МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И АРХИТЕКТУРНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ
(Вычислительные системы)
1985 год Выпуск I09

УДК 681.3.06

СОВМЕСТИМОСТЬ ПАРАМЕТРИЗОВАННОЙ ПЕРЕДАЧИ ПАРАМЕТРА И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СПЕЦИФИКАЦИЯХ

А.В.Проскурин

Введение

Алгебраические спецификации, развиваемые в ряде языков спецификаций (CLEAR [I], ORDINARY [2], LOOK [3], ACT ONE [4],МАРС [5] и др.), поддерживают иерархическое модульное построение программ и программных систем посредством последовательного уточнения. Основными средствами структурализации алгебраических спецификаций являются параметризация и представление ("абстрактная реализация"), а также операции над спецификациями типа объединения [I,6,7,9-II]. Эти средства должны гарантировать корректность построения спецификаций по корректным спецификациям в двух направлениях - "вертикальном" (последовательное уточнение спецификаций) и "горизонтальном" (развитие структуры спецификаций). Основное методологическое требование процесса построения - совместимость этих направлений ("двойной закон" [7] или "двумерная совместимость" [11]): представление составной спецификации не зависит от порядка представления ее подспецификаций и может быть получено единственным применением операции представления.

Для семантики инициальной алгебры алгебраических спецификаций механизмы параметризации и представления развиваются в рамках совместного проекта АСТ (Технический университет, Западный Берлин, и Исследовательский центр им.Т.Уотсона фирмы IBM) [8-II]. Эта семантика имеет, в ряде случаев, операционную интерпретацию посредством систем подстановок термов (ориентированных равенств). В [8] предложен механизм параметризации спецификаций для стандартной и параметризованной передач параметров, обобщенный в [10] на условия для фактических параметров, которые формулируются на логико-математическом языке высокого уровня. Механизм представления спецификаций [9] обобщен в [11] на параметризованные спецификации в смысле [10] и стандартную передачу параметра. Пусть, например, дано представление параметризованной спецификации типа данных "бинарное дерево" посредством параметризованной спецификации типа данных "цепочка со скобками", ПРЕД: цепскоб(элем) → биндер(элем), где элем – спецификация общего формального параметра. Стандартная передача параметра позволяет заменить элем спецификацией фактического параметра, например, типа данных цел, индуцируя представление ПРЕД': цепскоб(цел) → биндер(цел). Основной результат [11] показывает, что стандартная передача параметра совместима с представлением, т.е. коммутативна следующая диаграмма:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
\text{цепскоб(элем)} \arrow[r, Rightarrow, "\text{параметризованное представление}", "\text{ПРЕД}"'] \arrow[d, Rightarrow, "\text{передача параметра}"'] & \text{биндер(элем)} \arrow[d, Rightarrow, "\text{передача параметра}"] \\
\text{цепскоб(цел)} \arrow[r, Rightarrow, "\text{индуцированное представление}", "\text{ПРЕД}'"'] & \text{биндер(цел)}
\end{tikzcd}
$$

В предлагаемой статье результаты [11] обобщены на параметризованную передачу параметра в смысле [8]. Например, корректное представление ПРЕД: цепочка(элем) → множество(элем) и параметризованная передача параметра элем → стэк парам индуцируют корректное представление ПРЕД: цепочка • стэк(парам) → множество • стэк (парам).

Эти результаты используются в языке спецификаций МАРС (Модульные алгебраические спецификации), проектируемом автором в рамках совместного проекта университетов Ленинграда и Гамбурга "Разработка смешанного языка для процедурного и непроцедурного программирования" (предварительное описание см. в [5]).

§ 1. Определения и обозначения

Математическим аппаратом теории алгебраических спецификаций являются универсальная алгебра и теория категорий (см., например, [12-14]). Напомним стандартную терминологию многоосновных алгебр, придерживаясь обозначений [8-11]:

(S-основная) сигнатура $\Sigma = \langle S, \Sigma \rangle$ состоит из множества символов основ (англ. sorts) $S = \{s\}_{s\in S}$ и $(S^* \times S)$-индексированного семейства символов операций $\Sigma = \{\Sigma_{w,s}\}_{w\in S^*, s\in S}$. Элементы $\Sigma_{\lambda,s}$, $s \in S$, называются константами сигнатуры Σ.

Многоосновная алгебра сигнатуры Σ, или (Σ-)алгебра A, состоит из семейства $\{A_s\}_{s\in S}$ (A_s - носитель алгебры A основы s) и множества операций $\sigma_A \in A$ (констант алгебры A) для всех $\sigma \in \Sigma_{\lambda,s}$ и $\sigma_A: A_{s_1} \times \ldots \times A_{s_n} \to A_s$ для всех $\sigma \in \Sigma_{s_1\ldots s_n, s}$.

Для Σ-алгебр A и A' Σ-гомоморфизм $h: A \to A'$ состоит из семейства функций $\{h_s: A_s \to A'_s\}_{s\in S}$, сохраняющих операции алгебр, т.е.

$$h_s(\sigma_A(a_1,\ldots,a_n)) = \sigma_{A'}(h_{s_1}(a_1),\ldots,h_{s_n}(a_n))$$

для всех $\sigma\in\Sigma_{s_1\ldots s_n, s}$, $a_i \in A_{s_i}$ $(i = 1,\ldots, n)$. При $n = 0$ функция $h_s(\sigma_A) = \sigma_{A'}$, для всех $\sigma \in \Sigma_{\lambda,s}$.

Σ-изоморфизмом называется биективный Σ-гомоморфизм. Σ-алгебры A и A' изоморфны ($A \cong A'$), если существует Σ-изоморфизм $h: A \to A'$ (и, следовательно, обратный Σ-изоморфизм $h^{-1}: A' \to A$).

