МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПЛЕНОЧНОЙ ЭЛЕКТРОМЕХАНИКЕ
(Вычислительные системы)
1985 год Выпуск II0

УДК 512.81

АЛГЕБРЫ ЛИ В ТЕОРИИ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР

В.Х.Лев

В исследованиях по основаниям физики Ю.И.Кулаков [I,2] высказал предположение о существовании нового типа симметрии - феноменологической симметрии. Новая симметрия выражает идею равноправия физических объектов некоторого рода по отношению к физическому закону, действующему для этих объектов. Изучение феноменологической симметрии составляет предмет теории физических структур.

Вопрос о существовании физических структур на двух множествах был полностью решен Г.Г.Михайличенко [3]. Он же [4] исследовал физическую структуру ранга $r = 4$. Оказалось, что бинарной структурой ранга $r = 4$ обладает геометрия двумерных метрических пространств. Естественно предположить, что и геометрия n-мерных метрических пространств является конкретной интерпретацией бинарной физической структуры ранга $r = n+2$ на одном множестве.

Известно, что задание метрики на множестве $\mathfrak{M}$ определяет геометрию пространства $\mathfrak{M}$. По известной метрике можно найти полную группу преобразований пространства $\mathfrak{M}$, относительно которой метрика является двухточечным инвариантом. На основании этого Г.Г.Михайличенко [5] высказал предположение о связи групповой и феноменологической симметрий.

Основным результатом настоящей работы является установление того факта, что алгебры Ли как математический объект, имеющий определенные свойства, появляются в теории физических структур как необходимое следствие аксиом, которые первоначально определены для теории физических структур.

Каждой алгебре Ли, по третьей обратной теореме Ли, соответствует определенная группа Ли. Таким образом, феноменологическая симметрия, характеризующая полиарные отношения между физическими объектами различной природы, порождает групповую симметрию, которая приводит к особым инвариантам, характеризующим свойства этих объектов.

Этот результат позволяет глубже понять основания теории физических структур и ее связь с другими разделами теоретической физики.

Заметим, что для доказательства не требуются никакие дополнительные соображения, понятия и постулаты типа движение, твердое тело, постоянство метрики, группа и т.д.

Далее показано, что каждой физической структуре определенного ранга соответствует система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, которая в некотором смысле имеет единственное решение. При исследовании этой системы и условий ее совместности возникают алгебры Ли соответствующей размерности: структуре ранга $r = n+2$ соответствует $n(n+1)/2$-мерная алгебра Ли.

Рассмотрим краткую постановку задачи и приведем схему доказательства на примере физической структуры ранга $r = 4$.

Пусть даны произвольное множество $\mathfrak{M}$ с элементами $i, j, k, l, \ldots$ и функция $a:\ \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to R$, сопоставляющая каждой паре $\langle ij \rangle \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ вещественное число $a(ij) \in R$. Потребуем, чтобы множество $\mathfrak{M}$ было топологическим многообразием размерности $n = 2$. Тогда функция $a(ij)$ будет иметь локальное представление $a(ij) = f(x_i, y_i, x_j, y_j)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Будем говорить, что пара $\langle \mathfrak{M}, a \rangle$ образует физическую структуру ранга $r = 4$, если для любых четырех точек i, $j, k, l \in \mathfrak{M}$ имеет место зависимость

$$\Phi\,[a(ij), a(ik), a(il), a(jk), a(jl), a(kl)] = 0\ . \qquad (1)$$

Потребуем, чтобы функция $a(ij) = f(x_i, y_i, x_j, y_j)$ была достаточно гладкая и существенным образом зависела от своих аргументов. На функцию Φ наложим ограничение $\operatorname{grad} \Phi \neq 0$.

