МЕТОДЫ АНАЛИЗА ДАННЫХ
(Вычислительные системы)
1985 год Выпуск 111

УДК 519.81

АНАЛИЗ ЭКСПЕРТНЫХ ПРЕДПОЧТЕНИЙ

В.Ф.Новиков

Общепринятое правило для принятия решений можно сформулировать следующим образом. Составляется список всех вариантов действия и всех возможных последствий каждого действия. Для каждого последствия определяется полезность и вероятность его появления в случае определенного действия. По этим данным находится ожидаемая полезность каждого действия и выбирается действие с наибольшей ожидаемой полезностью.

При нахождении полезности альтернатив возникает задача анализа предпочтений эксперта с целью выявления системы аксиом, описывающей его предпочтения и последующего представления в виде функции полезности либо в виде конструктивной модели. Эта задача включена в диалоговую систему логического анализа данных ЛАДА [1]. В работе показана возможность ее решения в случае, когда система предпочтений удовлетворяет аксиомам решетки.

В настоящее время известно много аксиоматических систем, описывающих предпочтения эксперта. Для таких предпочтений, как слабый порядок, интервальное упорядочивание, полуупорядочивание, построены числовые представления [2], которые называются функцией полезности. Обозначая через $u(x)$ функцию полезности, $\preccurlyeq$ – отношение предпочтения, x, x' – некоторые альтернативы из множества всех альтернатив X, оцениваемых экспертом, по определению, имеем:

$$u: X \to R, \quad x \preccurlyeq x' \Leftrightarrow u(x) \le u(x'). \tag{1}$$

Наиболее развитая теория полезности построена в предположении, что множество альтернатив X является подмножеством пространства R^n.

Наличие определенных аксиом независимости, присущих системе предпочтений эксперта, позволяют построить функции полезности достаточно простого вида [3]:

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f[u_1(x_1), u_2(x_2), \ldots, u_n(x_n)], \qquad (2)$$

где $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X \subseteq R^n$, $u_i(x_i)$ - функция полезности для i-й компоненты вектора $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, f - скалярная функция.

К таким аксиомам (при условии, что $\preccurlyeq$ -предпочтение есть слабый порядок) относятся допущения аддитивной независимости, независимости по предпочтению, независимости по полезности и т.д. Например, в случае аддитивной независимости функция полезности (2) имеет вид:

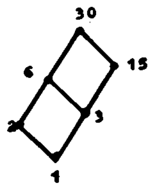
$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x_i).$$

В тех случаях, когда указанные выше аксиомы независимости не выполнены, используются более тонкие свойства, позволяющие свести функцию полезности к композиции функций меньшей размерности или использовать непосредственное нахождение функции полезности путем установления значений полезности нескольких альтернатив и последующей интерполяции. С этой целью можно применять библиотеку программ LIDA-2, представляющую собой комплекс программ на языке ФОРТРАН [4], предназначенный для решения задач обработки экспериментальных данных (интерполирование, сглаживание, фильтрация сеточных функций одной и многих переменных).

Описанный выше класс числовых представлений не охватывает всего многообразия структур предпочтений эксперта. В частности, исследования показывают, что человеческие предпочтения могут быть нетранзитивными (см., например, [5]) и, следовательно, не представимы с помощью функции полезности (I). Обобщением числовых представлений может служить конструктивное числовое представление предпочтений [I,6]. При конструктивном представлении объектам сопоставляются натуральные числа таким образом, чтобы отношениям на альтернативах X соответствовали эффективно вычислимые функции, принимающие значение "I" в случае выполнения отношения и "0" - в противном случае.

Интересным является случай, когда предпочтения эксперта описываются аксиомами решетки, т.е. множество альтернатив X есть частично упорядоченное множество $\langle X, \preccurlyeq \rangle$ и для любых $x_1, x_2 \in X$ существует верхняя и нижняя грани $\sup(x_1, x_2)$ и $\inf(x_1, x_2)$.

Приведем пример конструктивного представления класса конеч - ных дистрибутивных решеток с помощью алгоритма Бартолоцци (см.,например, [7]).



Наименьшему элементу 0 решетки сопоставляется число I, а ее атомам $p_1, p_2, \ldots, p_n$ - пер - вые n простых чисел. Пусть натуральные числа приписаны всем элементам высоты h. Если эле - мент высоты h+1 покрывает несколько элементов меньшей высоты, мы приписываем ему число, равное наименьшему общему кратному всех чисел,соответствующих элементам, которые a покрывает. Если элемент покрывает точно один элемент, обозначенный числом k, то меткой для a будет произведение kp, где p - первое из еще не использованных простых чисел (см.рисунок). Таким образом, отношение частичного порядка и тернарные отношения $\langle x_1, x_2, \sup(x_1, x_2) \rangle$, $\langle x_1, x_2, \inf(x_1, x_2) \rangle$ есть эффективно вычислимые функции: наименьшее общее кратное для $\sup(x_1, x_2)$ и наибольший общий делитель для $\inf(x_1, x_2)$.

