким образом, как и в задаче 3, решение сводится к решению алгебраического уравнения четвертой степени. Практически задача решается следующим образом: по заданной таблице $\{x_i, y_i\}$ при значениях параметра $\{t_i\}$ для граничных условий $x_0'(t_1) = x_0'(t_n) = 0$, $y_0'(t_1) = y_0'(t_n) = 0$ строится сплайн $(x(t), y(t))$. Вычисляются $x_0''(t_1), y_0''(t_1), x_0''(t_n), y_0''(t_n)$ и коэффициенты уравнений четвертой степени (28), причем рассматриваются четыре случая $\lambda_* = \lambda$, $\mu_* = \mu$; $\lambda_* = -\lambda$, $\mu_* = \mu$; $\lambda_* = \lambda$, $\mu_* = -\mu$; $\lambda_* = -\lambda$, $\mu_* = -\mu$. Из решений уравнений (27), (28) образуются возможные пары (k_1, k_n).

Рассмотрим случай, когда касательный вектор к графику параметрического кубического сплайна в точке, задаваемой значением t_1, образует с абсциссой в заданной декартовой системе координат угол 90^0 или -90^0. Представим первые производные в граничных точках в виде $x_1' = 0$, $y_1' = k_1$, $x_n' = k_n$, $y_n' = k_n\cdot\beta$.

Из условий для кривизн с учетом выбранных x_1', y_1', x_n', y_n' получаем (27), (28), где

$$\left.\begin{aligned}
&A = -\lambda_*, \quad B = \frac{2F_2}{\Delta t_1}, \quad C = x_0''(t_1), E = \mu_*\cdot(1+\beta^2)^{3/2},\\
&D = -\frac{2R_{n-1}}{\Delta t_{n-1}}, \quad F = y_0''(t_n) - \beta\cdot x_0''(t_n),\\
&\lambda_* = \lambda\cdot\mathrm{sign}(-x_1''), \quad \mu_* = \mu\cdot\mathrm{sign}(y_n''-\beta\cdot x_n'').
\end{aligned}\right\} \quad (29)$$

Для случая "вертикальной" касательной к графику параметрического кубического сплайна в точке t_n, представляя первые производные в граничных точках в виде $x_1'=k_1$, $y_1'=k_1\cdot\alpha$, $x_n' = 0$, $y_n' = k_n$, получаем аналогично предыдущему (27), (28), где

$$\left.\begin{aligned}
&A = \lambda_*\cdot(1+\alpha^2)^{3/2}, \quad B = \frac{2F_2}{\Delta t_1}, \quad C = y_0''(t_1) - \alpha\cdot x_0''(t_1),\\
&E = \mu_*, \quad D = -\frac{2R_{n-1}}{\Delta t_{n-1}}, \quad F = x_0''(t_n),\\
&\lambda_* = \lambda\cdot\mathrm{sign}(y_1''-\alpha\cdot x_1''), \quad \mu_* = \mu\cdot\mathrm{sign}(-x_n'').
\end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Для случая "вертикальных" касательных в двух концевых точках сплайна, полагая $x_1' = 0$, $y_1' = k_1$, $x_n'=0$, $y_n' = k_n$, получаем из условий для кривизн

$$k_1^2 = \frac{|x_0''(t_1)|}{\lambda}, \quad k_n^2 = \frac{|x_0''(t_n)|}{\mu}. \tag{31}$$

Случай $n=2$ рассматривается, как и в задаче 3. Если $x_1' = k_1$, $y_1' = k_1 \cdot \alpha$, $x_2' = k_2$, $y_2' = k_2 \cdot \beta$, то при $\beta = \alpha$ используется (25), где

$$\left.\begin{aligned} & G = \frac{6}{(1+\alpha^2)^{3/2} \cdot \Delta t_1^2}(\Delta y_1 - \alpha \cdot \Delta x_1), \quad H = -\frac{6}{(1+\beta^2)^{3/2} \cdot \Delta t_1^2}(\Delta y_1 - \beta \cdot \Delta x_1), \\ & \lambda_* = \lambda \cdot \mathrm{sign}(y_1'' - \alpha \cdot x_1''), \quad \mu_* = \mu \cdot \mathrm{sign}(y_2'' - \beta \cdot x_2''), \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

