МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПЛЕНОЧНОЙ ЭЛЕКТРОМЕХАНИКЕ
(Вычислительные системы)
1985 год Выпуск 110

УДК 517.948

ТЕОРИЯ РАЗМЕРНОСТИ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН. I.

Ю.И. Кулаков

Обычно к теории размерности обращаются в связи с чисто утилитарными целями, которые сводятся к требованию единообразия в измерении различных физических величин, к правильному написанию тех или иных уравнений и получению из них правильных результатов. Однако при достаточно вдумчивом знакомстве с теорией размерности возникает ряд принципиальных вопросов:

- какова физическая и математическая природа размерности;

- возникает ли понятие размерности из самого физического закона или вносится в теорию извне;

- чем отличается эталон той или иной физической величины от соответствующей единицы измерений, и какова природа последней (чем, например, отличается эталон длины "метр", хранящийся в Севре под Парижем, от единицы измерения длины - метра (м), входящей в выражение $l = 10$ м, и какова математическая природа символа "м");

- каков смысл "уравнения размерности", и возможно ли его доказательство;

- почему, ничего не зная о механизме того или иного явления, а зная лишь размерности тех физических величин, от которых это явление зависит, в некоторых случаях возможно получение конкретного выражения для закона, описывающего это явление (известный пример Рэлея - нахождение периода колебаний математического маятника $T = k\sqrt{l/g}$ из соображений размерности);

- диктуется ли выбор числа основных единиц только соображениями удобства или это число определяется самой природой физического мира - всей совокупностью известных физических законов?

Чтобы ответить на эти вопросы и увидеть, какая новая симметрия скрывается за понятием размерности, необходимо построить теорию размерности на принципиально новых, более строгих и глубоких основаниях, нежели те полуинтуитивные соображения, на которых она строится в настоящее время.

В этой статье мы постараемся взглянуть на теорию размерности как на раздел физики, тесно связанный с понятием феноменологической симметрии и основанной на ней теорией физических структур [I-4].

Но прежде чем строить эту теорию, постараемся понять общую структуру физики в целом и увидеть то место, которое занимает теория размерности в единой физической картине мира.

§I. Место теории размерности в единой физической картине мира

Можно выделить три уровня описания эмпирической реальности:

а) уровень симметрии - исходный и самый глубокий,

б) уровень универсальных общефизических принципов,

в) уровень наглядных (неформальных) моделей.

В соответствии с этим всю физику удобно рассматривать как состоящую из следующих трех частей (см.схему):

фундаментальной физики (физики на уровне симметрии);

теоретической физики (физики на уровне принципов);

физики вещества (физики на уровне моделей).

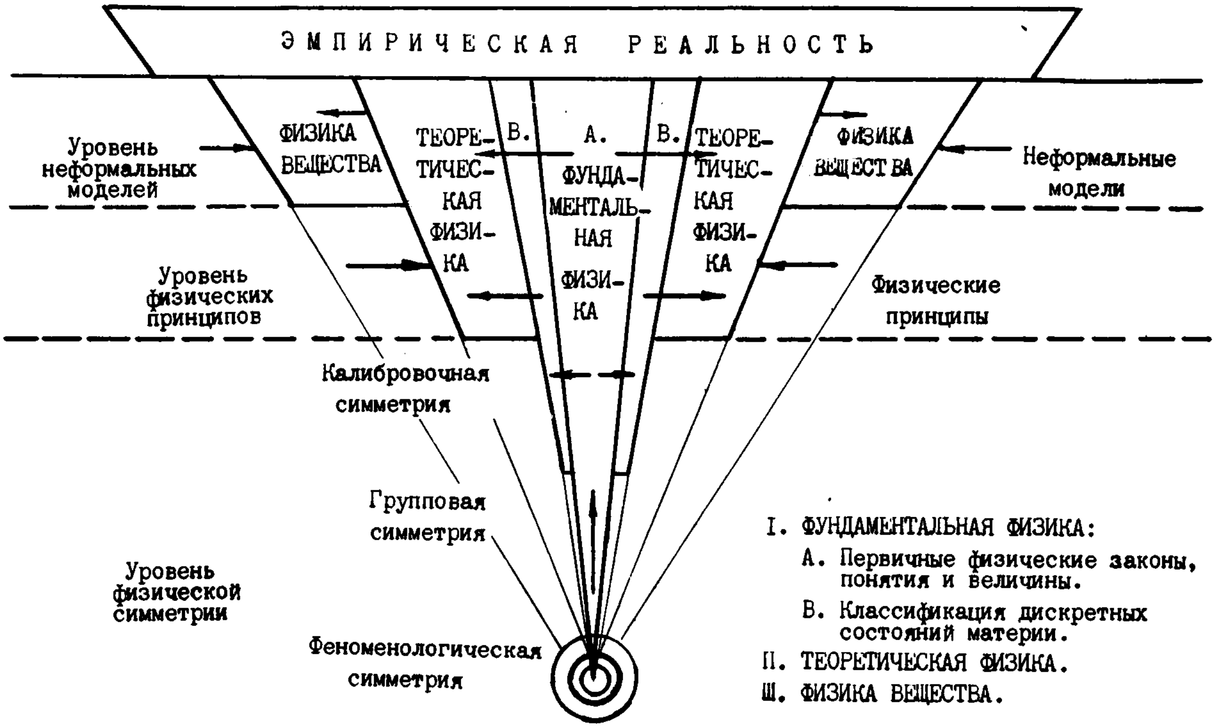
Дадим краткую характеристику этих частей.

Ф у н д а м е н т а л ь н а я ф и з и к а, в основании которой лежат только различные типы симметрии, в свою очередь, состоит из двух разделов:

А. <u>феноменологической физики</u> (теории физических структур), позволяющей получать первичные физические законы, понятия и величины, исходя из общефизического понятия феноменологической симметрии;

В. <u>субстанциальной физики</u>, занимающейся классификацией дискретных состояний материи на основе групповой и калибровочной симметрий.

Т е о р е т и ч е с к а я ф и з и к а - это раздел физики, в основании которого лежат несколько универсальных физических п р и н ц и п о в, допускающих достаточно строгую математическую формулировку понятий и терминов фундаментальной физики. К ней относятся:



I. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ФИЗИКА:

А. Первичные физические законы, понятия и величины.

В. Классификация дискретных состояний материи.

II. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА.

Ш. ФИЗИКА ВЕЩЕСТВА.

- аналитическая механика, основное эвристическое содержание которой, на наш взгляд, состоит в установлении канонической двойственности физического мира (факт существования канонически сопряженных переменных - импульсов p_i и координат q^i);

- статистическая физика, главным содержанием которой является принцип равноправия всех точек на энергетической поверхности в 6N-мерном фазовом пространстве;

- теория гравитации, устанавливающая связь геометрии (через тензор кривизны) и материи (через тензор энергии-импульса или через плотность массы) и выясняющая "компенсирующую" природу гравитационного поля;

- калибровочная электродинамика, в отличие от эмпирической электродинамики Максвелла позволяющая выяснить истинную "компенсирующую" природу электромагнитного поля и тем самым сделать еще один шаг на пути создания единой физической картины мира;

- теория калибровочных полей, дополненная идеей спонтанного нарушения симметрии и устанавливающая единую "компенсирующую" природу полей, ответственных за электрослабое и сильное взаимодействия;

- квантовая механика, основное эвристическое содержание которой, на наш взгляд, состоит в соединении идеи канонической двойственности физического мира с вероятностной интерпретацией вектора состояния в бесконечномерном гильбертовом пространстве;

- квантовая теория поля, основное содержание которой состоит в распространении квантового варианта канонической двойственности на процессы рождения и поглощения частиц.

Физика вещества - самый большой раздел физики, широко использующий для описания эмпирической реальности как первичные законы, понятия и величины, возникающие в рамках фундаментальной физики, так и универсальные физические законы, установленные в рамках традиционной теоретической физики и существенным образом дополняющие их неформальными, конкретными и достаточно наглядными физическими моделями. Характерной особенностью физики вещества является использование нестрогих и наглядных моделей и экстенсивный характер исследований, ставящих своей целью объяснение и предсказание различных конкретных явлений, на основе известных фундаментальных законов. Физика вещества охватывает подавляющую часть всех наблюдаемых явлений и опытных фактов и объединяет в себе большое число различных конкретных физических теорий, таких как теория твердого тела, теория ферромагнетизма, теория сверхпроводимости, теория полупроводников, теория ядра, теория атомных спектров, астрофизика и т.д.

Вернемся к феноменологической физике. К ней относятся все те физические понятия, величины и фундаментальные физические законы, которые обычно вносятся в физическую теорию "руками" просто как нечто само собой разумеющееся, как общеизвестные и самоочевидные аксиомы. ("Уж так, - говорят, устроен мир!") На самом же деле появление в физике таких понятий, как пространство и время, как релятивистская инвариантность, как масса и сила, температура, энтропия, энергия является следствием (далеко не тривиальным) факта существования в мире так называемой феноменологической симметрии - нового вида симметрии, позволяющей подвести под главное здание физики надежный и строго обоснованный фундамент и понять, почему природа является именно такой, а не иной. Но, может быть, в ответе на этот вопрос и состоит прометеевский элемент научного творчества?

Субстанциальная физика тоже построена на симметриях, правда, симметриях другого рода - групповой и калибровочной. Но, как впервые заметил Г.Г.Михайличенко [5] и строго доказал В.Х.Лев [6], феноменологическая симметрия уже содержит в себе как следствие аксиомы, лежащие в основании теории групп Ли, и в этом смысле становится понятным, почему методы теории непрерывных групп так широко используются в современной теоретической физике.

Субстанциальная физика включает в себя теоретико-групповую классификацию кристаллических структур, спектров колебательных и атомных систем, химических элементов [7], элементарных и фундаментальных (лептоны, кварки, бозоны - переносчики взаимодействий) частиц.

