СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИЯ И ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ
(Вычислительные системы)
1985 год Выпуск 108

УДК 681.3.06:519.65

ТОЧКИ, КРИВЫЕ И ОБЛАСТИ НА ПОВЕРХНОСТИ

В.А.Скороспелов

В настоящей статье речь идет о специальных понятиях: "точка на кривой", "точка на поверхности", "линия на поверхности", "область на поверхности", которые введены в автоматизированной системе геометрических расчетов АСТРА [1] для обозначения соответствующих подмножеств множества точек кривой или поверхности. С помощью этих понятий устанавливается отношение принадлежности между объектами типа "точка", "кривая", "поверхность", что дает возможность при выполнении расчетов в рамках системы АСТРА естественным образом адресоваться к отдельным элементам указанных объектов. Очевидно, что понятие "точка на поверхности", например, более информативно, чем понятие "точка", поскольку первое не только определяет саму точку, но и соотносит с ней свойства поверхности в этой точке. Ниже рассматриваются конкретные способы реализации указанных понятий в системе АСТРА.

§1. Точка и кривая на поверхности

Пусть A – точка в трехмерном евклидовом пространстве и ее местоположение определено радиус-вектором $r_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$ относительно некоторой декартовой системы координат. Ее представление в таком виде соответствует типу "точка". Предположим теперь, что точка A принадлежит кривой G, заданной в той же системе координат вектор-функцией $\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_1 + y(t)\vec{e}_2 + z(t)\vec{e}_3$, $t \in [0,T]$, где $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ – орты координатных осей. Этот факт означает, что для некоторого t_0 имеет место равенство $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ и, следовательно, точке A можно поставить в соответствие ссылку на кривую G и значение параметра t_0. Будучи представленной такими данными, точка уже относится к типу "точка на кривой". Таким образом, с каждым типом связывается конкретный вид представления объекта.

Поясним на простом примере разницу в использовании объектов типа "точка" и "точка на кривой". Во входном языке АСТРА имеются два оператора, определяющих точку как пересечение кривой G и плоскости PL. Запишем их в виде: A = ТОЧ (G,PL); B = ТОЧК(G,PL). Оба оператора описывают одну и ту же точку в пространстве, но в первом случае она относится к типу "точка" и представляется радиус-вектором $\vec{r}_0$, во втором - к типу "точка на кривой", и с ней связываются ссылка на кривую G и параметр t_0: $\{\langle G\rangle, t_0\}$. Обратимся теперь к оператору, который определяет вектор как касательный вектор кривой G в точке B:V= ВЕКТ (G , B) . Несмотря на то, что точки A и B в геометрическом смысле тождественны, использование точки A в этом операторе недопустимо. Причина кроется в неразрешимости самой задачи. Действительно, для B вектор V единственный и определяется соотношением $\vec{V} = \vec{r}'(t_0)/|\vec{r}'(t_0)|$. Для точки A такой вектор не существует в силу того, что векторное уравнение $\vec{r}(t_0)=\vec{r}_0$ относительно параметра t_0, вообще говоря, не имеет решений из-за погрешности в определении $\vec{r}_0$.

Если точка A принадлежит поверхности P, заданной параметризацией $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, $u,v \in \Omega$: $[0\le u\le U,\ 0\le v\le V]$, то она может быть определена как "точка на поверхности" и тогда будет представлена данными $\{\langle P\rangle, u_0, v_0\}$.

Отметим, что возможны следующие операции преобразования типов: "точка на кривой" → "точка", "точка на поверхности" → "точка". Обратные преобразования не определены.

Кривая G, отнесенная к типу "кривая", в системе АСТРА определяется как множество точек пространства, удовлетворяющих уравнению $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [0,T]$. Если же она лежит на поверхности P, то в области параметров Ω ей соответствует линия g, представимая уравнением $\vec{R} = \vec{R}(t) = u(t)\vec{e}_u + v(t)\vec{e}_v$. В этом случае G можно определить уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$, $t \in [0,T]$, как множество точек поверхности P, отвечающее линии g, что соответствует типу "линия на поверхности". Процедура расчета ее точек состоит в последовательном вычислении для заданного параметра t^* сначала значений $u^* = u(t^*)$, $v^* = v(t^*)$, а затем - радиус-вектора $\vec{r}^* = \vec{r}(u^*, v^*)$.