Множества Σ-термов основы s ($s \in S$) с переменными из семейства $X = \{X_s\}_{s\in S}$, $T_\Sigma(X)_s$, определяются одновременной рекурсией для всех $s\in S$: 1) $\sigma \in T_\Sigma(X)_s$ для всех $\sigma \in \Sigma_{\lambda,s}$; 2) $x\in T_\Sigma(X)_s$ для всех $x \in X_s$; 3) $\sigma(t_1,\ldots,t_n) \in T_\Sigma(X)_s$ для всех $\sigma \in \Sigma_{s_1\ldots s_n, s}$, где $t_i\in T_\Sigma(X)_{s_i}$ $(i = 1,\ldots, n)$.

Равенства вида $e = (L,R)$, или, в обычной записи, $L = R$, образованы парами Σ-термов основы $s \in S$ (с переменными).

(Алгебраическая) спецификация, СПЕЦ = $\langle S, \Sigma, E \rangle$, состоит из сигнатуры $\langle S,\Sigma \rangle$ и семейства $E = \{E_s\}_{s\in S}$, где E_s - множество равенств термов основы s.

Алгебра Σ-термов $T_\Sigma(X)$ с переменными из X определяется семейством носителей $\{T_\Sigma(X)_s\}_{s\in S}$, константами $\sigma_T := \sigma$ для всех $\sigma\in\Sigma_{\lambda,s}$ и операциями σ_T для всех $\sigma \in \Sigma_{s_1\ldots s_n, s}$ $\sigma_T(t_1,\ldots,t_n) := \sigma(t_1,\ldots,t_n)$. Для произвольного присваивания $h: X \to A$ переменным из X элементов Σ-алгебры A существует единственный Σ-гомоморфизм $\tilde{h}: T_\Sigma(X) \to A$ (оценка термов), продолжающий h. Для $X = \emptyset$ будем писать $eval: T_\Sigma \to A$, где $T_\Sigma := T_\Sigma(\emptyset)$. Σ-алгебра A удовлетворяет E, если для всех $e = (L,R)$ из E_s, где $s \in S$, и всех присваиваний $h: X \to A$ $\tilde{h}_s(L) = \tilde{h}_s(R)$ в A. Σ-алгебры, удовлетворяющие E, называются $\langle S, \Sigma, E \rangle$- или СПЕЦ-*алгебрами*. Множество всех СПЕЦ-алгебр образует категорию $\underline{Алг}_{СПЕЦ}$, с морфизмами - гомоморфизмами СПЕЦ-алгебр.

Определения терминов теории категорий см. в [13,14].

При СПЕЦ = $\langle S, \Sigma, E \rangle \subseteq$ СПЕЦ' (покомпонентно) **СПЕЦ - часть** $A_{СПЕЦ}$ СПЕЦ'-алгебры A определяется следующим образом: $(A_{СПЕЦ})_s = A_s$ для всех $s \in S$ и $\sigma_{A_{СПЕЦ}} = \sigma_A$ для всех $\sigma \in \Sigma$. *Комбинация* вида СПЕЦ' = СПЕЦ + $\langle S', \Sigma', E' \rangle$ означает, что S и S' - дизъюнктны, Σ' состоит из символов операций над $S + S'$, отличных от Σ, а E' - семейство равенств термов в сигнатуре $\langle S + S', \Sigma + \Sigma' \rangle$.

Спецификация СПЕЦ определяет *абстрактный тип данных* как некоторый подкласс $\underline{Алг}_{СПЕЦ}$. В этой статье рассматривается *семантика инициальной алгебры* спецификации СПЕЦ: абстрактные типы данных моделируются *классами изоморфизма инициальной алгебры* категории $\underline{Алг}_{СПЕЦ}$. СПЕЦ-алгебра A называется *инициальной алгеброй* категории $\underline{Алг}_{СПЕЦ}$, если для произвольной СПЕЦ-алгебры B существует единственный Σ-гомоморфизм $h: A \to B$. Инициальность алгебры A эквивалентна следующим двум условиям: 1) все носители A конечно-порождены операциями A, т.е. алгебра A *достижима*; 2) два терма именуют один и тот же элемент A тогда и только тогда, когда равенство этих термов выводимо из аксиом E. Все инициальные алгебры категории $\underline{Алг}_{СПЕЦ}$ изоморфны. Следовательно, данное определение абстрактных типов данных не зависит от выбора инициальной алгебры.

Стандартное представление инициальной алгебры категории $\underline{Алг}_{СПЕЦ}$, $T_{СПЕЦ}$ определяется факторизацией T_Σ по наименьшей конгруэнции $\equiv_E$, порожденной равенствами E: $T_{СПЕЦ} = T_\Sigma/\equiv_E$. Конгруэнция $\equiv_E$, или, точнее, $\equiv_{СПЕЦ}$, определяется как наименьшее замыкание отношения, состоящего из всех пар $(h_s(L), h_s(R))$, где $s \in S$, $(L,R) \in E_s$ и $h: X \to T_\Sigma$, относительно порождения Σ-термов. Для произвольной СПЕЦ-алгебры B единственный Σ-гомоморфизм $h: T_{СПЕЦ} \to B$ определяется посредством $h([t]) = eval(t)$ для всех Σ-термов t.