Продифференцируем соотношение (I) по всем восьми параметрам: $x_i, y_i, x_j, y_j, x_k, y_k, x_l, y_l$.Получим систему из восьми дифференциальных уравнений относительно шести частных производных функции Φ . Матрица системы имеет вид:

$$
\begin{Vmatrix}
\frac{\partial f(ij)}{\partial x(i)} & \frac{\partial f(ik)}{\partial x(i)} & \frac{\partial f(il)}{\partial x(i)} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\partial f(ij)}{\partial y(i)} & \frac{\partial f(ik)}{\partial y(i)} & \frac{\partial f(il)}{\partial y(i)} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\partial f(ij)}{\partial x(j)} & 0 & 0 & \frac{\partial f(jk)}{\partial x(j)} & \frac{\partial f(jl)}{\partial x(j)} & 0 \\
\frac{\partial f(ij)}{\partial y(j)} & 0 & 0 & \frac{\partial f(jk)}{\partial y(j)} & \frac{\partial f(jl)}{\partial y(j)} & 0 \\
0 & \frac{\partial f(ik)}{\partial x(k)} & 0 & \frac{\partial f(jk)}{\partial x(k)} & 0 & \frac{\partial f(kl)}{\partial x(k)} \\
0 & \frac{\partial f(ik)}{\partial y(k)} & 0 & \frac{\partial f(jk)}{\partial y(k)} & 0 & \frac{\partial f(kl)}{\partial y(k)} \\
0 & 0 & \frac{\partial f(il)}{\partial x(l)} & 0 & \frac{\partial f(jl)}{\partial x(l)} & \frac{\partial f(kl)}{\partial x(l)} \\
0 & 0 & \frac{\partial f(il)}{\partial y(l)} & 0 & \frac{\partial f(jl)}{\partial y(l)} & \frac{\partial f(kl)}{\partial y(l)}
\end{Vmatrix} \qquad (2)
$$

Так как, по условию, $\mathrm{grad}\,\Phi \neq 0$, то система имеет нетривиальное решение. Следовательно, любой определитель шестого порядка равен нулю. Можно показать, что определитель пятого порядка (отмеченный пунктиром) не равен нулю. Таким образом, ранг матрицы (2) равен пяти. Выпишем три определителя шестого порядка, окаймляющие указанный определитель пятого порядка, и разложим их по первому столбцу. Фиксируя индексы k, l, получим систему из трех независимых дифференциальных уравнений относительно функции $f(x_i, y_i, x_j, y_j)$:

$$
\frac{\partial f(ij)}{\partial x(i)} A_1^{\mu}(i) + \frac{\partial f(ij)}{\partial y(i)} A_2^{\mu}(i) + \frac{\partial f(ij)}{\partial x(j)} A_1^{\mu}(j) + \frac{\partial f(ij)}{\partial y(j)} A_2^{\mu}(j) = 0, \quad (3)
$$

где $\mu = 1,2,3$; $A_1^{\mu}(i) = A_1^{\mu}(x_i, y_i)$, $A_1^{\mu}(j) = A_1^{\mu}(x_j, y_j)$ и т.д. Отметим, что система (3) является полной и ее решение имеет вид: $f(ij) = \Psi[\varphi(x_i, y_i, x_j, y_j)]$, где Ψ - произвольная функция одного аргумента (единственность решения), а φ - интеграл системы. Полная система всегда совместна, т.е. удовлетворяются уравнения совместности, которые получаются при образовании $[\mu, \nu]$-скобок для каждой пары уравнений. Они имеют вид, аналогичный системе (3):

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial x(i)}B_1^{\nu}(i)+\frac{\partial f(ij)}{\partial y(i)}B_2^{\nu}(i)+\frac{\partial f(ij)}{\partial x(j)}B_1^{\nu}(j)+\frac{\partial f(ij)}{\partial y(j)}B_2^{\nu}(j)=0, \qquad (4)$$

где $\nu = 1,2,3$.