Итак, к феноменологической физике относятся такие "самоочевидные" и безусловно фундаментальные физические законы, как

1) законы хронометрии, порождающие важнейшее для всей физики понятие - время (физическая структура ранга 3 на множестве событий, происходящих в одной и той же точке);

2) законы геометрии расстояний, порождающие не менее важные физические понятия - трехмерное евклидово пространство, расстояние, декартовы координаты (физическая структура ранга 5 на множестве произвольно расположенных тел);

3) законы теории относительности (законы отношений между произвольными событиями в различных системах отсчета), из которых как следствие вытекают факт существования четырехмерного псевдоевклидова пространства событий и принцип "постоянства скорости света" (физическая структура на множестве произвольных событий в разных точках пространства, представляющая собой единственно возможную суперпозицию физических структур одномерного времени и трехмерного евклидова пространства и обуславливающая существование некоторой универсальной общефизической мировой постоянной $A = c^2 = 9 \cdot 10^{20}$ см^2/сек^2, знак и численное значение которой находится из опыта);

4) законы движения (законы кинематики), порождающие такие фундаментальные понятия, как скорость и ускорение (физическая структура на множестве упорядоченных событий, представляющая собой единственно возможную суперпозицию физических структур одномерного времени и одномерного пространства);

5) законы инерции (законы механики материальной точки), порождающие понятие массы, силы, инерциальной системы отсчета (физическая структура ранга (2,2) на множестве тел и множестве "ускорителей"ж));

6) законы движения заряженного пробного тела в электромагнитном поле (полуэмпирическая электродинамика Максвелла), из которых как следствие вытекают такие понятия, как тензор электромагнитного поля, плотность электрических зарядов и плотность тока (физическая структура ранга (4,4) на множестве источников поля и множестве состояний движения заряженного пробного тела);

7) законы взаимопревращений энергии (законы термодинамики), из которых естественным путем возникает понятие температуры, энтропии, внутренней энергии (физическая структура ранга 4 на множестве термодинамических состояний произвольного тела);

8) законы электродинамики постоянного тока, приводящие к понятиям сопротивления проводника, электродвижущей силы и внутреннего сопротивления источника тока (физическая структура ранга (3,2) на множестве проводников и множестве источников тока);

9) законы электродинамики переменного тока, приводящие к понятиям активного сопротивления, емкости и индуктивности (физическая структура ранга (3,3) на множестве комплексов, состоящих из

ж) Под "ускорителем" здесь понимается поле или любой механизм α, сообщающий телу i ускорение $a_{i\alpha}$.

последовательно соединенных конденсаторов, индуктивностей и активных проводников, и множестве генераторов переменного напряжения с различной частотой и амплитудой).

Всех перечисленных понятий, физических понятий и законов оказывается достаточно, чтобы описать любую эмпирическую ситуацию, возникающую в любой области физики (в том числе и в квантовой физике и в физике высоких энергий). Но самое главное состоит в том, что этих понятий оказывается достаточно, чтобы с их помощью сформулировать некоторые общефизические принципы, лежащие в основании физических теорий следующего уровня - принципы традиционной теоретической физики.

Между теорией физических структур и теорией размерности существует глубокая и самая непосредственная связь. Более того, есть достаточно веские основания считать теорию размерности частью теории физических структур.

Дело в том, что до сих пор теория физических структур строилась так, что процедура измерения не включалась в число физических нечисловых переменных и предполагалась фиксированной для каждого физического закона раз и навсегда. Это обстоятельство приводило к фундаментальным физическим законам, инвариантным относительно выбора эталонов. Однако физические законы, помимо всего прочего, инвариантны и относительно выбора измерительной процедуры. Чтобы учесть этот факт, необходимо ввести в теорию еще и множество измерительных операций $\mathcal{P} = \{\lambda, \tau, \ldots\}$. В результате естественным образом возникает понятие размерности, позволяющее переписать фундаментальные физические законы в виде, инвариантном относительно выбора измерительной операции.

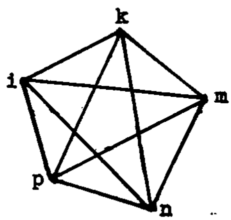
§2. Что такое физическая структура?

Общая идеология теории физических структур сводится к утверждению, что предметом изучения фундаментальной физики (в отличие от физики вещества) являются не сами физические объекты, а о т н о ш е н и я между ними.

Таким образом, в теории физических структур обращается внимание не на конкретную "физическую природу" тех или иных реальных объектов, а на существование и установление особых, вполне определенных типов к о л л е к т и в н ы х (полиарных) отношений между ними. При этом все физические объекты объединяются в определенные классы, совокупности или множества, внутри которых все объекты в каком-то смысле являются р а в н о п р а в н ы м и. Принадлежность объекта к тому или иному классу означает,что дан - ный физический объект обладает некоторыми свойствами, уравниваю - щими его со всеми остальными.

В качестве простейшего примера рассмотрим п о л и а р н ы е отношения, в которых находятся точки трехмерного евклидова прост- ранства.

Пусть $\mathfrak{M} = \{i, k, \dots\}$ - множество материальных тел достаточно малых размеров, таких, что их можно считать "точками". Отношения между N произвольными точками могут быть заданы $\frac{1}{2}N(N-1)$ взаим - ными расстояниями между ними. Эти расстояния (со свойствами $l_{ik} = l_{ki}$ и $l_{ii} = 0$) можно измерить и расположить в виде треуголь - ной матрицы



$$\begin{matrix} l_{ik} & l_{im} & l_{in} & l_{ip} & \dots \\ & l_{km} & l_{kn} & l_{kp} & \dots \\ & & l_{mn} & l_{mp} & \dots \\ & & & l_{np} & \dots \end{matrix}$$

В этой матрице в скрытом виде содержится информация о нали - чии определенного типа полиарных (в данном случае пентаарных) от- ношений между реальными телами из множества $\mathfrak{M}$ или, другими сло - вами, о существовании физической структуры ранга 5 или некоторо- го универсального физического закона, которому подчиняются все реальные "точечные" тела. Этот закон проявляется лишь в совокуп - ностях, состоящих по крайней мере из r элементов, где r - ранг фи- зической структуры - число, характеризующее тип полиарных отноше- ний, имеющих место для всех физических объектов из множества $\mathfrak{M}$.

Так,в нашем конкретном случае, когда $\mathfrak{M}$- множество точек трехмерного евклидова пространства, в совокупностях, состоящих: из одной точки $\mathfrak{M}_1 = \{i\}$, из двух - $\mathfrak{M}_2 = \{i, k\}$, из трех - $\mathfrak{M}_3 = \{i, k, m\}$, из четырех точек $\mathfrak{M}_4 = \{i, k, m, n\}$ полиарные отношения еще не возникают. Если же взять совокупность $\mathfrak{M}_5 = \{i, k, m, n, p\}$, состоящую из пяти произвольных точек, то возникает физическая структура ранга 5.

Это значит, что десять расстояний

$$\begin{array}{|cccc} l_{ik} & l_{im} & l_{in} & l_{ip} \\ & l_{km} & l_{kn} & l_{kp} \\ & & l_{mn} & l_{mp} \\ & & & l_{np} \end{array} \qquad (1)$$

между произвольными пятью точками i, k, m, n, p не являются произвольными, а связаны между собой некоторым универсальным соотношением

$$\Phi(l_{ik}, l_{im}, l_{in}, l_{ip}, l_{km}, l_{kn}, l_{kp}, l_{mn}, l_{mp}, l_{np}) = 0\ , \qquad (2)$$

вид которого не зависит от выбора пяти точек i, k, m, n, p и которое в нашем конкретном случае имеет вид определителя Кели-Менгера шестого порядка равного нулю:

$\forall i, k, m, n, p \in \mathfrak{M}$

$$D^1_{ikmnp,ikmnp} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l^2_{ik} & l^2_{im} & l^2_{in} & l^2_{ip} \\ 1 & l^2_{ik} & 0 & l^2_{km} & l^2_{kn} & l^2_{kp} \\ 1 & l^2_{im} & l^2_{km} & 0 & l^2_{mn} & l^2_{mp} \\ 1 & l^2_{in} & l^2_{kn} & l^2_{mn} & 0 & l^2_{np} \\ 1 & l^2_{ip} & l^2_{kp} & l^2_{mp} & l^2_{np} & 0 \end{vmatrix} = 0\ . \qquad (3)$$

Поскольку в общем случае $(n+1)$-точечный определитель Кели-Менгера с точностью до множителя равен квадрату объема n-симплекса с вершинами $i_1, i_2, \ldots, i_{n+1}$, т.е.

$$D^1_{i_1 i_2 \ldots i_{n+1}, i_1 i_2 \ldots i_{n+1}} = (-1)^{n+1} 2^n (n!)^2 (V_{i_1 i_2 \ldots i_{n+1}})^2 ,$$

то геометрический смысл соотношения (3) состоит в равенстве нулю объема четырехмерного симплекса $\mathfrak{M}_5$, все пять вершин которого лежат в трехмерной гиперплоскости.

Равенство (3) можно рассматривать как рядовую теорему евклидовой геометрии, но можно считать и фундаментальным физическим законом, поскольку представляет собой соотношение между измеряемыми на опыте расстояниями, которое может либо выполняться, либо нет.

Можно показать, что из (3) при дополнительных условиях типа неравенств ($D^1_{ik,ik} \geq 0$, $D^1_{ikm,ikm} \leq 0$, $D^1_{ikmn,ikmn} \geq 0$) получается вся трехмерная евклидова геометрия. На первый взгляд может показаться, что равенство (5) имеет слишком специальный вид и для того, чтобы получить его, необходимо знание геометрии. На самом деле к выражению (3) можно прийти совершенно независимым путем, не предполагающим предварительного знания геометрии.

Понимание этого обстоятельства имеет решающее значение для уяснения той основной идеи теории физических структур, которая позволяет получить соотношение (3), исходя из одного только факта существования феноменологической симметрии заданного ранга (в данном случае ранга $r = 5$).

Итак, мы видим, что между пятью произвольными точками i, k, m, n, p трехмерного евклидова пространства существует удивительная связь: с одной стороны, точки i, k, m, n, p совершенно произвольны, а с другой - десять расстояний l_{ik}, l_{im}, l_{in}, l_{ip}, l_{km}, l_{kn}, l_{kp}, l_{mn}, l_{mp}, l_{np} не являются произвольными, так как связаны между собой соотношением (3) и одно из них является вполне определенной (двузначной) функцией девяти других.

До сих пор мы были хорошо знакомы с бинарными причинно-следственными отношениями между событиями i и k, когда одно событие i является причиной другого события k, т.е. $i \to k$. Пытаясь понять природу физических законов, и в частности природу пространства и времени, мы сталкиваемся с новым, ранее неизвестным типом отношений. Примером таких полиарных отношений являются обычное (физическое) трехмерное евклидово пространство и каноническое одномерное время. Более того, оказывается, что на такого рода отношениях строится вся фундаментальная физика.