§ 2. Параметризованная передача параметра

Содержание этого параграфа основано на работе [8], в которой даны интерпретация и мотивировка вводимых определений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Параметризованный тип данных, ПТД = ⟨ СПЕЦ, СПЕЦ1, Т ⟩, состоит из спецификации параметра СПЕЦ = ⟨ S, Σ, E⟩, спецификации результата СПЕЦ1 = СПЕЦ + ⟨ S1, Σ1, E1 ⟩ и функтора T: $\underline{Алг}_{СПЕЦ} \to \underline{Алг}_{СПЕЦ1}$. Параметризованный тип данных называется устойчивым (сильно устойчивым), если функтор Т устойчив (сильно устойчив), т.е. для всех СПЕЦ-алгебр A $V(T(A)) \cong A$ $(V(T(A)) = A)$, где $V : \underline{Алг}_{СПЕЦ1} \to \underline{Алг}_{СПЕЦ}$ – пренебрегающий функтор, или, ввиду согласованности изоморфизма многоосновных алгебр и естественного изоморфизма функторов в категориях многоосновных алгебр, $V \cdot T \cong 1_{\underline{Алг}_{СПЕЦ}}$ $(V \cdot T = 1_{\underline{Алг}_{СПЕЦ}})$, где $1_{\underline{Алг}_{СПЕЦ}}$ – тождественный функтор в категории СПЕЦ-алгебр, а символ $\cong$ обозначает естественный изоморфизм функторов.*)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Параметризованная спецификация, ПСПЕЦ = ⟨ СПЕЦ, СПЕЦ1 ⟩, состоит из спецификации параметра СПЕЦ и спецификации результата СПЕЦ1 = СПЕЦ + ⟨ S1, Σ1, E1 ⟩.

Семантика параметризованной спецификации определяется свободной конструкцией F: $\underline{Алг}_{СПЕЦ} \to \underline{Алг}_{СПЕЦ1}$ (функтор F – левый сопряженный к пренебрегающему функтору V: $\underline{Алг}_{СПЕЦ1} \to \underline{Алг}_{СПЕЦ}$ [13, с.176–194]), т.е. (абстрактным) параметризованным типом данных, равным ⟨ СПЕЦ, СПЕЦ1, F ⟩.

Параметризованная спецификация называется устойчивой (сильно устойчивой), если свободная конструкция Г устойчива (сильно устойчива) и единица сопряжения $F \dashv V, \eta(A): A \to V \cdot F(A)$ для $A \in \underline{Алг}_{СПЕЦ}$ является естественным изоморфизмом (тождеством).

ЗАМЕЧАНИЕ. Под "параметризованным типом данных ⟨ СПЕЦ, СПЕЦ1 ⟩" далее понимается параметризованный тип данных с (модельным) функтором – свободной конструкцией из СПЕЦ-алгебр в СПЕЦ1-алгебры.

Конкретизация параметров в алгебраических спецификациях осуществляется посредством морфизмов передачи параметров, в наиболее простом случае – морфизмов спецификаций.

---

*) Определения использованных теоретико-категорных терминов см. в [13, с.14, 131, 132, 142, 180].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Морфизм спецификаций $h: \langle S, \Sigma, E\rangle \to \langle S', \Sigma', E'\rangle$ состоит из отображения $h_S: S \to S'$ и $(S^* \times S)$-индексированного семейства отображений $h_\Sigma : \Sigma \to \Sigma'$, где $h_{\Sigma(w,s)}: \Sigma_{w,s} \to \Sigma'_{h^*_S(w), h^*_S(s)}$. Предполагается, что перевод всех равенств из E посредством h принадлежит E', т.е. $h(E) \subseteq E'$. Морфизм спецификаций h называется простым, если $\langle S, \Sigma, E\rangle \subseteq \langle S', \Sigma', E'\rangle$ покомпонентно, а h_S и h_Σ – вложения.

Спецификации и морфизмы спецификаций образуют категорию СПЕЦ.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Для произвольного морфизма спецификаций: СПЕЦ $= \langle S, \Sigma, E\rangle \to$ СПЕЦ' $= \langle S', \Sigma', E'\rangle$ существует пренебрегающий функтор V_h: $\underline{\text{Алг}}_{\text{СПЕЦ'}} \to \underline{\text{Алг}}_{\text{СПЕЦ}}$.

ЗАМЕЧАНИЯ.

I) $\langle S', \Sigma'\rangle$-алгебра A' удовлетворяет аксиомам $h(E)$ тогда и только тогда, когда $V_h(A')$ удовлетворяет E.

2) Для всех $A', B' \in \underline{\text{Алг}}_{\text{СПЕЦ'}}$ семейство $f' = \{f'_s : A'_s \to B'_s\}_{s \in S}$ является $h(\Sigma)$-морфизмом тогда и только тогда, когда $V_h(f')$ – Σ-морфизм.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть даны параметризованные спецификации ПСПЕЦ $= \langle$ СПЕЦ, СПЕЦ 1 $\rangle$ и ПСПЕЦ' $= \langle$ СПЕЦ', СПЕЦ" $\rangle$ – параметризованная спецификация фактического параметра, где СПЕЦ 1 = СПЕЦ + $\langle S1, \Sigma1, E1\rangle$ и СПЕЦ" = СПЕЦ' + $\langle S", \Sigma", E"\rangle$ соответственно, и морфизм спецификаций h: СПЕЦ $\to$ СПЕЦ" – морфизм передачи параметра.

Параметризованная передача параметра определяется синтаксисом, семантикой и семантическими условиями.

I. Синтаксис параметризованной передачи параметра определяется следующей диаграммой параметризованной передачи параметра:

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{СПЕЦ} \arrow[r, "s"] \arrow[d, "h"'] & \text{СПЕЦ 1} \arrow[d, "h'"] \\
\text{СПЕЦ'} \arrow[r, "s'"] & \text{СПЕЦ"} \arrow[r, "t"] & \text{СПЕЦ 1'}
\end{tikzcd}
$$

где s, s' и t – простые морфизмы спецификаций, а параметризованная спецификация значения или составная параметризованная спецификация, ПСПЕЦ $*_h$ ПСПЕЦ $= \langle$ СПЕЦ', СПЕЦ 1' $\rangle$, определяется следующим образом: СПЕЦ 1' = СПЕЦ" + $\langle S1', \Sigma1', E1'\rangle$, где $S1' = S1$,

$\Sigma 1' = h'(\Sigma 1)$ и $E1' = h'(E1)$, а морфизм спецификаций h': СПЕЦ1 → → СПЕЦ1' определяется посредством

$$h'_S(x) = \underline{if}\ x \in S1\ \underline{then}\ x\ \underline{else}\ h_S(x)\ \underline{fi},$$

$$h'_\Sigma(\sigma) = \underline{if}(\sigma : w \to s) \in \Sigma 1\ \underline{then}\ \sigma : h^*_S(w) \to h^*_S(s) fi.$$

2. Семантика параметризованной передачи параметра определяется посредством $(F, F', F \bullet_h F')$, или, короче, $F \bullet_h F'$, где F, F' и $F \bullet_h F'$ - семантика ПСПЕЦ, ПСПЕЦ' и ПСПЕЦ$\bullet_h$ ПСПЕЦ' соответственно.