Запишем общую матрицу коэффициентов систем (3) и (4):

$$\begin{Vmatrix} A_1^1(i) & A_2^1(i) & A_1^1(j) & A_2^1(j) \\ A_1^2(i) & A_2^2(i) & A_1^2(j) & A_2^2(j) \\ A_1^3(i) & A_2^3(i) & A_1^3(j) & A_2^3(j) \\ B_1^1(i) & B_2^1(i) & B_1^1(j) & B_2^1(j) \\ B_1^2(i) & B_2^2(i) & B_1^2(j) & B_2^2(j) \\ B_1^3(i) & B_2^3(i) & B_1^3(j) & B_2^3(j) \end{Vmatrix}. \qquad (5)$$

Обозначая столбцы матрицы (5) слева направо через $[1]_i,[2]_i$, $[1]_j,[2]_j$, систему из (3) и (4) можно записать в виде:

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial x(i)}[1]_i+\frac{\partial f(ij)}{\partial y(i)}[2]_i+\frac{\partial f(ij)}{\partial x(j)}[1]_j+\frac{\partial f(ij)}{\partial y(j)}[2]_j=0\ . \qquad (6)$$

Возьмем дополнительную точку $p \in \mathfrak{M}$ и аналогичным образом для кортежей $\langle ipkl \rangle$ и $\langle pjkl \rangle$ получим

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f(ip)}{\partial x(i)}[1]_i+\frac{\partial f(ip)}{\partial y(i)}[2]_i+\frac{\partial f(ip)}{\partial x(p)}[1]_p+\frac{\partial f(ip)}{\partial y(p)}[2]_p=0, \\ &\frac{\partial f(pj)}{\partial x(p)}[1]_p+\frac{\partial f(pj)}{\partial y(p)}[2]_p+\frac{\partial f(pj)}{\partial x(j)}[1]_j+\frac{\partial f(pj)}{\partial y(j)}[2]_j=0. \end{aligned} \qquad (7)$$

Рассматривая уравнения (6) и (7) как систему относительно шести неизвестных $[1]_i$, $[2]_i$, $[1]_j$, $[2]_j$, $[1]_p$, $[2]_p$, разрешим ее относительно $[1]_i$, $[2]_i$, $[1]_j$. Получим

$$\begin{aligned} &[1]_i+F_1(ijp)[2]_j+F_2(ijp)[1]_p+F_3(ijp)[2]_p=0, \\ &[2]_i+F_4(ijp)[2]_j+F_5(ijp)[1]_p+F_6(ijp)[2]_p=0. \end{aligned} \qquad (8)$$

Соотношения (8) указывают на линейную зависимость соответствующих столбцов, т.е. ранг матриц $\|[1]_i, [2]_j, [1]_p, [2]_p\|$ и $\|[2]_i, [2]_j, [1]_p, [2]_p\|$ равен трем. Выпишем из первой матрицы определитель четвертого порядка, состоящий из первых четырех строк и четырех столбцов:

$$\begin{vmatrix} A_1^1(i) & A_2^1(j) & A_1^1(p) & A_2^1(p) \\ A_1^2(i) & A_2^2(j) & A_1^2(p) & A_2^2(p) \\ A_1^3(i) & A_2^3(j) & A_1^3(p) & A_2^3(p) \\ B_1^1(i) & B_2^1(j) & B_1^1(p) & B_2^1(p) \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим этот определитель по первому столбцу и зафиксируем индексы j, p:

$$B_1^1(i) = a_1 A_1^1(i) + a_2 A_1^2(i) + a_3 A_1^3(i),$$

где a_1, a_2, a_3 - константы. Аналогично из матрицы $\|[2]_i, [2]_j, [1]_p, [2]_p\|$ получим

$$B_2^1(i) = a_1 A_2^1(i) + a_2 A_2^2(i) + a_3 A_2^3(i).$$

Точно так же можно получить соотношения:

$$B_1^1(j) = a_1 A_1^1(j) + a_2 A_1^2(j) + a_3 A_1^3(j),$$

$$B_2^1(j) = a_1 A_2^1(j) + a_2 A_2^2(j) + a_3 A_2^3(j),$$

т.е. первое уравнение совместности из (4) является линейной комбинацией уравнений основной системы (3) с постоянными коэффициентами. Аналогичный вывод можно сделать и для остальных уравнений системы (4).