Геометрически факт существования фундаментального физического закона может быть описан следующим образом.

Рассматривая каждый симплекс $\mathfrak{M}_5$ как некоторый единый физический объект, припишем ему десять чисел - десять измеряемых на опыте расстояний (1). Рассматривая квадраты этих расстояний как десять координат симплекса $\mathfrak{M}_5$ в 10-мерном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^{10}$, мы тем самым сопоставляем каждому симплексу $\mathfrak{M}_5$ некоторую точку в $\mathbb{R}^{10}$. (Эту точку назовем характеристической точкой симплекса $\mathfrak{M}_5$, а само арифметическое пространство $\mathbb{R}^{10}$ - характеристическим пространством.)

Факт существования универсального соотношения (2) (или конкретно (3)) означает, что характеристические точки, соответствующие самым различным симплексам $\mathfrak{M}_5$, располагаются в характеристическом пространстве $\mathbb{R}^{10}$ не произвольно, а на некоторой поверхности (образуют 9-мерное многообразие класса C^∞), что и означает существование физической структуры (универсального физического закона) ранга 5 на одном множестве $\mathfrak{M}$.

Таким образом, мы видим, что с каждым симплексом $\mathfrak{M}_1$ связана характеристическая точка в нульмерном пространстве $\mathbb{R}^0$, с симплексом $\mathfrak{M}_2$ - точка в $\mathbb{R}^1$, с симплексом $\mathfrak{M}_3$ - точка в $\mathbb{R}^3$, ... ,с симплексом $\mathfrak{M}_r$ - точка в $\mathbb{R}^{\frac{1}{2}r(r-1)}$.

В случае, когда $\mathfrak{M}$ - множество точек трехмерного евклидова пространства, характеристические точки в $\mathbb{R}^0, \mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^6$ образуют многообразия той же самой размерности, что и сами пространства, т.е. занимают какую-то часть пространства целиком, и только при $r = 5$ возникает качественно новая ситуация: характеристические точки располагаются не во всем пространстве $\mathbb{R}^{10}$, а на его девятимерной гиперповерхности (представляющей собой 9-мерный конус, вписанный в 45-гранный координатный угол).

Но самое любопытное при этом состоит в том, что эта гиперповерхность, определяющая конкретный вид фундаментального физического закона, не может быть произвольной - вид ее однозначно задается рангом закона ($r = 5$) и размерностью $n = r-2$ многообразия $\mathfrak{M}$.

§3. О математической природе физических величин

Физическая величина, в отличие от вещественного числа, является объектом более сложной математической природы, а именно <u>числовой функцией</u> по крайней мере двух (а часто и большего числа) <u>нечисловых переменных</u>, т.е. $a: \mathfrak{M}\times\ldots\times\mathfrak{P}\to\mathbb{R}$ со значениями $a(i,\ldots,\lambda)$, где $\mathfrak{M}=\{i_1,i_2,\ldots\},\ldots,\ \mathfrak{P}=\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots\}$ - множества реальных физических объектов различной природы (тела, проводники, термодинамические состояния, измерительные приборы и т.п.).

Уже одно это обстоятельство накладывает на вид возможных физических законов существенные ограничения.

Так, например, если $x \in \mathbb{R}$ - вещественное число, то алгебраическое уравнение, например, вида $x^2 - 4x + 3 = 0$ имеет вполне определенный смысл; если же $m(i,\mu)$ - физическая величина, зависящая от тела i и измерительного прибора μ, то соотношение $m(i,\mu)^2 - 4m(i,\mu) + 3 = 0$ не инвариантно относительно выбора $i \in \mathcal{M}$ и $\mu \in \mathcal{P}$ и уже поэтому не может иметь физического смысла и уж тем более претендовать на роль физического закона.

Таким образом, одно только внимательное рассмотрение области определения $\mathcal{M} \times \ldots \times \mathcal{P}$ тех или иных физических величин, трактуемых как числовые функции нескольких нечисловых переменных (тел, проводников, измерительных приборов и т.п.) позволяет совершенно по-новому взглянуть на хорошо известные вещи, и в частности, на теорию размерности.

Общая идея состоит в том, чтобы смелее вводить в физику математический аппарат, позволяющий оперировать с объектами произвольной нечисловой природы. Ведь хорошо известно, что характерной особенностью физики, отличающей ее от других естественных наук, является наличие в ней, наряду с физическими объектами различной природы, множества измерительных операций, осуществляемых с помощью тех или иных измерительных приборов, и множества специально выделенных и фиксированных физических объектов - эталонов, вводимых для того, чтобы, как мы увидим ниже, исключить зависимость тех или иных физических величин от конкретных измерительных операций.

Но чтобы выяснить сущность и характерную особенность измерительных операций, чтобы понять все своеобразие и красоту известных физических законов, увидеть глубокое и нетривиальное значение для всей физики понятия размерности, чтобы ответить на ряд важных вопросов, касающихся выбора той или иной системы единиц, необходимо разобраться в тех физических законах, которые лежат в основании теории размерности физических величин. А для этого нужно подвергнуть разумной формализации те простейшие отношения, в которых находятся между собой физические объекты, эталоны и измерительные приборы.

§4. Основные соотношения евклидовой геометрии в теории физических структур

Начнем с определения трехмерного евклидова пространства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Будем говорить, что на множестве точек $\mathfrak{M} = \{i,k,m,\ldots\}$ имеет место структура трехмерного евклидова пространства, если существует измеряемая на опыте функция $a:\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}\to\mathbb{R}$ со значениями a_{ik}, симметричная $a_{ik} = a_{ki}$, обращающаяся в нуль при $i = k$, т.е. $a_{ii} = 0$ (называемая канонической функцией пары точек), такая, что имеет место фундаментальный физический закон, лежащий в основании трехмерной евклидовой геометрии:
$\forall i,k,m,n,p \in \mathfrak{M}$

$$D^1_{ikmnp,ikmnp} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{ik} & a_{im} & a_{in} & a_{ip} \\ 1 & a_{ik} & 0 & a_{km} & a_{kn} & a_{kp} \\ 1 & a_{im} & a_{km} & 0 & a_{mn} & a_{mp} \\ 1 & a_{in} & a_{kn} & a_{mn} & 0 & a_{np} \\ 1 & a_{ip} & a_{kp} & a_{mp} & a_{np} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

при следующих дополнительных условиях типа неравенств:

$$D^1_{ik,ik} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{ik} \\ 1 & a_{ik} & 0 \end{vmatrix} \geq 0$$

(положительная определенность a_{ik}),

$$D^1_{ikm,ikm} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{ik} & a_{im} \\ 1 & a_{ik} & 0 & a_{km} \\ 1 & a_{im} & a_{km} & 0 \end{vmatrix} \leq 0$$

("неравенство треугольника" - положительная определенность площади S_{ikm}),

$$D^1_{ikmn,ikmn} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{ik} & a_{im} & a_{in} \\ 1 & a_{ik} & 0 & a_{km} & a_{kn} \\ 1 & a_{im} & a_{km} & 0 & a_{mn} \\ 1 & a_{in} & a_{kn} & a_{mn} & 0 \end{vmatrix} > 0$$

(положительная определенность объема V_{ikmn}).

Введем понятия прямой и плоскости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что на подмножестве $\mathfrak{M}^{(1)} \subset \mathfrak{M}$ имеет место структура п р я м о й, если $\forall i,k,m \in \mathfrak{M}^{(1)}$

$$D^1_{ikm,ikm} = 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем говорить, что на подмножестве $\mathfrak{M}^{(2)} \subset \mathfrak{M}$ имеет место структура п л о с к о с т и, если $\forall i,k,m,n \in \mathfrak{M}^{(2)}$

$$D^1_{ikmn,ikmn} = 0.$$

Введем понятие "обобщенного определителя Кели–Менгера":

$$D^1_{i_1 i_2 \ldots i_r, k_1 k_2 \ldots k_r} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & a_{i_1 k_1} & a_{i_1 k_2} & \ldots & a_{i_1 k_r} \\ 1 & a_{i_2 k_1} & a_{i_2 k_2} & \ldots & a_{i_2 k_r} \\ & & \cdot \; \cdot \; \cdot & & \\ 1 & a_{i_r k_1} & a_{i_r k_2} & \ldots & a_{i_r k_r} \end{vmatrix}$$

Эти определители обладают рядом замечательных свойств, в частности, следующими свойствами аддитивности:

I. Если $D^1_{ikm,123} = 0$, то $(D^1_{ik,12})^2 = D^1_{ik,ik} D^1_{12,12}$ и

$$D^1_{ik,12} - D^1_{im,12} + D^1_{km,12} = 0 . \qquad (4)$$

2. Если $D^1_{ikmn\ 1234} = 0$, то

$$(D^1_{ikm,123})^2 = D^1_{ikm,ikm} D^1_{123,123}$$

и

$$D^1_{ikm,123} - D^1_{ikn,123} + D^1_{imn,123} - D^1_{kmn,123} = 0 . \qquad (5)$$

3. Если $D^1_{ikmnp,12345} = 0$, то

$$(D^1_{ikmn,1234})^2 = D^1_{ikmn,ikmn}\, D^1_{1234,1234}$$

и

$$D^1_{ikmp,1234} - D^1_{ikmp,1234} + D^1_{iknp,1234} - D^1_{imnp,1234} + D^1_{kmnp,1234} = 0. \quad (6)$$

Здесь I,2,3,4,5 - некоторые фиксированные точки $\in \mathfrak{M}$.