при $\beta \neq \alpha$ используется (27),(28), где

$$\left.\begin{aligned} & A = \lambda_* \cdot (1+\alpha^2)^{3/2}, \quad B = -\frac{2}{\Delta t_1} \cdot (\alpha - \beta), \quad C = \frac{6}{\Delta t_1^2} \cdot (\Delta y_1 - \alpha \cdot \Delta x_1), \\ & E = -\mu_* \cdot (1+\beta^2)^{3/2}, \quad D = -\frac{2}{\Delta t_1} \cdot (\alpha - \beta), \quad F = \frac{6}{\Delta t_1^2} \cdot (\Delta y_1 - \beta \cdot \Delta x_1), \\ & \lambda_* = \lambda \cdot \mathrm{sign}(y_1'' - \alpha \cdot x_1''), \quad \mu_* = \mu \cdot \mathrm{sign}(y_2'' - \beta \cdot x_2''). \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Если $x_1' = 0$, $y_1' = k_1$, $x_2' = k_2$, $y_2' = k_2 \cdot \beta$, то решением является (27),(28), где

$$\left.\begin{aligned} & A = \lambda_*, \quad B = -\frac{2}{\Delta t_1}, \quad C = -\frac{6}{\Delta t_1^2} \cdot \Delta x_1, \\ & E = \mu_* \cdot (1+\beta^2)^{3/2}, \quad D = -\frac{2}{\Delta t_1}, \quad F = \frac{6}{\Delta t_1^2} \cdot (\Delta y_1 - \beta \cdot \Delta x_1), \\ & \lambda_* = \lambda \cdot \mathrm{sign}(-x_1''), \quad \mu_* = \mu \cdot \mathrm{sign}(y_2'' - \beta \cdot x_2''). \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Если $x_1' = k_1$, $y_1' = k_1 \cdot \alpha$, $x_2' = 0$, $y_2' = k_2$, то решением является (27),(28), где

$$\left.\begin{aligned} & A = \lambda_* \cdot (1+\alpha^2)^{3/2}, \quad B = \frac{2}{\Delta t_1}, \quad C = \frac{6}{\Delta t_1^2}(\Delta y_1 - \alpha \cdot \Delta x_1), \\ & E = \mu_*, \quad D = \frac{2}{\Delta t_1}, \quad F = 6 \cdot \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1^2}, \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

$$\lambda_* = \lambda \cdot \operatorname{sign}(y_1'' - \alpha \cdot x_1''), \quad \mu_* = \mu \cdot \operatorname{sign}(-x_2'').$$

Если $x_1' = 0$, $y_1' = k_1$, $x_2' = 0$, $y_2' = k_2$, то

$$k_1^2 = \frac{6\,|\Delta x_1|}{\Delta t_1^2 \cdot \lambda}, \quad k_2^2 = \frac{6|\Delta x_1|}{\Delta t_1^2 \cdot \mu}. \tag{36}$$