3. Семантические условия параметризованной передачи параметра:

а) защита параметризованного параметра, т.е. для всех $A' \in$ $\in \underline{Алг}_{СПЕЦ'}$

$$V_t(F \bullet_h F'(A')) = F'(A');$$

б) совместимость параметризованной передачи параметра, т.е. для всех $A' \in \underline{Алг}_{СПЕЦ'}$

$$V_{h'} \cdot (F \bullet_h F')(A') = F \cdot V_h \cdot F'(A').$$

Более наглядно СПЕЦ1 можно записать в виде СПЕЦ1(СПЕЦ), СПЕЦ" - в виде СПЕЦ"(СПЕЦ'), а СПЕЦ1'- в виде СПЕЦ1'(СПЕЦ') или СПЕЦ1$\bullet_h$СПЕЦ"(СПЕЦ'). Но следует помнить, что $\Sigma 1$ и $E1$ незначительно изменены на $\Sigma 1' = h'(\Sigma 1)$ и $E1' = h'(E1)$ соответственно выбором морфизма передачи параметра h: СПЕЦ → СПЕЦ", который однозначно определяет $\tilde{h}$. СПЕЦ1'(СПЕЦ') получается в результате замены формального параметра СПЕЦ в СПЕЦ1(СПЕЦ) на СПЕЦ"(СПЕЦ'). Защита параметризованной передачи параметра означает, что параметризованный фактический параметр $F'(A')$ защищен в $(F \bullet_h F')(A')$. Если F и F' устойчивы, то $F \bullet_h F'$ также устойчиво, так что все фактические параметры A' защищены $F \bullet_h F'$. Совместимость параметризованной передачи параметра означает совместимость семантик ПСПЕЦ и ПСПЕЦ, F и F', с семантикой ПСПЕЦ$\bullet_h$ ПСПЕЦ', $F \bullet_h F'$.

Следующий основной результат показывает, что устойчивость гарантирует корректность параметризованной передачи параметра.

ТЕОРЕМА I (корректность параметризованной передачи параметра). П а р а м е т р и з о в а н н а я п е р е д а ч а п а р а м е т р а к о р р е к т н а д л я у с т о й ч и в ы х п а р а м е т р и з о в а н н ы х с п е ц и ф и к а ц и й. Ф о р м а л ь н о, е с л и д а н ы (с и л ь н о) у с т о й ч и в ы е п а р а м е т р и з о в а н н ы е с п е ц и -

фикации ПСПЕЦ = ⟨СПЕЦ,СПЕЦ1⟩ и ПСПЕЦ' = ⟨СПЕЦ',СПЕЦ"⟩ и морфизм передачи параметра h: СПЕЦ → → СПЕЦ", то выполняются следующие условия: I) защита параметризованного параметра; 2) совместимость параметризованной передачи параметра; 3) (сильная) устойчивость ПСПЕЦ$\bullet_h$ ПСПЕЦ'.

§ 3. Представление параметризованных спецификаций

Определения этого параграфа даны в [II], подробное обсуждение представления для непараметризованного (стандартного) случая см. в [9].

Пусть даны устойчивые параметризованные спецификации ПСПЕЦО = ⟨СПЕЦ,СПЕЦО⟩ и ПСПЕЦ1 = ⟨СПЕЦ,СПЕЦ1⟩, где СПЕЦ = ⟨S,Σ,E⟩ - спецификация параметра, СПЕЦО = СПЕЦ + ⟨SO, ΣO, EO⟩ - спецификация результата 0, СПЕЦ1 = СПЕЦ + ⟨S1, Σ1, E1⟩ - спецификация результата 1.

Устойчивость ПСПЕЦО и ПСПЕЦ1 гарантирует корректность параметризованной передачи параметра (теорема I).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Представлением ПСПЕЦО посредством ПСПЕЦ1,ПРЕД: ПСПЕЦ1 → ПСПЕЦО, называется пара ПРЕД = (Σ SORT, EOP), состоящая из наборов операций, представляющих основы, Σ SORT, и равенств, представляющих равенства, EOP, таких, что: уровень представления основ ПРЕДОСН = СПЕЦ1 + ⟨SO, Σ SORT, ∅⟩, уровень представления операций ПРЕДОП = ПРЕДОСН + ⟨∅, ΣO, EOP⟩, уровень отождествления ОТОЖД = ПРЕДОП + ⟨∅, ∅, EO⟩ являются комбинациями (см. § I) и для всех $\sigma: \to s$, $\sigma: s_1 \ldots s_n \to s$ из Σ SORT s принадлежит SO.