Введем расстояние между двумя точками i,k ,ориентированное относительно отрезка (I,2) :

$$l_{ik,12} = \frac{D^1_{ik,12}}{2^{1/2}\sqrt{D^1_{12,12}}} = l_{ik}\varepsilon_{ik,12},$$

где l_{ik} - обычное расстояние между точками i,k :

$$l_{ik} = \frac{1}{2^{1/2}}\cdot\sqrt{D^1_{ik,ik}} = \sqrt{a_{ik}};$$

$\varepsilon_{ik,12}$ - сигнатура, определяющая ориентацию отрезка (i,k) относительно отрезка (I,2), причем

$$\varepsilon_{ik,12} = \frac{D^1_{ik,12}}{\sqrt{D^1_{ik,ik}\, D^1_{12,12}}} = \pm 1 \qquad (\text{при } D^1_{ikm,123} = 0).$$

Из (4) следует чрезвычайно важное свойство аддитивности расстояний l_{ik}:

$$l_{ik}\varepsilon_{ik,12} - l_{im}\varepsilon_{im,12} + l_{km}\varepsilon_{km,12} = 0.$$

Введем площадь треугольника, построенного на трех произвольных точках i,k,m и ориентированного относительно треугольника (I, 2,3) :

$$S_{ikm,123} = -\frac{D^1_{ikm,123}}{2\cdot 2!\,\sqrt{-D^1_{123,123}}} = S_{ikm}\varepsilon_{ikm,123},$$

где S_{ikm} - обычная площадь треугольника (i,k,m):

$$S_{ikm} = \frac{1}{2\cdot 2!}\cdot\sqrt{-D^1_{ikm,ikm}};$$

$\varepsilon_{ikm,123}$ – сигнатура, определяющая ориентацию треугольника (i,k,m) относительно треугольника (I,2,3):

$$\varepsilon_{ikm,123} = \frac{-D^1_{ikm,123}}{\sqrt{(-D^1_{ikm,ikm})(-D^1_{123,123})}} = \pm 1 \quad (\text{при } D^1_{ikmn,1234} = 0).$$

Из (5) следует свойство аддитивности площадей S_{ikm}:

$$S_{ikm}\varepsilon_{ikm,123} - S_{ikn}\varepsilon_{ikn,123} + S_{imn}\varepsilon_{imn,123} - S_{kmn}\varepsilon_{kmn,123} = 0.$$

Аналогичным образом введем объем тетраэдра (i,k,m,n), ориентированного относительно тетраэдра (I,2,3,4):

$$V_{ikmn,1234} = \frac{D^1_{ikmn,1234}}{2^{3/2}\cdot 3!\sqrt{D^1_{1234,1234}}} = V_{ikmn}\cdot\varepsilon_{ikmn,1234},$$

где V_{ikmn} – обычный объем тетраэдра (i,k,m,n):

$$V_{ikmn} = \frac{1}{2^{3/2}\cdot 3!}\cdot\sqrt{D^1_{ikmn,ikmn}};$$

$\varepsilon_{ikmn,1234}$ – сигнатура, определяющая ориентацию тетраэдра (i,k,m,n) относительно тетраэдра (I,2,3,4):

$$\varepsilon_{ikmn,1234} = \frac{D^1_{ikmn,1234}}{\sqrt{D^1_{ikmn,ikmn}\,D^1_{1234,1234}}} = \pm 1$$

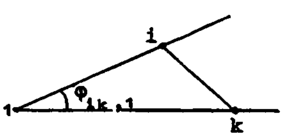
$$(\text{при } D^1_{ikmnp,12345} = 0).$$

Из (6) следует свойство аддитивности объемов V_{ikmn}:

$$V_{ikmn}\varepsilon_{ikmn,1234} - V_{ikmp}\varepsilon_{ikmp,1234} + V_{iknp}\varepsilon_{iknp,1234} - V_{imnp}\varepsilon_{imnp,1234} + V_{kmnp}\varepsilon_{kmnp,1234} = 0.$$

Приведем несколько формул, определяющих различные углы.

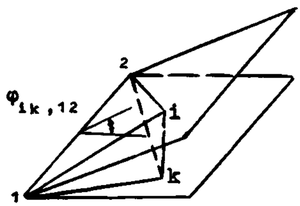
I. Плоский угол между двумя лучами $(1,i)$ и $(1,k)$:



$$\cos\varphi_{ik,1} = \frac{D^1_{1i,1k}}{\sqrt{D^1_{1i,1i}\,D^1_{1k,1k}}},$$

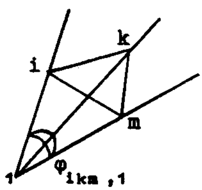
$$\sin\varphi_{ik,1} = \frac{(-D^1_{1ik,1ik})^{1/2}}{\sqrt{D^1_{1i,1i}\, D^1_{1k,1k}}}.$$

2. Двухгранный угол между двумя плоскостями (I,2,i) и (I,2,k):



$$\cos\varphi_{ik,12} = \frac{-D^1_{12i,12k}}{\sqrt{(-D^1_{12i,12i})(-D^1_{12k,12k})}}.$$

3. Телесный угол между тремя лучами (1,i), (1,k), (1,m):



$$\sin\varphi_{ikm,1} = \frac{D^1_{1ikm,1ikm}}{\sqrt{(-D^1_{1ik,1ik})(-D^1_{1im,1im})(-D^1_{1km,1km})}}.$$

Приведем, наконец, три формулы, выражающие декартовы координаты точки i через расстояния до произвольных четырех точек I,2,3,4, определяющих собой некоторую фиксированную систему отсчета:

$$x_i = \frac{D^1_{1i,12}}{2^{1/2}\sqrt{(-D^1_{1,1})D^1_{12,12}}},$$

$$y_i = \frac{(-D^1_{12i,123})}{2^{1/2}\sqrt{D^1_{12,12}(-D^1_{123,123})}},$$

$$z_i = \frac{D^1_{123i,1234}}{2^{1/2}\sqrt{(-D^1_{123,123})D^1_{1234,1234}}}.$$

Используя свойства обобщенных определителей Кели-Менгера, можно показать, что фундаментальный физический закон (3), записанный в феноменологически инвариантной форме, эквивалентен следующему хорошо известному соотношению, выражающему квадрат расстояния между точками i и k через их декартовы координаты:

$$a_{ik} = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2 . \qquad (7)$$

Соотношение (7) представляет собой каноническую форму физического закона (3), лежащего в основании трехмерной евклидовой геометрии.

Не может не броситься в глаза тот замечательный факт, что все основные понятия евклидовой геометрии очень просто выражаются через обобщенные определители Кели-Менгера - своего рода "родимые пятна", напоминающие о глубоких родственных связях евклидовой геометрии с теорией физических структур.

§5. Единицы измерений и размерность длины

Итак, в основании трехмерной евклидовой геометрии лежит фундаментальный физический закон (3), суть которого заключается в следующем: существует некоторая, измеряемая на опыте функция пары точек a_{ik}, десять значений которой, относящихся к произвольному набору из пяти точек, играют роль аргументов соответствующего определителя Кели-Менгера, обращающегося в нуль при любом выборе симплекса $\mathfrak{M}_5 = \{i, k, m, n, p\}$.

Далее можно показать, что если $D^1_{ikmnp,ikmnp} = 0$, то корень квадратный из этой функции обладает чрезвычайно важным свойством - свойством **аддитивности**. Это значит, что если три точки i, k, m лежат на прямой, т.е. если $D^1_{ikm,ikm} = 0$ и точка k лежит между точками i и m, то имеет место следующее соотношение:

$$\sqrt{a_{ik}} + \sqrt{a_{km}} = \sqrt{a_{im}} .$$

Таким образом, с точки зрения физика-теоретика, расстоянием l_{ik} между двумя точками i и k называется аддитивная величина, равная корню квадратному из фундаментальной функции пары точек a_{ik}, обращающей в нуль пятиточечный определитель Кели-Менгера, т.е. $l_{ik} = \sqrt{a_{ik}}$.

Итак, понятие расстояния между двумя точками

$$l_{ik} = \frac{1}{2^{1/2}} \cdot \sqrt{D^1_{ik,ik}} = \sqrt{a_{ik}} ,$$

так же как и две другие аддитивные физические величины: площадь

$$S_{ikm} = \frac{1}{2\cdot 2!}\cdot\sqrt{(-D^1_{ikm,ikm})}$$

и объем

$$V_{ikmn} = \frac{1}{2^{3/2}\cdot 3!}\sqrt{D^1_{ikmn,ikmn}}$$

являются, с точки зрения теоретика, вторичными, производными от a_{ik}. Однако, с точки зрения экспериментатора первичным понятием является все же расстояние l_{ik}, поскольку именно закон аддитивности расстояния $l_{ik}+l_{km}=l_{im}$ дает возможность изготовить соответствующий прибор - измерительную линейку λ с "равномерно" нанесенными на нее делениями*). А что касается фундаментальной функции пары точек a_{ik} в евклидовой геометрии, то она имеет следующий простой физический смысл: $a_{ik} = l^2_{ik}$.

Пусть $\mathcal{M} = \{i_1, i_2, \ldots\}$ - множество материальных тел, изготовленных в виде отрезков $i_1, i_2, \ldots$

Пусть $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots\}$ - множество отрезков $a_1, a_2, \ldots$, принятых за эталоны. Так, например, пусть a_1 - конкретный отрезок, называемый "метром"; a_2 - другой отрезок, называемый "дюймом", и т.д.

Принято считать, что процедура измерения длины сводится к откладыванию эталона вдоль измеряемого предмета. Но как быть, если эталон не укладывается целое число раз? Ведь эталон считается единым и неделимым.

Для любого измерения необходим измерительный прибор, предварительно никак не связанный с выбором эталона. В случае измерения длины таким прибором может служить линейка с равномерно нанесенной на нее достаточно мелкой шкалой. При этом величина деления берется совершенно произвольной.

Итак, пусть $\mathcal{P} = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$ - множество измерительных приборов (линеек) с различными равномерными шкалами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$

Заметим, что именно в этом, т.е. в выделении множества измерительных приборов $\mathcal{P}$ и множества эталонов $\mathcal{A}$ и состоит новизна и своеобразие нашего подхода к теории размерности, основанного на общих принципах теории физических структур.

---

*) Вопрос о том, что такое "равномерная шкала", не является простым. Однако при необходимости мы могли бы дать строго обоснованный алгоритм реализации такой шкалы без использования "твердого тела".

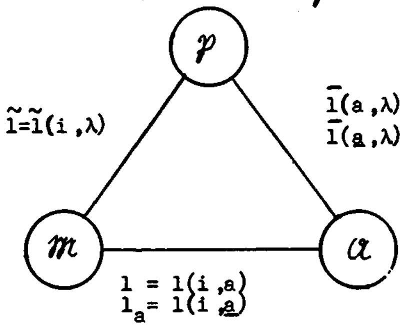
Прикладывая соответствующим образом линейку λ к отрезку i и к эталону a, получим числа $\tilde{l}(i,\lambda)$ и $\bar{l}(a,\lambda)$, равные числу соответствующих делений.