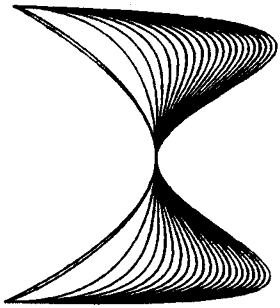

Рис.I

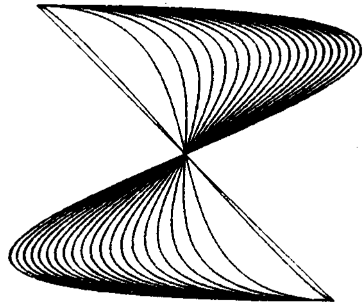

Рис.2

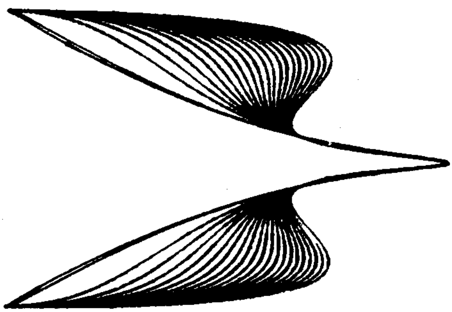

Рис. 3

Отметим, что два уравнения системы (24) задают при $\alpha \neq \beta$ параболы в системе координат $k_1 \theta\, k_n$, причем первое уравнение задает параболу с осью θk_n, а второе – параболу с осью θk_1. Очевидно, среди пар (λ, μ), $(-\lambda, \mu)$, $(-\lambda, -\mu)$, $(\lambda, -\mu)$ всегда существует пара, обеспечивающая пересечение данных парабол (смена знака λ или μ – изменение ориентации параболы). Таким образом, решение системы (24) всегда существует. Будем называть решение системы (24) допустимым, если для соответствующих k_1, k_n выполняются равенства $\operatorname{sign} k_1 = \operatorname{sign} \Delta x_1$, $\operatorname{sign} k_n = \operatorname{sign} \Delta x_{n-1}$. (В случае "вертикальной" каса-

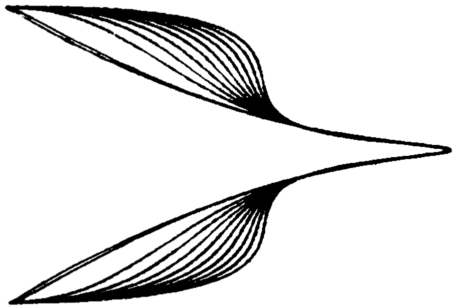

Рис.4

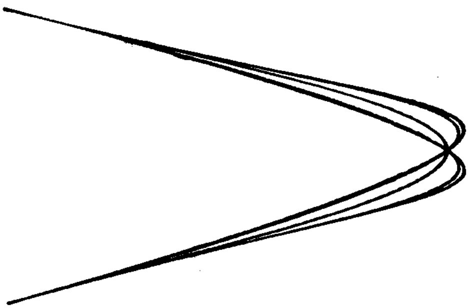

Рис.5

тельной к граничной точке, например слева, полагается, что $\operatorname{sign} k_1 = \operatorname{sign} \Delta y_1$, $\operatorname{sign} k_n = \operatorname{sign} \Delta x_{n-1}$.) Для практических задач интерес представляют только допустимые решения, так как другие заведомо противоречат направлениям касательных векторов в граничных точках, указанным в исходной таблице $\{x_i, y_i\}$ (считается, что таблица $\{x_i, y_i\}$ достаточно полная).

Задача 4, таким образом, может иметь единственное допустимое решение, например при $\alpha = \beta$, или несколько допустимых решений. Не исключается случай отсутствия допустимого решения.

На рис.I–3 изображены семейства кривых (22 кривые в каждом), представляющие графики параметрических кубических сплайнов, построенные для краевых условий $\alpha = \beta = 0$, радиусы кривизны на правом и левом концах совпадают: 0,00I; I,5I; I0I; I5I; ... I00I. На рис.I представлены сплайны, построенные по трем точкам $\{x_i\} = \{0,30,0\}$, $\{y_i\} = \{30,0,-30\}$, на рис.2 - по трем точкам $\{x_i\} = \{-30,0,30\}$, $\{y_i\} = \{30,0,-30\}$, на рис.3 - по пяти точкам $\{x_i\} = \{0,60,90,60,0\}$, $\{y_i\} = \{30,5,0,-5,-30\}$. На рис.4 изображены первые II кривых из семейства, приведенного на рис.3. На рис.5 представлены сплайны, построенные по трем точкам $\{x_i\} = \{0,90,0\}$, $\{y_i\} = \{30,0,-30\}$ для краевых условий $\alpha = -15^0$, $\beta = 15^0$ и радиуса кривизны I00I на обоих концах. В этом случае задача 4 имеет 5 решений.

Полученные результаты, очевидно, применимы и в случае кусочно-гладких параметрических кубических сплайнов для задания усло -

вий в точках нарушения гладкости (справа и слева). Аналогично задачам 3-4 (сплайны в плоскости) можно рассмотреть и сплайны в пространстве.

Литература

1. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. -М.: Наука, 1980. - 350 с.

Поступила в ред.-изд.отд.
9 июля 1984 года