Запишем полученные результаты в операторной форме:

$$\left.\begin{aligned} & X_\mu f(ij) = 0 \text{ - система (3)}, \\ & [X_\mu, X_\nu] f(ij) = 0 \text{ - система (4)}, \\ & [X_\mu, X_\nu] = c^\varkappa_{\mu\nu} X_\varkappa, \quad \mu, \nu, \varkappa = 1, 2, 3. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Здесь $c^\varkappa_{\mu\nu}$ - вещественные числа, причем $c^\varkappa_{\mu\nu} = -c^\varkappa_{\nu\mu}$, и

$$[X_\mu, [X_\nu, X_\varkappa]] + [X_\nu, [X_\varkappa, X_\mu]] + [X_\varkappa, [X_\mu, X_\nu]] = 0$$

- из свойств уравнений совместности. Таким образом, физическое структуре ранга $r = 4$ соответствуют трехмерные алгебры Ли. В общем случае исследование физической структуры ранга $r = n+2$ проводится аналогично.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что пара $\langle \mathfrak{M}, a \rangle$ задает физическую структуру ранга $r = n+2$, если для любых r точек $i, j, k, \dots, v, w \in \mathfrak{M}$ имеет место зависимость:

$$\Phi[a(ij), \dots, a(iw), a(jk), \dots, a(jw), \dots, a(vw)] = 0 , \qquad (10)$$

где $\mathfrak{M}$ – топологическое многообразие размерности n; $a(ij) = f(x_i^1, \dots, x_i^n, x_j^1, \dots, x_j^n)$ – достаточно гладкая функция, существенным образом зависящая от своих аргументов, и $\operatorname{grad} \Phi \neq 0$.

Соотношение (10) исследуется так же, как и в случае структуры ранга $r = 4$. Окончательно приходим к выводу: физической структуре ранга $r = n+2$ соответствуют $n(n+1)/2$-мерные алгебры Ли.

Можно показать, что для структуры ранга $r = n+2$ не существует алгебр Ли размерности, меньшей чем $n(n+1)/2$.

В настоящей работе не ставилась цель найти функции $a(ij)$ и Φ в явном виде. Но, решая систему (9), это можно сделать. В частности, для физической структуры ранга $r = 4$ из системы (9) автором найдены все двумерные геометрии, полученные Г.Г.Михайличенко [4] групповым методом, и впервые найдены все трехмерные геометрии (физическая структура ранга $r = 5$).

В заключение автор выражает благодарность чл.-кор. О.А.Ладыженской за интерес к работе, стимулирующий исследования по данному вопросу. Автор благодарен также Ю.И.Кулакову и Г.Г.Михайличенко за полезные замечания и обсуждения.

Литература

1. КУЛАКОВ Ю.И. Элементы теории физических структур.- Новосибирск, 1968.- 174 с. (НГУ).

2. КУЛАКОВ Ю.И. О новом виде симметрии, лежащем в основании физических теорий феноменологического типа.- Докл.АН СССР, 1971, т.201, № 3, с.570-572.

3. МИХАЙЛИЧЕНКО Г.Г. Решение функциональных уравнений в теории физических структур.-Докл.АН СССР, 1972, т.206, № 5, с.1056-1058.

4. МИХАЙЛИЧЕНКО Г.Г. Двумерные геометрии.-Докл.АН СССР, 1981, т.260, № 4, с.803-805.

5. МИХАЙЛИЧЕНКО Г.Г. О групповой и феноменологической симметриях в геометрии.-Сиб.мат. журн., 1984, т.XXV, № 5, с.99-113.

Поступила в ред.-изд.отд.
1 июля 1985 года