Таким образом, мы имеем три множества:

$\mathfrak{M}=\{i_1, i_2, \ldots\}$ – множество измеряемых отрезков,

$\mathfrak{A}=\{a_1, a_2, \ldots\}$ – множество эталонов длины,

$\mathfrak{P}=\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$ – множество измерительных приборов, на которых определены две числовые функции двух нечисловых переменных: $\tilde{l}: \mathfrak{M}\times\mathfrak{P}\to\mathbb{R}$ со значениями $\tilde{l}(i,\lambda)$ и $\bar{l}: \mathfrak{A}\times\mathfrak{P}\to\mathbb{R}$ со значениями $\bar{l}(a,\lambda)$



Физический мир устроен так, что, как показывает опыт, отношение

$$\frac{\tilde{l}(i,\lambda)}{\bar{l}(a,\lambda)}$$

не зависит от выбора измерительного прибора λ, т.е. имеет место равенство:

$$\frac{\tilde{l}(i,\lambda_1)}{\bar{l}(a,\lambda_2)} = \frac{\tilde{l}(i,\lambda_2)}{\bar{l}(a,\lambda_2)} = \ldots = l(i,a).$$

Итак, измеряемые на опыте величины $\tilde{l}(i,\lambda)$ и $\bar{l}(a,\lambda)$ зависят от выбора измерительного прибора λ. Однако введение эталона длины a позволяет исключить из рассмотрения измерительный прибор. Это осуществляется путем образования новой физической величины

$$l(i\ a) = \frac{\tilde{l}(i,\lambda)}{\bar{l}(a,\lambda)},$$

характеризующей собой физический объект i и не зависящей от измерительного прибора λ.

Таким образом, зная из опыта отображения $\tilde{l}$ и $\bar{l}$, находим непосредственное отображение $l: \mathcal{M}\times\mathcal{A}\to\mathbb{R}$, значения которого $l(i,a)$ входят в конкретные выражения для физического закона.

При фиксированном эталоне $a=\underline{a}\in\mathcal{A}$ отображение $\bar{l}: \mathcal{A}\times\mathcal{P}\to\mathbb{R}$ порождает одну числовую функцию одной нечисловой переменной – числовую функцию измерительного прибора λ: $\bar{l}_a(\lambda)=\bar{l}(\underline{a},\lambda)$, а отображение $l: \mathcal{M}\times\mathcal{A}\to\mathbb{R}$ порождает другую числовую функцию одной переменной – числовую функцию измеряемого отрезка i: $l_a(i)=l(i,\underline{a})$.

Все введенные выше числовые функции имеют простой и подчас неожиданный физический смысл:

1) числовая функция двух нечисловых переменных $\tilde{l}=\tilde{l}(i,\lambda)$ является эмпирической размерной длиной отрезка i;

2) числовая функция двух нечисловых переменных $\bar{l}=\bar{l}(a,\lambda)$ является размерностью длины и имеет свое обозначение $[L]=L(a,\lambda)=\bar{l}(a,\lambda)$;

3) числовая функция двух нечисловых переменных $l=l(i,a)$ является безразмерной длиной отрезка i;

4) числовая функция одной нечисловой переменной $\bar{l}_a(\lambda)=\bar{l}(\underline{a},\lambda)$ является единицей длины, определяемой эталоном $\underline{a}$, и имеет свое обозначение $[a]=[a]_\lambda=\bar{l}_a(\lambda)$;

5) числовая функция одной нечисловой переменной $l_a=l_a(i)=l(i,\underline{a})$ является безразмерной длиной отрезка i в единицах, определяемых эталоном a.

Все рассмотренные числовые функции связаны между собой следующими соотношениями:

$$\tilde{l}(i,\lambda)=l(i,a)L(a,\lambda)\ ,$$
$$\tilde{l}(i,\lambda)=l_a(i)[a]_\lambda\ .$$

Эмпирическая размерная длина $\tilde{l}$ инвариантна относительно выбора эталонов длины $a_1,a_2,\ldots$, т.е.

$$\tilde{l}=l_{a_1}[a_1]=l_{a_2}[a_2]=\ldots$$

Безразмерная длина l_a инвариантна относительно выбора измерительных приборов $\lambda_1,\lambda_2,\ldots$, т.е.

$$l_a=\frac{\tilde{l}_{\lambda_1}}{[a]_{\lambda_1}}=\frac{\tilde{l}_{\lambda_2}}{[a]_{\lambda_2}}=\ldots$$

По сложившейся традиции единицу длины $[a]$, т.е. числовую функцию $\bar{l}(\underline{a},\lambda)$, называют тем же именем, что и эталон длины a. Чтобы различать эталон a и одноименную с ним единицу длины $[a]$, будем имя эталона заключать в кавычки: если a_1 - "метр", а a_2 - "дюйм", то $\bar{l}(a_1,\lambda) = [a_1]_\lambda = \text{метр}_\lambda$ и $\bar{l}(a_2,\lambda) = [a_2]_\lambda = \text{дюйм}_\lambda$.

Отношение

$$\frac{\bar{l}(a_1,\lambda_1)}{\bar{l}(a_2,\lambda_1)} = \frac{\bar{l}(a_1,\lambda_2)}{\bar{l}(a_2,\lambda_2)}$$

не зависит от выбора измерительного прибора λ и в данном конкретном случае равно:

$$\frac{\bar{l}(a_1,\lambda)}{\bar{l}(a_2,\lambda)} = \frac{[a_1]_\lambda}{[a_2]_\lambda} = \frac{\text{метр}}{\text{дюйм}} = K_{12} = 39{,}37008.$$

Итак, все введенные понятия: эмпирическая размерная длина $\tilde{l}$, безразмерная длина l, безразмерная длина в единицах, определяемых эталоном $\underline{a}$, l_a, размерность длины $[L]$, единица длины, определяемая эталоном $\underline{a}$, $[a]$, связанные между собой соотношениями $\tilde{l} = l[L]$ и $\tilde{l} = l_a[a]$, суть обыкновенные числа (точнее, числовые функции от различных нечисловых переменных).

Таким образом, в последовательной и достаточно строгой теории размерности нет необходимости рассматривать такие полуинтуитивные и туманные понятия, как "именованные числа (?), состоящие (?) из численного значения (собственно числа) физической величины и наименования принятой единицы", как это делается при традиционном изложении теории размерности.

Очевидно, что под "именованным числом" следует понимать эмпирическую размерную длину $\tilde{l}$, под "численным значением длины" - безразмерную длину l_a в единицах, определяемых эталоном $\underline{a}$, под "наименованием принятой единицы" - единицу длины $[a]$, а под размерностью длины $[L]$ - числовую функцию двух нечисловых переменных $\bar{l}(a,\lambda)$.

Итак, когда мы говорим, например, что длина отрезка равна пяти метрам и записываем это в виде $l = 5$ м, то эту запись мы должны расшифровать следующим образом: слева стоит некоторое (вообще говоря, неизвестное) число $l = \tilde{l}(i,\lambda)$, означающее число делений, соответствующих отрезку i, если бы мы измеряли его линейкой со шкалой λ, а справа - произведение известного числа $l(i,\text{"метр"}) = 5$ на другое число (тоже, вообще говоря, неизвестное) $м = [\text{"метр"}]_\lambda =$

$= \tilde{1}$("метр", λ), означающее число делений, соответствующих "метру", если бы мы измеряли его линейкой с той же шкалой λ.

Итак, мы выяснили, что метр (м) как единица длины (в отличие от "метра" - эталона длины) представляет собой не какое-то "символическое наименование единицы длины", а обычную числовую функцию двух нечисловых переменных, одна из которых, например a, фиксирована (a = "метр"), а другая λ остается неопределенной.

Но если это так, то с этой функцией можно оперировать как с обыкновенным числом - умножать ее на число, возводить в степень, извлекать корни, складывать с другими числами, подставлять под знак логарифма, экспоненты, тригонометрических функций и т.п. Однако почему-то одни выражения, такие как 5 м, $м^3$, $\sqrt{м}$, считаются осмысленными, а другие, такие как м+5, м+м^2, ln м, $e^м$, sin м, - бессмысленными.

Дело в том, что в физике имеют смысл лишь такие соотношения, которые инвариантны относительно выбора конкретной измерительной процедуры (шкалы прибора). Очевидно, далеко не все соотношения удовлетворяют этому условию. Например, соотношения вида $м^2 - 4м + 3 = 0$ этому условию не удовлетворяют и поэтому считаются физически бессмысленными. Но, с другой стороны, не являются бессмысленными (хотя и не имеющими глубокого физического смысла) следующие соотношения: $\ln м^3 = 3 \ln м$ или $\sin 3м = 3\sin м - 4\sin^3 м$, представляющие собой тождества относительно м.

Соотношения между единицами длины м = 100 см и м = 39,37008 дюйма инвариантны относительно измерительной операции λ, и поэтому вполне осмысленными (хотя и не привычными) являются следующие равенства:

$$\ln м = 4{,}6052 + \ln см,$$

$$\ln м = 3{,}6738 + \ln дюйм.$$

Что же касается понятия размерности длины [L], то здесь мы только отметим, что она как бы вобрала в себя всю информацию, касающуюся сразу всех единиц длины, определяемых всеми эталонами. Эффективность и необходимость этого понятия станут очевидными при рассмотрении производных физических величин, проблему размерности которых мы рассмотрим во второй части этой статьи.

§6. Единицы измерений и размерность времени

В основании хронометрии, так же как и в основании евклидовой геометрии, лежит некоторый фундаментальный физический закон. Этот закон может быть сформулирован следующим образом: существует некоторая, измеряемая на опыте числовая функция пары событий, три значения которой a_{ik}, a_{im}, a_{km}, относящиеся к трем произвольным событиям $\{i, k, m\}$, играют роль аргументов соответствующего определителя Кели-Менгера, обращающегося в нуль при любом выборе симплекса $\mathfrak{M}_3 = \{i, k, m\}$, т.е.

$\forall\, i,k,m \in \mathfrak{M}$

$$D^1_{ikm,ikm} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a_{ik} & a_{im} \\ 1 & a_{ki} & 0 & a_{km} \\ 1 & a_{mi} & a_{mk} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

где $\mathfrak{M} = \{i, k, \ldots\}$ - множество произвольных событий, происходящих в одной и той же точке пространства.