Рассмотрим некоторые вопросы численного моделирования "линии на поверхности". Обычно она задается как линия G пересечения двух поверхностей. В [3] изложен алгоритм численного решения этой задачи в случае, когда результат относится к типу "кривая". В его основе лежит сплайн-интерполяция с заданной точностью искомой кривой. Основная идея алгоритма состоит в том, что рассчитывается только конечное число точек линии G, а затем путем интерполяции восстанавливается вся кривая. Количество точек (узлов интерполяции), а также шаг между ними автоматически выбираются такими, чтобы обеспечивалась заданная точность восстановления E. Заметим, что рассчитанная таким способом кривая, вообще говоря, не лежит на поверхностях, но расположена в их E-окрестностях. Для того, чтобы пересечение поверхностей представить в виде "линии на поверхности", этот алгоритм следует применить теперь не к самой искомой кривой G, а к ее прообразу g, например, в области параметров Ω одной из поверхностей P. При этом алгоритм модифицируется следующим образом.

I. Необходимая точность ε приближения кривой g выбирается в зависимости от допустимой погрешности E расчета линии пересечения. С этой целью воспользуемся представлением вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ - параметризации поверхности P - в виде ряда Тейлора в окрестности произвольной точки $\vec{R} = \{u,v\} \in \Omega$: $\vec{r}(u + \Delta u, v + \Delta v) = \vec{r}(u,v)+\vec{r}_u\Delta u+\vec{r}_v\Delta v + \dots$. Ограничимся первыми тремя членами ряда и рассмотрим направление $\vec{n}$, нормальное к кривой g. Если принять, что $\vec{R} = \vec{R}(s)$, $s\in [0,S]$ - естественная параметризация g, тогда $\vec{R}'(s)=\{u'(s),v'(s)\}$ - орт касательного вектора и $\vec{n} = \{v'(s), -u'(s)\}$. Величина $\vec{R}'(s)$ находится путем разложения касательного вектора $\vec{H}$ к кривой G по векторам репера $(\vec{r}_u,\vec{r}_v)$: $\vec{H}'= \delta(\vec{r}_u u'+\vec{r}_v v')$, где $\delta = \mathrm{const}$. Подставляя $\varepsilon\vec{n}$ в разложение, получим соотношение $|\Delta\vec{r}| = \varepsilon|\vec{r}_u v' - \vec{r}_v u'|$, где $\Delta\vec{r} = \vec{r}(u+\varepsilon v', v-\varepsilon u') - \vec{r}(u,v)$. Отсюда следует, что $\varepsilon \le E/|\vec{r}_u v' - \vec{r}_v u'|$. Для гладких поверхностей знаменатель выражения, стоящего справа, не обращается в нуль.

2. Следуя первоначальному алгоритму, для приближения кривой g воспользуемся эрмитовой интерполяцией кубическим параметрическим сплайном (V-сплайном) [I], предполагая при этом, что g имеет кусочно-дифференцируемую кривизну $k(s)$. Тогда, на основании известной оценки погрешности сплайн-интерполяции вектор-функции [I], для обеспечения требуемой точности приближения ε шаг Δs по параметру s кривой g должен удовлетворять соотношению

$$\Delta s \le 4\sqrt{\varepsilon/\|k\|_{[s,s+\Delta s]}},$$

где $\|k\|_{[s,s+\Delta s]} = \max\limits_{s\in[s,s+\Delta s]} |k(s)|$. Чтобы практически воспользоваться этим соотношением, длину дуги s заменим суммарной длиной хорд, величину $\|k\|_{[s,s+\Delta s]}$ - конечно-разностной аппроксимацией $k(s)$ по значениям $\vec{R}'(s)$ и $\vec{R}'(s+Ds)$, где Ds - пробный шаг из точки $\vec{r}_i(s)$ в точку $\vec{r}_{i+1}(s+Ds)$ кривой G, а в качестве ε принимаем $\min\{\varepsilon(s),\varepsilon(s+\Delta s)\}$.

Таким образом, поверхность P и эрмитов V-сплайн, приближающий кривую g с точностью ε, описывают искомую кривую G с точностью E, как "линию на поверхности".