Предположим, что мы каким-либо образом (например, с помощью системы ЛАДА) обнаружили, что система предпочтений эксперта удовлетворяет аксиомам решетки и в результате опроса эксперта получена некоторая конечная решетка A . Тогда задача конструктивного описания структуры предпочтений выглядит следующим образом:

Для данной конечной решетки A построить класс конструктив - ных числовых представлений $\mathcal{L}(A)$ такой, что любая конечная решетка L, удовлетворяющая всем тождествам (квазитождествам),истинным на A, эффективно вложима в некоторую решетку $l \in \mathcal{L}(A)$.

Заметим, что мы не ставим задачи обнаружения системы аксиом, выполненной на решетке A, поскольку хотя любая конечная решетка имеет конечный базис тождеств [8], практическое его нахождение достаточно сложно. В случае, когда система аксиом задается в виде квазитождеств, задача принципиально неразрешима, поскольку дока - зано [9], что не существует независимого базиса квазитождеств для конечной решетки M_{3-3} и,более того, установлено, что любая конечная решетка вложима в конечную решетку, не имеющую независимого базиса квазитождеств.

В случае квазитождеств из теоремы 4 [10,с.273] следует, что любая конечная решетка L , удовлетворяющая всем квазитождествам истинным на A, вложима в одну из степеней $A, A^2, \ldots, A^n$, где n ограничено числом пар $(a,b) \in L^2$ таких, что $b \leq a$ и не существует $x \in L$ такого, что $b \lneq x \lneq a$. Пару (a,b) в этом случае обозначают $b \prec a$ и говорят, что a покрывает b.

Для тождеств аналогичный результат следует из формулы Йонсона для конгруэн-дистрибутивных многообразий и звучит таким образом.

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – подрешетки и их гомоморфные образы конечной решетки A, тогда любая решетка L, на которой истинны те же тождества, что и на A, вложима в прямое произведение $A_1^{n_1} \times A_2^{n_2} \times \ldots \times A_k^{n_k}$, где число $n = n_1+n_2+\ldots+n_k$ ограничено так же, как и в предыдущем случае.

Остановимся на использовании системы ЛАДА для анализа экспертных предпочтений. Одним из средств системы является метод обнаружения закономерностей [11]. Метод обнаружения закономерностей может на подходящих данных обнаружить любую конечно-выразимую экспериментальную зависимость, задаваемую, в частности, тождествами или квазитождествами. Это следует из теоремы [12], в которой утверждается, что если эмпирические данные описываются некоторой совокупностью универсальных формул W, то формула Φ выводима из совокупности W тогда и только тогда, когда она является вероятностной закономерностью. Таким образом, обнаруживая нужные нам вероятностные закономерности, мы найдем все конечно-выразимые следствия экспериментальной зависимости W, а стало быть, и саму экспериментальную зависимость W.

Автор выражает благодарность Туманову В.И. за ряд полезных замечаний.

Литература

1. ВИТЯЕВ Е.Е., МОСКВИТИН А.А. ЛАДА – программная система логического анализа данных. –Настоящий сборник, с.38–58.

2. ФИШБЕРН П. Теория полезности для принятия решений. – М.: Наука, 1978. – 352 с.

3. КИНИ Р.Л., РАЙФА Х. Принятие решения при многих критериях: предпочтения и замещения. –М.: Радио и связь, 1981. – 560 с.

4. ВАСИЛЕНКО В.А., ЗЮЗИН М.В., КОВАЛКОВ А.В. Сплайн-функция и цифровые фильтры. –Новосибирск, 1984. – 156 с. (ВЦ СО АН СССР).

5. КОЗЕЛЕЦКИЙ Ю. Психологическая теория решений. –М.: Прогресс, 1979. – 503 с.

6. ВИТЯЕВ Е.Е. Конструктивное числовое представление величин. –Настоящий сборник, с.23–32.

7. САЛИЙ В.Н. Решетки с единственными дополнениями.-М.: Наука, I984. - I26 с.

8. McKENZIE R.N. Equational bases for lattice theories.-Math. Scand.,1970,v.27,p.24-38.

9. ТУМАНОВ В.И. О конечных решетках, не имеющих независимого базиса квазитождеств.-Математические заметки, I984, т. 36, № 5, с. 625-634.

I0. МАЛЬЦЕВ А.И. Алгебраические системы. - М.: Наука, I970. - 392 с.

II. ВИТЯЕВ Е.Е. Метод обнаружения закономерностей и метод предсказания. -В кн.: Эмпирическое предсказание и распознавание образов (Вычислительные системы, вып. 67). Новосибирск,I976,с.54-68.

I2. ВИТЯЕВ Е.Е. Обнаружение закономерностей, выраженных универсальными формулами. -В кн.: Эмпирическое предсказание и распознавание образов (Вычислительные системы, вып. 79). Новосибирск, I979, с. 57-59.

Поступила в ред.-изд.отд.
I0 сентября I985 года