Если функция a^*_{ik} антисимметрична, т.е. $a^*_{ik} = -a^*_{ki}$, то

$$D^1_{ikm,ikm} = -(a^*_{ik} + a^*_{km} + a^*_{mi})^2 = 0;$$

если же функция a_{ik} симметрична, т.е. $a_{ik} = a_{ki}$, то

$$D^1_{ikm\ ikm} = a^2_{ik} + a^2_{im} + a^2_{km} - 2(a_{ik}a_{im} + a_{im}a_{km} + a_{km}a_{ik}) =$$

$$= -(\sqrt{a_{ik}} + \sqrt{a_{im}} + \sqrt{a_{km}})(\sqrt{a_{ik}} + \sqrt{a_{im}} - \sqrt{a_{km}}) \times$$

$$\times(\sqrt{a_{ik}} - \sqrt{a_{im}} + \sqrt{a_{km}})(-\sqrt{a_{ik}} + \sqrt{a_{im}} + \sqrt{a_{km}}) = 0.$$

Таким образом, при любой последовательности событий i, k, m имеет место равенство $a^*_{ik} + a^*_{km} + a^*_{mi} = 0$, и можно считать $a^*_{ik} = t_{ik}$, где t_{ik} - антисимметрический промежуток времени между двумя событиями i и k.

Если событие k происходит между событиями i и m, то

$$\sqrt{a_{ik}} + \sqrt{a_{km}} - \sqrt{a_{im}} = 0,$$

и,следовательно, $\sqrt{a_{ik}} = \sqrt{t^2_{ik}} = |t_{ik}|$ или $a_{ik} = t^2_{ik}$.

В обоих случаях имеет место закон аддитивности промежутков времени

$$t_{ik} + t_{km} = t_{im}. \qquad (8)$$

Рассмотрим множество упорядоченных пар событий $\mathcal{K} = \{k_1, k_2, \ldots\}$, где $k_s = (j_{\underline{s}}, j_{\overline{s}}) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N}$, $j_{\underline{s}}$ и $j_{\overline{s}}$ – события пары k_s; при этом событие $j_{\underline{s}}$ предшествует событию $j_{\overline{s}}$.

Некоторые пары событий $b_1 = (j^0_{\underline{1}}, j^0_{\overline{1}})$, $b_2 = (j^0_{\underline{2}}, j^0_{\overline{2}}), \ldots$ объявим эталонными парами. Например, $j^0_{\underline{1}}$ и $j^0_{\overline{1}}$ – два последовательных удара колокола на башне королевского замка; $j^0_{\underline{2}}$ и $j^0_{\overline{2}}$ – прохождение звезд α и β через нить в поле зрения телескопа.

Множество всех эталонных пар событий обозначим через $\mathcal{A} = \{b_1, b_2, \ldots\}$.

Принято считать, что для измерения промежутка времени между двумя событиями в принципе необходим "равномерный периодический процесс" (колебания маятника, вращение Земли, электромагнитные колебания в резонаторе цезиевых часов и т.п.). В [8] подробно описан алгоритм нахождения градуировочной кривой $t_{ik} = \chi(\tau_{ik})$, позволяющий находить истинное аддитивное время t_{ik} по показаниям τ_{ik} (квазивремя) заведомо неравномерно идущих часов, не имея никаких других часов или периодических процессов, которые можно было бы принять в качестве "эталонов равномерности", а используя для этого только закон аддитивности (8). Зная этот алгоритм, нетрудно создать "равномерно идущие" часы без какого-либо эталона "равномерности".

Итак, пусть $\mathcal{P} = \{\tau_1, \tau_2, \ldots\}$ – множество "равномерно идущих" часов с произвольными шкалами $\tau_1, \tau_2, \ldots$

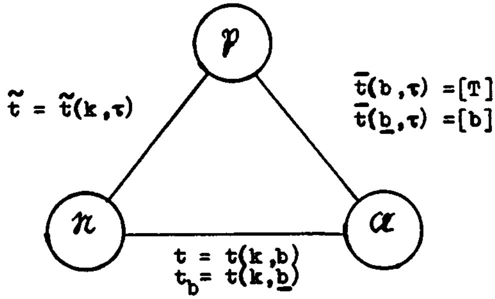
Используя часы τ, мы можем сопоставить каждой паре событий k и каждой эталонной паре b числа $\tilde{t}(k,\tau)$ и $\bar{t}(b,\tau)$, равные числу соответствующих делений на часах τ.

Таким образом, в данном случае, как и в случае измерения длины, мы имеем дело с тремя множествами:

$\mathcal{K} = \{k_1, k_2, \ldots\}$ – множество измеряемых пар событий,

$\mathcal{A} = \{b_1, b_2, \ldots\}$ – множество эталонных пар,

$\mathcal{P} = \{\tau_1, \tau_2, \ldots\}$ – множество равномерно идущих часов, на которых определены две числовые функции двух нечисловых переменных $\tilde{t}\colon \mathcal{K} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ со значениями $\tilde{t}(k,\tau)$ и $\bar{t}\colon \mathcal{A} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ со значениями $\bar{t}(b,\tau)$:



Итак, измеряемые на опыте величины $\tilde t(k,\tau)$ и $\bar t(b,\tau)$ зависят от выбора часов τ. Однако введение эталонного промежутка времени b позволяет исключить из рассмотрения часы τ. Это осуществляется путем образования новой физической величины

$$t(k,b) = \frac{\tilde t(k,\tau)}{\bar t(b,\tau)} ,$$

характеризующей собой промежуток времени k и не зависящей от часов τ.

Таким образом, зная из опыта отображения $\tilde t$ и $\bar t$, находим отображение $t\colon \mathcal{N}\times\mathcal{A}\to\mathbb{R}$, значения которого входят в конкретные физические формулы.

При фиксированном эталоне $\underline{b}\in\mathcal{A}$ отображение $\bar t\colon \mathcal{A}\times\mathcal{P}\to\mathbb{R}$ порождает одну числовую функцию одной нечисловой переменной – часов τ: $\bar t_b = \bar t(\underline{b},\tau) = [b]_\tau$, а отображение $t\colon \mathcal{N}\times\mathcal{A}\to\mathbb{R}$ порождает другую числовую функцию одной переменной – функцию измеряемого промежутка времени $t_b = t(k,\underline{b})$.

Все введенные выше числовые функции имеют простой физический смысл:

1) числовая функция двух нечисловых переменных $\tilde t = \tilde t(k,\tau)$ является *эмпирическим значением промежутка времени* k;

2) числовая функция двух нечисловых переменных $\bar t = \bar t(b,\tau)$ является *размерностью времени* и обозначается через $[T] = T(b,\tau) = \bar t(b,\tau)$;

3) числовая функция двух нечисловых переменных $t = t(k, b)$ является значением безразмерного промежутка времени k;

4) числовая функция одной нечисловой переменной $\bar{t}_b = \bar{t}(\underline{b}, \tau)$ является единицей времени, определяемой эталоном $\underline{b}$, и обозначается через $[b] = [b]_\tau = \bar{t}_b(\tau)$;

5) числовая функция одной нечисловой переменной $t_b = t(k, \underline{b})$ является значением безразмерного промежутка времени k в единицах, определяемых эталоном $\underline{b}$.

Все рассмотренные числовые функции связаны между собой следующими соотношениями:

$$\tilde{t}(k, \tau) = t(k, b) T(b, \tau) ,$$

$$\tilde{t}(k, \tau) = t_b(k) [b]_\tau .$$

Итак, подчеркнем еще раз все введенные понятия: эмпирическое значение промежутка времени $\tilde{t}$; значение безразмерного промежутка времени t; значение безразмерного промежутка времени в единицах, определяемых эталоном $\underline{b}$ – t_b, размерность времени $[T]$, единица измерения времени, определяемая эталоном $\underline{b}$ – $[b]$ – суть обыкновенные вещественные числа (точнее, числовые функции от различных нечисловых переменных).

§7. Закон Ньютона. Размерность и единицы измерений массы и силы

Запишем хорошо известный второй закон механики Ньютона

$$\mathcal{F} = ma \tag{9}$$

и зададим себе вопрос: что представляет собой это соотношение – закон природы или определение силы $\mathcal{F}$, подобно выражению

$$v = l/t , \tag{10}$$

являющемуся очевидным определением скорости?

Внешне соотношение (9) почти ничем не отличается от выражения (10). Однако между ними есть принципиальное различие.

Дело в том, что физические величины l, t, v, входящие в (10), являются числовыми функциями одних и тех же нечисловых переменных (функциями пары близких состояний движущегося тела $k = (\underline{k}, \bar{k})$), т.е.

$$l = l(k) \quad \text{или} \quad l: \mathcal{Q} \to \mathbb{R},$$
$$t = t(k) \quad \text{или} \quad t: \mathcal{Q} \to \mathbb{R},$$
$$v = v(k) \quad \text{или} \quad v: \mathcal{Q} \to \mathbb{R},$$

где $\mathcal{Q} = \{k_1, k_2, \ldots\}$ – множество пар близких состояний движущегося тела.

Что же касается закона Ньютона (9), то у входящих в него физических величин – массы m и силы $\mathcal{F}$ – иная математическая природа, чем у ускорения a. Так, масса m зависит от ускоряющего тела i и не зависит от акселератора α (поля или какого-нибудь ускоряющего механизма), сообщающего телу i ускорение $a_{i\alpha}$; сила $\mathcal{F}$, наоборот, зависит от акселератора α и не зависит от тела i. Что же касается ускорения a, то оно зависит как от тела i, так и от акселератора α.

Таким образом, масса m_i является некоторой числовой функцией <u>одной</u> нечисловой переменной – тела i, т.е. $m: \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, где $\mathcal{M} = \{i, k, \ldots\}$ – множество всех ускоряемых тел.

Сила $\mathcal{F}_\alpha$ является другой числовой функцией <u>одной</u> нечисловой переменной – акселератора α, т.е. $\mathcal{F}: \mathcal{N} \to \mathbb{R}$, где $\mathcal{N} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$ – множество всех акселераторов.

Ускорение же $a_{i\alpha}$ является числовой функцией <u>двух</u> нечисловых переменных – тела i и акселератора α, т.е. $a: \mathcal{M} \times \mathcal{N} \to \mathbb{R}$.