§2. Область на поверхности

В системе АСТРА определены два типа областей на поверхности. К первому отнесены области, ограниченные координатными линиями поверхности. Они представляются ссылкой на поверхность и пределами изменения параметров: $\{\langle P\rangle, u_н, v_н, u_к, v_к\}$. Ко второму типу отнесены замкнутые односвязные области, ограниченные сложными, вообще говоря, кусочно-гладкими кривыми. О них и пойдет далее речь.

Пусть G - кривая, ограничивающая область W на поверхности P. В области Ω параметров (u,v) поверхности P им соответствуют область w и линия g - граница этой области. Пусть $\vec{R} = \vec{R}(t,s) = u(t,s)\vec{e}_u + v(t,s)\vec{e}_v$, $t,s \in \omega$: $[0 \le t \le T,\ 0 \le s \le S]$, - некоторая параметризация w. Тогда область W представляется как "область на поверхности" ссылкой на поверхность P и ссылкой на плоскую область w: $\{\langle P\rangle, \langle w\rangle\}$. Таким образом, выделение области на поверхности P состоит в определении ограничивающей линии в виде "линии на поверхности", а затем в построении отображения прямоугольника ω в плоскости параметров (t,s) на область w. Первая задача уже рассмотрена в §I. Построение отображающей функции $\vec{R} = \vec{R}(t,s)$ в общем случае представляется довольно сложной задачей. Однако для значительного числа областей, встречающихся в инженерных расчетах, можно указать ряд простых приемов получения таких отображений. Задача облегчается тем, что на отображающую функцию, как правило, накладывается единственное условие - взаимная однозначность отображения. В некоторых случаях, как, например, при расчете траектории инструмента для обработки сложных областей, это требование распространяется только на некоторую окрестность границы области. Рассмотрим несколько примеров, когда отображающая функция $\vec{R}(t, s)$ может быть получена сравнительно легко.

I. Область w представляет собой криволинейный четырехугольник, две противолежащие стороны которого - отрезки прямых, параллельных одной из координатных осей, две другие - g_1, g_2 - отрезки дуг, однозначно проецируемые на ось u (рис.I). Последние представляются функциональными зависимостями:

$$g_1: v = v_1(u); \quad g_2: v = v_2(u); \quad u \in [u_H, u_K] .$$

Тогда отображающую функцию $\vec{R}(t,s) = \{u(t,s), v(t,s)\}$ можно взять в виде $u(t,s) = u_H(1-t) + u_K t$, $v(t,s) = v_1(t)(1-s) + v_2(t)s$, $0 \le t, s \le 1$. Если $v_2(t) - v_1(t) \ne 0$ для всех $t \in [0,1]$, то якобиан, соответствующий этим выражениям,

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(t,s)} = \begin{vmatrix} u_K - u_H & , \quad 0 \\ v_1'(t)(1-s)+v_2'(t)s, & v_2(t)-v_1(t) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля и, следовательно, $\vec{R}(t,s)$ определяет взаимно-однозначное и непрерывное соответствие между точками области w и единичного прямоугольника ω. Отметим, что рассмотренный прием распространяется на области, у которых одна прямолинейная граница или обе стягиваются в точку (рис.2,3).

2. Пусть w - область, звездная относительно точки R_0, и g - ее граница (рис.4), т.е. существует такая внутренняя точка $\vec{R}_0 = \{u_0, v_0\} \in w$, что любой исходящий из нее луч пересекает границу g только один раз. Отображение прямоугольника на такую область можно определить в виде: $\vec{R} = \vec{R}_1(s)(1-t) + \vec{R}_0 t$, $0 \le t, s \le 1$, где $\vec{R}_1(s) = \{u_1(s), v_1(s)\}$ - параметризация линии g. Якобиан, соответствующий этому отображению,

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(t,s)} = \begin{vmatrix} u_0 - u_1(s), & u_1'(s) \\ v_0 - v_1(s), & v_1'(s) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Поиск точки $\vec{R}_0$ наиболее трудный момент построения отображения областей такого типа. Иногда такой точкой может служить "центр тяжести" кривой g:

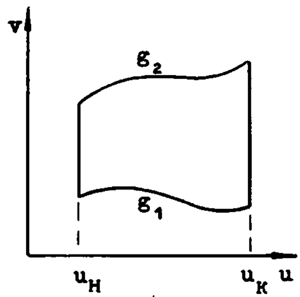

Рис.I

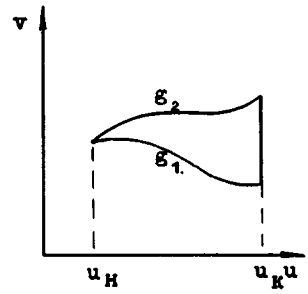

Рис.2

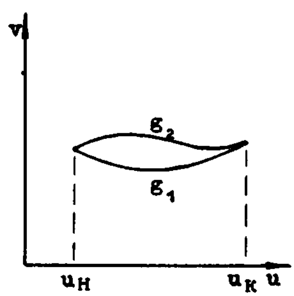

Рис.3

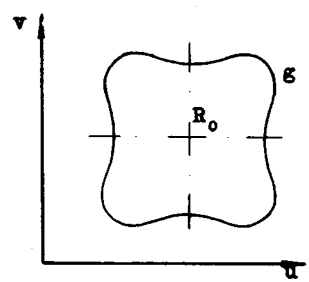

Рис.4

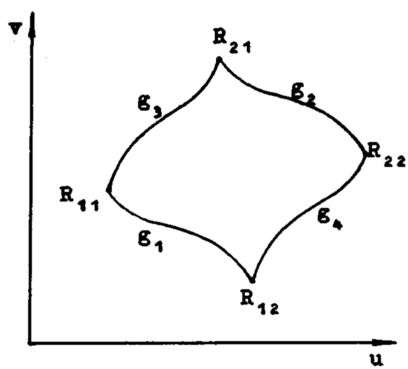

Рис.5

$$\vec{R}_0 = \frac{1}{L}\int_0^1 \vec{R}_1(s)\,|\vec{R}_1'(s)|\,ds,$$

где L – длина кривой g.

3. Пусть область w представляет собой криволинейный четырехугольник, ограниченный гладкими дугами g_1, g_2, g_3, g_4 (рис.5). Соответствие точек этой области и прямоугольника ω можно задать выражением, которое в матричной форме имеет вид:

$$\vec{R}(t,s) = -[-1,(1-t),t]\begin{bmatrix} 0 & \vec{R}_1(t) & \vec{R}_2(t) \\ \vec{R}_3(s) & \vec{R}_{11} & \vec{R}_{12} \\ \vec{R}_4(s) & \vec{R}_{21} & \vec{R}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1-s \\ s \end{bmatrix},$$

где $\vec{R}_1(t), \vec{R}_2(t), \vec{R}_3(s), \vec{R}_4(s)$, $0 \le t,\ s \le 1$, – параметризации граничных дуг g_1, g_2, g_3, g_4. Вопрос о взаимной однозначности этого отображения решается в каждом конкретном случае путем исследования якобиана.

Иногда сложную область удается разбить на подобласти, к каждой из которых можно применить рассмотренные приемы. Для некоторых практических задач этого бывает достаточно.

В заключение отметим, что введение рассмотренных здесь понятий обеспечивает математическую строгость в постановке и решении геометрических задач, однако за это приходится расплачиваться дополнительными вычислительными затратами. Например, расчет точки, принадлежащей "области на поверхности", приблизительно вдвое более трудоемок, чем вычисление точки на поверхности.

Литература

1. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., ЛЕУС В.А., СКОРОСПЕЛОВ В.А. Сплайны в инженерной геометрии.- М.: Машиностроение,1985.-223 с.

2. ГАМИДОВ В.М. Система автоматизации геометрических расчетов и ее входной язык.- В кн.: Сплайн-функции в инженерной геометрии (Вычислительные системы, вып.86). Новосибирск,1981,с.70-82.

3. ВАЙСБЕРГ Г.В., СКОРОСПЕЛОВ В.А.,ТУРУК П.А. Алгоритмы решения задач в системе автоматизации геометрических расчетов.-Там же, с.60-69.

Поступила в ред.-изд.отд.
31 мая 1985 года