Семантика ПРЕД определяется следующим функтором:

$$\text{СЕМ}_{\text{ПРЕД}} = \underline{\text{Алг}}_{\text{СПЕЦ}} \xrightarrow{\text{СВОБ1}} \underline{\text{Алг}}_{\text{СПЕЦ1}} \xrightarrow{\text{СВОБПРЕД}} \underline{\text{Алг}}_{\text{ОТОЖД}} \xrightarrow{\text{СУЖ}} \underline{\text{Алг}}_{\text{СПЕЦО}},$$

где СВОБ1 и СВОБПРЕД - свободные конструкции относительно пренебрегающих функторов V1: $\underline{\text{Алг}}_{\text{СПЕЦ1}} \to \underline{\text{Алг}}_{\text{СПЕЦ}}$ и ПРЕД: $\underline{\text{Алг}}_{\text{ОТОЖД}} \to$ $\to \underline{\text{Алг}}_{\text{СПЕЦ1}}$ соответственно. Функтор сужения СУЖ определяется как произведение функторов $\text{СУЖ} = \underline{\text{Алг}}_{\text{ОТОЖД}} \to \underline{\text{Алг}}_{\text{СПЕЦО}} \xrightarrow{\text{ДОСТ}} \underline{\text{Алг}}_{\text{СПЕЦО}}$ пренебрегающего функтора V: $\underline{\text{Алг}}_{\text{ОТОЖД}}$ $\underline{\text{Алг}}_{\text{СПЕЦО}}$ и функтора достижимости ДОСТ, который определяется далее в лемме I.

ЗАМЕЧАНИЯ. Синтаксис представления спецификаций для параметризованного случая в точности тот же, что в стандартном случае, т.е. при СПЕЦ = $\emptyset$ (см. [9]). Для упрощения изложения в конструкции представления не рассматриваются вспомогательные основы, операции и равенства [9,раздел 6]. Семантика $СЕМ_{ПРЕД}$ соответствует в стандартном случае IR-семантике [9,разделы 5.7, 5.8].

ЛЕММА I [II]. Пусть дана свободная конструкция СВОБО: $\underline{Алг}_{СПЕЦ} \to \underline{Алг}_{СПЕЦО}$ относительно пренебрегающего функтора VO: $\underline{Алг}_{СПЕЦО} \to \underline{Алг}_{СПЕЦ}$ с коединицей ε.[ж)] Тогда существует функтор ДОСТ: $\underline{Алг}_{СПЕЦО} \to \underline{Алг}_{СПЕЦО}$, такой, что ДОСТ(А) является образом $\varepsilon(A)$: СВОБО $\cdot$ VO(A) $\to$ A.

ЗАМЕЧАНИЕ. Коединица $\varepsilon(A)$: СВОБО$\cdot$VO(A) $\to$ A вычисляет значения термов, свободно порожденных исходными значениями VO(A), т.е. СПЕЦ-частью алгебры А. Следовательно, ДОСТ(А) образует ту часть А, которая достижима посредством СПЕЦО-операций (см.§ I) из исходных значений фактического параметра VO(A). Другими словами, из А удаляются элементы, не связанные с СПЕЦО.

Определим корректность представления параметризованных спецификаций. Далее Σ(СПЕЦ) обозначает набор операций в СПЕЦ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Параметризованное представление ПРЕД:ПСПЕЦ1 $\to$ $\to$ ПСПЕЦО называется:

I) <u>ОС-корректным</u>, если $СЕМ_{ПРЕД}$ естественно изоморфен СВОБО (см. [I3,с.I42]), где СВОБО – семантика ПСПЕЦО: $СЕМ_{ПРЕД} \cong$ СВОБО;

2) <u>ОП-полным</u>, если для произвольного семейства переменных $X = \{X_s\}_{s \in S+S0}$, где $X_s = \emptyset$ при $s \in S0$, и произвольного терма t из $T_{\Sigma(СПЕЦО)}(X)$ существует терм t^* из $T_{\Sigma(ПРЕДОСН)}(X^*)$, такой, что t и t^* ПРЕДОП-эквивалентны, т.е. $t =_{ПРЕДОП} t^*$, где $X^*_s = X_s$ при $s \in S$ и $X^*_s = \emptyset$ – в противном случае.

ЗАМЕЧАНИЕ. При $X = \emptyset$ ОС-корректность и ОП-полнота параметризованного представления соответствуют ОС-корректности и ОП-полноте в стандартном случае [9,разделы 5.7 и 4.6].

ж) См. [I3,с.I78] или [I4,с.8I].

§ 4. Основные результаты

В этом параграфе результаты [II] об индуцированном представлении для стандартной передачи параметра обобщаются на случай параметризованной передачи параметра. Сначала определим явным образом соответствующее индуцированное представление.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть даны представление ПРЕД = (ΣSORT, EOP): ПСПЕЦ1 $\to$ ПСПЕЦ0, устойчивая параметризованная спецификация ПСПЕЦ' = $\langle$ СПЕЦ', СПЕЦ" $\rangle$ и морфизм передачи параметра h: СПЕЦ $\to$ СПЕЦ". Рассмотрим соответствующие диаграммы параметризованной передачи параметра:

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{СПЕЦ} \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & \text{СПЕЦ1} \arrow[d, "h1"] \\
\text{СПЕЦ}' \arrow[r] & \text{СПЕЦ}'' \arrow[r] & \text{СПЕЦ1}'
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
 & \text{СПЕЦ} \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & \text{СПЕЦ0} \arrow[d, "h0"] \\
\text{СПЕЦ}' \arrow[r] & \text{СПЕЦ}'' \arrow[r] & \text{СПЕЦ0}'
\end{tikzcd}
$$

определяющие параметризованные спецификации значений ПСПЕЦi $\ast_h$ ПСПЕЦ' = $\langle$ СПЕЦ', СПЕЦi' $\rangle$ с индуцированными морфизмами спецификаций hi: СПЕЦ $\to$ СПЕЦi', где i = 0,I.