Итак, специально выделяя независимые нечисловые переменные $i \in \mathcal{M}$ и $\alpha \in \mathcal{N}$, перепишем закон Ньютона (9) в виде

$$m_i a_{i\alpha} = \mathcal{F}_\alpha . \tag{11}$$

Таким образом, закон Ньютона в форме (II) представляет собой связь между существенно разнородными физическими величинами – о д н о и н д е к с н ы м и массой m_i и силой $\mathcal{F}_\alpha$, с одной стороны, и д в у х и н д е к с н ы м ускорением $a_{i\alpha}$ – с другой.

Заметим, что, строго говоря, единственными измеряемыми величинами в механике являются координата, время, скорость и ускорение. В связи с этим перепишем закон Ньютона (II) в виде, не содержащем ни массы m_i, ни силы $\mathcal{F}_\alpha$. Для этого рассмотрим <u>два</u> тела i и k и <u>два</u> акселератора α и β:

$$m_i a_{i\alpha} = \mathcal{F}_\alpha , \qquad m_k a_{k\alpha} = \mathcal{F}_\alpha ,$$
$$m_i a_{i\beta} = \mathcal{F}_\beta , \qquad m_k a_{k\beta} = \mathcal{F}_\beta .$$

Исключая из написанных четырех уравнений $m_i, m_k, \mathcal{F}_\alpha, \mathcal{F}_\beta$, получаем следующее соотношение между четырьмя ускорениями:

$$a_{i\alpha}a_{k\beta} - a_{i\beta}a_{k\alpha} = 0 \ . \tag{12}$$

Это соотношение мы будем называть феноменологически инвариантной формой закона Ньютона.

Подчеркнем, что это соотношение не содержит ничего, кроме измеряемых на опыте ускорений, и может быть подвергнуто непосредственной экспериментальной проверке.

Заметим, что ничего подобного соотношению (12) в принципе нельзя получить из соотношения (10).

Примечательно, что второй закон механики Ньютона, записанный в виде (12), имеет явно выраженный универсальный, или, другими словами, феноменологически инвариантный характер, так как не зависит ни от выбора двух тел $i,k \in \mathfrak{M}$, ни от выбора двух акселераторов $\alpha,\beta \in \mathfrak{N}$, т.е.
$\forall i,k \in \mathfrak{M}, \quad \forall \alpha,\beta \in \mathfrak{N}$

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} \end{vmatrix} = 0 \ . \tag{13}$$

Заметим, что требование феноменологической инвариантности является чрезвычайно жестким условием, приводящим к соотношению (13) независимо от каких-либо физических соображений.

В самом деле, каждое из ускорений $a_{i\alpha}$ зависит от тела i и акселератора α, но существует такая функция от четырех ускорений $\Phi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{k\alpha}, a_{k\beta}) = 0$, которая обращается в тождественный нуль относительно четырех нечисловых переменных i,k,α,β:
$\forall i,k \in \mathfrak{M}, \quad \forall \alpha,\beta \in \mathfrak{N}$

$$\Phi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{k\alpha}, a_{k\beta}) = 0 \ . \tag{14}$$

С формальной стороны соотношение (14) представляет собой некоторую функциональную связь между четырьмя числовыми переменными, каждая из которых является функцией двух нечисловых переменных. Если потребовать, чтобы $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ были многообразиями и чтобы связь (14) сохраняла бы свой вид при любом выборе нечисловых переменных i,k,α,β (требование феноменологической инвариантности), то, как впервые показано в [2] и [3], соотношение (I3) является единственным соотношением, удовлетворяющим этому требованию. Другими словами, одно только требование инвариантности соотношения (I4) относительно выбора четырех нечисловых переменных i, k, α, β однозначно (с точностью до произвольного преобразования $\bar{a}_{i\alpha} = f(a_{i\alpha})$, зависящего от градуировки шкалы акселерометра и несущественного для построения теории) приводит ко второму закону механики Ньютона в феноменологически инвариантной форме (I2).

Итак, мы получили фундаментальное соотношение (I2) как достаточно тривиальное следствие из закона Ньютона, записанного в канонической форме (9). Но существенно, что здесь возможен и обратный переход: приняв в качестве исходной аксиомы факт существования соотношения (I2) между ускорениями (мы можем рассматривать его либо как опытный факт, либо как следствие из требования феноменологической инвариантности), мы сможем получить отсюда второй закон механики Ньютона в канонической форме (9) и одновременно с этим найти явные выражения для массы и силы через отношения соответствующих ускорений.

В самом деле, выберем в качестве эталонов из множества $\mathfrak{M}$ одно тело (например, тело k), а из множества $\mathfrak{N}$ один акселератор (например, акселератор β) и переобозначим их соответственно через M и F. Полагая в (I2) $k = M$, $\beta = F$, будем иметь:

$$a_{i\alpha}a_{MF} - a_{iF}a_{M\alpha} = 0$$

или

$$a_{i\alpha} = a_{MF}\,\frac{a_{iF}}{a_{MF}}\cdot\frac{a_{M\alpha}}{a_{MF}}\,. \tag{15}$$

Мы видим, что отношение ускорений $\dfrac{a_{i\alpha}}{a_{MF}}$ можно представить в виде произведения двух величин, одна из которых

$$\frac{a_{iF}}{a_{MF}} = \frac{a_{i\alpha'}}{a_{M\alpha'}} = \frac{a_{i\alpha''}}{a_{M\alpha''}} = \ldots \tag{16}$$

зависит только от тела i и эталона M и не зависит от акселератора α', а другая

$$\frac{a_{M\alpha}}{a_{MF}} = \frac{a_{i'\alpha}}{a_{i'F}} = \frac{a_{i''\alpha}}{a_{i''F}} = \ldots \tag{17}$$

зависит только от акселератора α и соответствующего эталона F и не зависит от тела i'.

Заметим, что, строго говоря, ускорение $a_{i\alpha}$ является числовой функцией не двух, а <u>трех</u> нечисловых переменных $\tilde{a}: \mathcal{M}\times\mathcal{N}\times\mathcal{P}\to R$ со значениями $\tilde{a}(i,\alpha,\omega)$, где $\mathcal{P} = \{\omega_1,\omega_2,\ldots\}$ – множество акселерометров – приборов для измерения ускорения с произвольными (но равномерными) шкалами $\omega_1,\omega_2,\ldots$

На основании равенств (I6) и (I7) введем понятия безразмерной массы $m(i,M)$ и безразмерной силы $\mathcal{F}(\alpha,F)$.

I. Назовем о т н о с и т е л ь н о й (безразмерной) м а с с о й тела i $m = m(i,M)$ – отношение величины, обратной тому ускорению, которое приобретает тело i под действием акселератора α', к величине, обратной тому ускорению, которое приобретает эталонное тело M под действием того же акселератора α', т.е.

$$m: \quad \mathcal{M}\times\mathcal{A}\to R,$$

$$m(i,M) = \frac{\tilde{a}(i,\alpha',\omega')^{-1}}{\tilde{a}(M,\alpha',\omega')^{-1}},$$

где $\mathcal{A} = \{M_1,M_2,\ldots\}$ – множество тел, принятых за эталон.

2. Назовем о т н о с и т е л ь н о й (безразмерной) с и л о й акселератора α $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\alpha,F)$ – отношение ускорения тела i под действием акселератора α к ускорению того же тела i под действием эталонного акселератора F, т.е.

$$\mathcal{F}: \quad \mathcal{N}\times\mathcal{B}\to R,$$

$$\mathcal{F}(\alpha,F) = \frac{\tilde{a}(i',\alpha;\omega')}{\tilde{a}(i',F;\omega')},$$

где $\mathcal{B} = \{F_1,F_2,\ldots\}$ – множество акселераторов, принятых за эталон.

Таким образом, соотношение (I5) может быть переписано в виде

$$\tilde{a}(i,\alpha;\omega) = \tilde{a}(M,F;\omega)\,\frac{\mathcal{F}(\alpha,F)}{m(i,M)}. \tag{18}$$

Это равенство представляет собой физический закон, связывающий между собой независимо измеряемые на опыте физические величины: определяемые в кинематике ускорения $\tilde{a}(i,\alpha;\omega)$ и $\tilde{a}(M,F;\omega)$ и две новые величины – массу $m(i,M)$ и силу $\mathcal{F}(\alpha,F)$.

Теперь, подобно тому, как это было сделано при рассмотрении длины и времени, введем понятия, связанные с массой.

I. Будем называть эмпирической (размерной) массой тела i величину $\tilde{m}=\tilde{m}(i,\alpha',\omega')$, обратную ускорению тела i, которое оно приобретает под действием акселератора α', или, более точно, величину, обратную тому числу делений акселерометра ω', которому соответствует ускорение тела под действием акселератора α', т.е.

$$\tilde{m}: \mathcal{M}\times\mathcal{N}\times\mathcal{P} \to R,$$

$$\tilde{m}(i;\alpha',\omega') = \frac{1}{\tilde{a}(i,\alpha';\omega')}.$$

2. Будем называть единицей измерения массы, определяемой эталоном M, величину $\bar{m} = \bar{m}(M;\alpha',\omega') = [M]_{\alpha',\omega'}$, обратную ускорению эталонного тела M, которое оно приобретает под действием акселератора α', или, другими словами, величину, обратную тому числу делений акселерометра ω', которому соответствует ускорение эталонного тела M под действием акселератора α', т.е.

$$\bar{m}: \mathcal{A}\times\mathcal{N}\times\mathcal{P}\to R,$$

$$\bar{m}(M;\alpha',\omega') = \frac{1}{\tilde{a}(M,\alpha';\omega')} = [M]_{\alpha',\omega'}.$$

Все три рассмотренные числовые функции связаны между собой следующим соотношением: $\tilde{m} = m[M]$.

Эмпирическая масса $\tilde{m}$ инвариантна относительно выбора эталонов массы $M_1, M_2, \ldots$

$$m(i;\alpha',\omega') = m(i,M_1)[M_1]_{\alpha',\omega'} = m(i,M_2)[M_2]_{\alpha',\omega'} = \ldots$$

Безразмерная масса m инвариантна относительно выбора акселератора α_1 и акселерометра ω_1:

$$m(i,M) = \frac{\tilde{a}(i,\alpha_1;\omega_1)^{-1}}{\tilde{a}(M,\alpha_1;\omega_1)^{-1}} = \frac{\tilde{a}(i,\alpha_2;\omega_2)^{-1}}{\tilde{a}(M,\alpha_2;\omega_2)^{-1}} = \ldots$$

Единица измерения массы

$$[M]_{\alpha',\omega'} = \frac{1}{\tilde{a}(M,\alpha';\omega')}$$

зависит как от выбора эталона массы M, так и от выбора акселератора α' и акселерометра ω'.

Итак, когда мы говорим, например, что масса тела i равна трем килограммам, и записываем это в виде $m = 3$ кг, то эту запись мы должны расшифровать следующим образом: слева стоит некоторое число

$$m = \tilde{m} = \frac{1}{\tilde{a}(i, \alpha'; \omega')},$$

обратное тому ускорению тела i, которое оно приобрело бы под действием акселератора α', если бы мы измеряли его акселерометром со шкалой ω', а справа - произведение вполне определенного числа

$$\frac{\tilde{a}(i, \alpha; \omega)^{-1}}{\tilde{a}(M, \alpha; \omega)^{-1}} = 3$$

на другое число

$$\text{кг} = [M] = \frac{1}{\tilde{a}(M, \alpha'; \omega')},$$

обратное тому ускорению эталонного тела - "килограмма", которое оно приобрело бы под действием того же акселератора α', если бы мы измеряли его тем же акселерометром ω'.

Аналогично введем понятия, связанные с силой.

I. Будем называть <u>эмпирической</u> (равномерной) <u>силой</u> акселератора α величину $\tilde{\mathcal{F}} = \tilde{\mathcal{F}}(\alpha; i', \omega')$, равную ускорению тела i', которое оно приобретает под действием акселератора α, или, другими словами, величину равную числу делений акселерометра ω', которому соответствует ускорение тела i' под действием акселератора:

$$\tilde{\mathcal{F}} : \quad \mathcal{N} \times \mathcal{M} \times \mathcal{P} \to R,$$

$$\tilde{\mathcal{F}}(\alpha; i', \omega') = a(i', \alpha; \omega).$$

2. Будем называть <u>единицей измерения силы</u>, определяемой эталонным акселератором F, величину $\bar{\mathcal{F}} = \mathcal{F}(F; i', \omega') = [F]_{i', \omega'}$, равную ускорению тела i', которое оно приобретает под действием эталонного акселератора F, или, другими словами, величину, равную числу делений акселерометра ω', которому соответствует ускорение тела

i' под действием эталонного акселератора F:

$$\bar{\mathcal{F}}: \quad \mathcal{L} \times \mathcal{M} \times \mathcal{P} \to R,$$

$$\bar{\mathcal{F}}(F;i',\omega') = a(i',F;\omega') = [F]_{i',\omega'} \,.$$

Все три рассмотренные числовые функции связаны между собой следующим соотношением: $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}[F]$.

Эмпирическая сила $\tilde{\mathcal{F}}$ инвариантна относительно выбора эталонных акселераторов $F_1, F_2, \ldots$

$$\tilde{\mathcal{F}}(\alpha;i',\omega') = \mathcal{F}(\alpha,F_1)[F_1]_{i',\omega'} = \mathcal{F}(\alpha,F_2)[F_2]_{i',\omega'} = \ldots$$

Безразмерная сила $\mathcal{F}$ инвариантна относительно выбора тела i_1 и акселерометра ω_1 :

$$\mathcal{F}(\alpha,F) = \frac{\tilde{a}(i_1,\alpha;\omega_1)}{\tilde{a}(i_1,F;\omega_1)} = \frac{\tilde{a}(i_2,\alpha;\omega_2)}{\tilde{a}(i_2,F;\omega_2)} = \ldots$$

Единица измерения силы

$$[F]_{i',\omega'} = \tilde{a}(i',F;\omega')$$

зависит как от выбора эталонного акселератора F, так и от выбора тела i' и акселерометра ω'.

Итак, когда мы говорим, например, что сила акселератора равна восьми ньютонам,и записываем это в виде $\mathcal{F} = 8$ н, то эту запись мы должны расшифровать следующим образом: слева стоит некоторое число $\mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}} = \tilde{a}(i',\alpha;\omega')$,равное ускорению тела i' под действием акселератора α, если бы мы измеряли его акселерометром со шкалой ω', а справа - произведение вполне определенного числа

$$\frac{\tilde{a}(i,\alpha;\omega)}{\tilde{a}(i,F;\omega)} = 8$$

на другое число $н = [F]_{i',\omega'} = \tilde{a}(i',F;\omega')$, равное ускорению того же тела i' под действием эталонного акселератора F, если бы мы измеряли его акселерометром со шкалой ω'.

Перейдем от эмпирического ускорения $a(i,\alpha;\omega)$ к относительному (безразмерному). Для этого рассмотрим какое-либо равноускоренное движение и примем его за эталон A.

Будем называть относительным (безразмерным) ускорением следующее отношение:

$$a(i,\alpha;A) = \frac{\tilde{a}(i,\alpha;\omega)}{a(A;\omega)} = \frac{\tilde{a}(i,\alpha;\omega)}{[A]_\omega},$$

где $[A]_\omega = \tilde{a}(A;\omega)$ – единица ускорения, определяемая эталоном A.

Таким образом, второй закон Ньютона (18) может быть записан в инвариантном относительно выбора эталонов M, F, A виде:

$$a(i,\alpha;A) = a(M,F;A)\frac{\mathcal{F}(\alpha,F)}{m(i,M)}. \tag{19}$$

Согласуем эталон F с эталонами M и A. Для этого выберем эталонный акселератор $F = F(M,A)$ так, чтобы $a(M,F(M,A);A) = 1$, тогда закон Ньютона примет привычный вид:

$$m(i,M)a(i,\alpha;A) = \mathcal{F}(\alpha,F(M,A)).$$

Воспользуемся соотношениями

$$m(i,M) = \frac{\tilde{m}(i;\alpha',\omega)}{[M]_{\alpha',\omega}},$$

$$\mathcal{F}(\alpha,F) = \frac{\tilde{\mathcal{F}}(\alpha;i',\omega)}{[F]_{i',\omega}}$$

и перепишем закон Ньютона (18) в виде

$$\tilde{a}(i,\alpha;\omega) = \tilde{a}(M,F;\omega)\frac{\tilde{\mathcal{F}}(\alpha;i',\omega)}{[F]_{i',\omega}}\cdot\frac{[M]_{\alpha',\omega}}{\tilde{m}(i;\alpha',\omega)} =$$

$$= \frac{\tilde{a}(M,F;\omega)}{\tilde{a}(i',F;\omega)\tilde{a}(M,\alpha';\omega)}\cdot\frac{\tilde{\mathcal{F}}(\alpha;i',\omega)}{\tilde{m}(i;\alpha',\omega)}.$$

Замечая, что

$$\frac{\tilde{a}(M,F;\omega)}{\tilde{a}(i',F;\omega)} = \frac{\tilde{a}(M,\alpha';\omega)}{\tilde{a}(i',\alpha';\omega)},$$

получим второй закон механики Ньютона в виде, инвариантном относительно выбора измерительных операций:

$$\tilde{a}(i,\alpha;\omega) = \frac{1}{\tilde{a}(i',\alpha';\omega)} \cdot \frac{\tilde{\mathcal{F}}(\alpha;i',\omega)}{\tilde{m}(i;\alpha',\omega)} \quad . \qquad (20)$$

Согласуем операции измерения массы $\tilde{m}$ и силы $\tilde{\mathcal{F}}$. Для этого выберем акселератор $\alpha' = \alpha'(i',\omega)$ так, чтобы $\tilde{a}(i',\alpha'(i',\omega),\omega) = 1$.

В этом случае закон Ньютона примет традиционный вид:

$$\tilde{m}(i;\alpha'(i',\omega),\omega)\tilde{a}(i,\alpha;\omega) = \tilde{\mathcal{F}}(\alpha;i',\omega) \ .$$

Замечая, что

$$\tilde{a}(i,\alpha;\omega) = a(i,\alpha;A)[A]_\omega \ ,$$

$$\tilde{m}(i;\alpha',\omega) = m(i,M)[M]_{\alpha',\omega} \ ,$$

$$\tilde{\mathcal{F}}(\alpha;i',\omega) = \mathcal{F}(\alpha,F)[F]_{i',\omega} \ ,$$

и используя обе формы второго закона механики Ньютона (I9) и (20), получим связь между размерностями силы, массы и ускорения:

$$[F]_{i',\omega} = \tilde{a}(i',\alpha';\omega)a(M,F;A)[M]_{\alpha',\omega}[A]_\omega \ .$$

Таким образом, только в случае согласованности эталонов,когда $a(M,F;A) = 1$, и согласованности измерительных операций, когда $a(i',\alpha';\omega)=1$, имеет место известное "уравнение размерности": $[F]=$ $= [M][A]$.

В заключение автор выражает глубокую благодарность и почтительную признательность доктору технических наук Юрию Гавриловичу Косареву за его постоянный и живой интерес к нашим работам, за предложенную тему настоящей статьи и терпеливую редакторскую работу.

Литература

I. КУЛАКОВ Ю.И. Элементы теории физических структур. Новосибирск, НГУ, I968. - 225 с.

2. КУЛАКОВ Ю.И. Математическая формулировка теории физических структур. -Сиб. мат. журн., I97I, т.XII, №5, с.II42.

3. КУЛАКОВ Ю.И. О теории физических структур. -В кн.: Записки научных семинаров ЛОМИ, т.I27. Ленинград, I983, с.I03-I5I.

4. МИХАЙЛИЧЕНКО Г.Г. Решение функциональных уравнений в теории физических структур. -Докл. АН СССР, I972, т.206, №5, с.I056.

5. MIKHAYLITCHENKO G.G. Géométries à deux dimensions dans la théorie de structures physiques.- C.R.Acad.Sci.Paris,1981,t. 293. Série I-529.

6. ЛЕВ В.Х. Алгебры Ли в теории физических структур. - Настоящий сборник, с.89-94.

7. КУЛАКОВ Ю.И. Естественная таблица химических элементов.-В кн.: Структурный анализ символьных последовательностей (Вычислительные системы, вып. I0I). Новосибирск, I984, с. 82-90.

8. КУЛАКОВ Ю.И. Время как физическая структура. - В кн.: Развитие учения о времени в геологии. Киев, I982, с.I26-I50.

Поступила в ред.изд.отд.
3 сентября I985 года