Положим Σ SORT = $\{h2(\sigma) \mid \sigma \in \Sigma$ SORT$\}$ и EOP' = $\{h2(e) \mid e \in EOP\}$, где $h2(\sigma\colon s_1 \ldots s_n \to s) = \sigma\colon h1(s_1) \ldots h1(s_n) \to h1(s)$, а $h2(e)$ получается заменой в e всех вхождений σ на $h2(\sigma)$ и всех вхождений переменных основ $s \in S$ на соответствующие переменные основ $h(s) \in S''$. Тогда ПРЕД' = (Σ SORT, EOP'): ПСПЕЦ1 $\ast_h$ ПСПЕЦ' $\to$ ПСПЕЦ0 $\ast_h$ ПСПЕЦ' называется параметризованным индуцированным представлением ПСПЕЦ0 $\ast_h$ ПСПЕЦ' посредством ПСПЕЦ1 $\ast_h$ ПСПЕЦ'.

Теоремы 2 и 3 показывают связь синтаксиса и семантики ПРЕД и ПРЕД' соответственно, а теорема 4 показывает, что из корректности ПРЕД следует корректность ПРЕД'.

ТЕОРЕМА 2 (синтаксис параметризованного индуцированного представления). Пусть даны представление ПРЕД: ПСПЕЦ1 $\to$ ПСПЕЦ0, устойчивая параметризованная спецификация ПСПЕЦ' = $\langle$ СПЕЦ', СПЕЦ" $\rangle$ и морфизм передачи параметра h: СПЕЦ $\to$ СПЕЦ", индуцирующие представление ПРЕД': ПСПЕЦ1 $\ast_h$ ПСПЕЦ' $\to$ ПСПЕЦ0 $\ast_h$ ПСПЕЦ', где ПСПЕЦi $\ast_h$ ПСПЕЦ' = $\langle$ СПЕЦ', СПЕЦi' $\rangle$ при i = 0,I. Тогда ПРЕДОСН', ПРЕДОП' и ОТОЖД' определяются универсальными квадратами следующей диаграммы [I3, с.34] в категории СПЕЦ (горизонтальные морфизмы –

вложения, а вертикальные индуцированы h):

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & \text{СПЕЦ} & \to & \text{СПЕЦ1} & \to & \text{ПРЕДОСН} & \to & \text{ПРЕДОП} & \to & \text{ОТОЖД} \\
 & & \downarrow h & (\mathrm{I}) & \downarrow h1 & (2) & \downarrow h2 & (3) & \downarrow h3 & (4) & \downarrow h4 \\
\text{СПЕЦ}' & \to & \text{СПЕЦ}'' & \to & \text{СПЕЦ1}' & \to & \text{ПРЕДОСН}' & \to & \text{ПРЕДОП}' & \to & \text{ОТОЖД}'
\end{array}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что СПЕЦО' и СПЕЦ1' являются вторыми компонентами составных параметризованных спецификаций ПСПЕЦО $*_h$ ПСПЕЦ' и ПСПЕЦ1 $*_h$ ПСПЕЦ' соответственно и по определению параметризованного индуцированного представления: ПРЕДОСН' = СПЕЦ1'+ + ⟨ SO', Σ SORT', ∅⟩, ПРЕДОП' = ПРЕДОСН' + ⟨∅, ΣO', EOP'⟩, ОТОЖД' = = ПРЕДОП' + ⟨∅, ∅, EO' ⟩.

Для доказательства теоремы 2 достаточно предположить, что СПЕЦ1', ПРЕДОСН', ПРЕДОП' и ОТОЖД' заданы универсальными квадратами диаграмм (I)-(4) соответственно. Тогда явные конструкции определений 4 и 7 совпадают.

ТЕОРЕМА 3 (<u>семантика параметризованного индуцированного представления</u>). Пусть даны представление ПРЕД: ПСПЕЦ1 → ПСПЕЦО с семантикой $\text{СЕМ}_{\text{ПРЕД}}$: $\underline{\text{Алг}}_{\text{СПЕЦ}} \to \underline{\text{Алг}}_{\text{СПЕЦО}}$, устойчивая параметризованная спецификация ПСПЕЦ' = ⟨СПЕЦ', СПЕЦ''⟩ с семантикой F': $\underline{\text{Алг}}_{\text{СПЕЦ}'} \to \underline{\text{Алг}}_{\text{СПЕЦ}''}$ и морфизм передачи параметра h: СПЕЦ → СПЕЦ'', индуцирующие представление ПРЕД': ПСПЕЦ1 $*_h$ ПСПЕЦ' → → ПСПЕЦО $*_h$ ПСПЕЦ', где ПСПЕЦi $*_h$ ПСПЕЦ' = ⟨СПЕЦ', СПЕЦi'⟩ при i = 0,I.

Предположим, что семантика ПРЕД, $\text{СЕМ}_{\text{ПРЕД}}$: $\underline{\text{Алг}}_{\text{СПЕЦ}} \to \underline{\text{Алг}}_{\text{СПЕЦО}}$, устойчива относительно пренебрегающего функтора VO: $\underline{\text{Алг}}_{\text{СПЕЦО}} \to \underline{\text{Алг}}_{\text{СПЕЦ}}$.

Тогда семантика ПРЕД', $\text{СЕМ}_{\text{ПРЕД}'}$: $\underline{\text{Алг}}_{\text{СПЕЦ}'} \to \underline{\text{Алг}}_{\text{СПЕЦО}'}$, представима в виде $\text{СЕМ}_{\text{ПРЕД}'}$ = = G • F', где функтор G : $\underline{\text{Алг}}_{\text{СПЕЦ}''} \to \underline{\text{Алг}}_{\text{СПЕЦО}}$ однозначно определяется следующими условиями:

1) устойчивость относительно О – $VO''\cdot G = 1_{\underline{\text{Алг}}_{\text{СПЕЦ}''}}$,

2) $V_{hO}\cdot G = \text{СЕМ}_{\text{ПРЕД}}\cdot V_h$,

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\underline{\text{Алг}}_{\text{СПЕЦ}} \arrow[rr, shift left, "\text{СЕМ}_{\text{ПРЕД}}"] & & \underline{\text{Алг}}_{\text{СПЕЦО}} \arrow[ll, shift left, "VO"] \\
\underline{\text{Алг}}_{\text{СПЕЦ}''} \arrow[u, "V_h"] \arrow[rr, shift left, "G"] & & \underline{\text{Алг}}_{\text{СПЕЦО}'} \arrow[u, "V_{hO}"'] \arrow[ll, shift left, "\text{СЕМ}_{\text{ПРЕД}'}\cdot VO''"] \arrow[dll, shift left, "VO'"] \\
\underline{\text{Алг}}_{\text{СПЕЦ}'} \arrow[u, "F'"] \arrow[urr, shift left] & &
\end{tikzcd}$$

и VO', VO'', V_{hO} и V_h – пренебрегающие функторы.

В частности, семантика $\text{СЕМ}_{\text{ПРЕД}'}$ также устойчива.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 3 основано на лемме о продолжении [8, с.61] и трех последующих леммах. Ввиду устойчивости $\text{СЕМ}_{\text{ПРЕД}}$ по лемме о продолжении существует единственный функтор $G: \underline{\text{Алг}}_{\text{СПЕЦ}''} \to \underline{\text{Алг}}_{\text{СПЕЦО}'}$, удовлетворяющий обоим условиям теоремы 3. С другой стороны, по определению семантики параметризованного представления, $\text{СЕМ}_{\text{ПРЕД}'} = \text{СУЖ}'\cdot\text{СВОБПРЕД}'\cdot\text{СВОБ1}'$ (см.диаграмму):

$$\begin{tikzcd}
\underline{\text{Алг}}_{\text{СПЕЦ}} \arrow[r, "\text{СВОБ1}"] & \underline{\text{Алг}}_{\text{СПЕЦ1}} \arrow[r, "\text{СВОБПРЕД}"] \arrow[d, phantom, "(1)"] & \underline{\text{Алг}}_{\text{ОТОЖД}} \arrow[r, "\text{СУЖ}"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & \underline{\text{Алг}}_{\text{СПЕЦО}} \\
\underline{\text{Алг}}_{\text{СПЕЦ}''} \arrow[u, "V_h"] \arrow[r, "\text{СВОБ1}''"] & \underline{\text{Алг}}_{\text{СПЕЦ1}'} \arrow[r, "\text{СВОБПРЕД}'"] & \underline{\text{Алг}}_{\text{ОТОЖД}'} \arrow[u, "V_{h4}"] \arrow[r, "\text{СУЖ}'"] & \underline{\text{Алг}}_{\text{СПЕЦО}'} \arrow[u, "V_{hO}"'] \\
\underline{\text{Алг}}_{\text{СПЕЦ}'} \arrow[u, "F'"] \arrow[ur, "\text{СВОБ1}'"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Заметим, что $\text{СВОБ1}' = \text{СВОБ1}''\cdot F'$, где $\text{СВОБ1}'': \underline{\text{Алг}}_{\text{СПЕЦО}''} \to \underline{\text{Алг}}_{\text{СПЕЦ1}}$ – свободная конструкция (произведение свободных конструкций является свободной конструкцией).

Для доказательства теоремы 3 достаточно показать, что СУЖ'·СВОБПРЕД'·СВОБ1" удовлетворяют ее условиям I и 2, т.е. G = = СУЖ'·СВОБПРЕД'·СВОБ1". Тогда $СЕМ_{ПРЕД'}$ = G · F' и семантика $СЕМ_{ПРЕД'}$ будет устойчивой как произведение устойчивых функторов F' (по предположению теоремы) и G. Выполнение этих условий можно показать, используя лемму о продолжении и леммы 2-4.

ЛЕММА 2 [II].

$$V0 \cdot СУЖ = V4,$$

где V0 и V4 - пренебрегающие функторы, соответствующие вложениям СПЕЦ ⊆ СПЕЦ0 и СПЕЦ ⊆ ОТОЖД.

ЛЕММА 3 [II]. Устойчивость $СЕМ_{ПРЕД}$ эквивалентна устойчивости СВОБПРЕД·СВОБ1.

ЛЕММА 4. $СУЖ \cdot V_{h4} = V_{h0} \cdot СУЖ'$.

Последняя лемма следует из соответствующей леммы в [II] и совместимости функторов достижимости, порожденных свободными конструкциями из СПЕЦ- и СПЕЦ1-алгебр в СПЕЦ0-алгебры.

ТЕОРЕМА 4 (корректность семантики параметризованного индуцированного представления). Пусть даны параметризованное представление ПРЕД: ПСПЕЦ1 → ПСПЕЦ0, устойчивая параметризованная спецификация ПСПЕЦ' = ⟨СПЕЦ',СПЕЦ"⟩ и морфизм передачи параметра h: СПЕЦ → СПЕЦ", индуцирующие параметризованное представление

$$ПРЕД': ПСПЕЦ1 \bullet_h ПСПЕЦ' \to ПСПЕЦ0 \bullet_h ПСПЕЦ'.$$

Тогда:

I) ОС-корректность ПРЕД влечет ОС-корректность ПРЕД';

2) ОП-полнота ПРЕД влечет ОП-полноту ПРЕД'.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 4 основано на следующих соображениях. Во-первых, пусть ПРЕД ОС-корректно, т.е. $СЕМ_{ПРЕД}$ = СВОБ0, где СВОБ0 - семантика ПСПЕЦ0. Следовательно, ввиду устойчивости ПСПЕЦ0 по предположению, параметризованный тип данных ⟨СПЕЦ, СПЕЦ0, $СЕМ_{ПРЕД}$⟩ также устойчив. По лемме о продолжении [8,с.61], существуют продолжения функторов $СЕМ_{ПРЕД}$ и СВОБ0 по h, функторы G,G':

$\underline{\text{Алг}}_{\text{СПЕЦ}''} \to \underline{\text{Алг}}_{\text{СПЕЦО}'}$ соответственно, сопряженные слева к пренебрегающему функтору из СПЕЦО'-алгебр в СПЕЦО"-алгебры, где СПЕЦО' определяется ПСПЕЦО$*_h$ ПСПЕЦ' = ⟨СПЕЦ',СПЕЦО'⟩. Функторы, сопряженные слева к некоторому функтору, естественно изоморфны (см. [13,с.188] или [14,с.83]). В частности, $G \cong G'$. Далее, по теореме 3, $\text{СЕМ}_{\text{ПРЕД}'} = G \cdot F'$, где F' – семантика ПСПЕЦ'. С другой стороны, семантика ПСПЕЦО$*_h$ ПСПЕЦ', СВОБО', представима в виде произведения свободных конструкций G' и F', СВОБО' = $G' \cdot F'$. Следовательно, $\text{СЕМ}_{\text{ПРЕД}'} \cong$ СВОБО', т.е представление ПРЕД' ОС-корректно.

Во-вторых, пусть ПРЕД ОП-полно. Для ПРЕД' ОП-полнота означает, что для произвольного семейства переменных $\bar{X} = \{\bar{X}_s\}_{s \in S'+SO'}$, где $\bar{X} = \emptyset$ при $s \in SO'$ (см.определение 6), и произвольного терма $\bar{t} \in T_{\Sigma(\text{СПЕЦО}')}(\bar{X})$ существует терм $\bar{t}^*$ из $T_{\Sigma(\text{ПРЕДОСН}')}(\bar{X}^*)$, такой, что $\bar{t} =_{\text{ПРЕДОП}'} \bar{t}^*$, и $\bar{X}^*_s = \bar{X}_s$ при $s \in S'$, и $\bar{X}_s = \emptyset$ – в противном случае. Это утверждение можно доказать индукцией по построению терма $\bar{t}$ аналогично доказательству соответствующей теоремы [11].

Непосредственно из теорем 2-4 вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Корректная параметризованная передача параметра совместима с корректным представлением. Точнее, пусть даны корректное представление ПРЕД: ПСПЕЦ1 → ПСПЕЦО, устойчивая параметризованная спецификация ПСПЕЦ' = ⟨СПЕЦ', СПЕЦ"⟩ и морфизм передачи параметра h: СПЕЦ → СПЕЦ", индуцирующие представление

ПРЕД': ПСПЕЦ1$*_h$ ПСПЕЦ' → ПСПЕЦО$*_h$ ПСПЕЦ'.

Тогда следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
\text{СПЕЦ1(СПЕЦ)} \arrow[rr, Rightarrow, "\text{параметризованное представление ПРЕД}"] \arrow[d, Downarrow] & & \text{СПЕЦО(СПЕЦ)} \arrow[d, Downarrow] \\
& \text{параметризованная передача параметра} & \\
\text{СПЕЦ1}'\text{(СПЕЦ}'\text{)} \arrow[rr, Rightarrow, "\substack{\text{параметризованное индуцированное} \\ \text{представление ПРЕД}'}"'] & & \text{СПЕЦО}'\text{(СПЕЦ}'\text{)}
\end{tikzcd}$$

Литература

I. GOGUEN J.A., BURSTALL R.M. The semantics of CLEAR, a specification language.- In: Lecture notes in computer science.v.86, Springer-Verlag,1980,p.294-332.

2. GOGUEN J.A. Two ORDINARY specifications.-Technical report CSL-128,SRI International, Menlo Park,CA,1980.- 30 p.

3. ZILLES S.N., LUCAS P., THATCHER J.W. A look at algebraic specifications. - IBM Research report RJ 3568 (41985),1982.- 41 p.

4. EHRIG Hà. FEY W., HANSEN H. ACT ONE: an algebraic specification language with two levels of semantics.- Bericht-Nr.83-03, Technische Universität West Berlin, Fachbereich 20 (Informatik), 1983.- 55 p.

5. ПРОСКУРИН А.В. Построение и оптимизация программ средствами языка алгебраических спецификаций.- В кн.: Оптимизация и преобразования программ: Материалы Всесоюз.семинара, Новосибирск.-Новосибирск,1983,ч.2,с.52-62.

6. ПРОСКУРИН А.В. Методология построения программных систем: алгебраический подход. - В кн.: Надежность и качество программного обеспечения: Тез.докл.Республиканской конф.,Львов.- Киев,1985, с.166-168.

7. GOGUEN J.A., BURSTALL R.M. CAT, a system for the structured elaboration of correct programs from structured specifications. - Technical report CSL-118, SRI International, Menlo Park,CA,1980. - 30 p.

8. Parameter passing in algebraic specification languages / Ehrig H., Kreowski H.-J.,Thatcher J.W.and all. - Theoretical computer science,1984,v.28,N 1,2,p.45-81.

9. Algebraic implementation of abstract data types /Ehrig H., Kreowski H.-J.,Mahr B.,Padawitz B. - Theoretical computer science, 1982,v.20,N 3,p.209-263.

I0. EHRIG H. Algebraic theory of parameterized specifications with requirements.- In: Lecture notes in computer science,v.112, Springer-Verlag,1981,p.1-24.

II. EHRIG H., KREOWSKI H.-J. Compatibility of parameter passing and implementation of parameterized data types.- Theoretical computer science,1983,v.27,N 3,p.255-286.

I2. ГЛУШКОВ В.М., ЦЕЙТЛИН Г.Е., ЮЩЕНКО Е.Л. Алгебры,языки,программирование.- Киев: Наукова думка,1974.-328 с.

I3. ЦАЛЕНКО М.Ш., ШУЛЬГЕЙФЕР Е.Г. Основы теории категорий.-М.: Наука,1974. - 256 с.

I4. Mac LANE S. Categories for the working mathematician.- New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag,1972.- 262 p.

Поступила в ред.-изд.отд.
29 мая 1985 года