МЕТОДЫ АНАЛИЗА ДАННЫХ
(Вычислительные системы)
1985 год Выпуск III

УДК 510

ОБ ОДНОМ РАСШИРЕНИИ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ ЦЕРМЕЛО-ФРЕНКЕЛЯ

А.С.Нудельман

В данной работе строится расширение теории множеств Цермело-Френкеля ZF - теория ZF_e. Эпистемологические приемы, приведшие к формулировке аксиом ZF и ZF_e,аналогичны. Аналогия этих приемов заключается в следующем. Все аксиомы ZF , за исключением аксиомы бесконечности, можно рассматривать в качестве результата экстраполяции (переноса) свойств конечных множеств на бесконечные множества. Ясно, что такая экстраполяция была прямой, т.е. состояла просто в принятии некоторых простейших утверждений, истинных на конечных множествах, истинными и на бесконечных. Что касается аксиом ZF_e, не являющихся аксиомами ZF, то все эти аксиомы тоже можно рассматривать в качестве результата экстраполяции на бесконечные множества одного из наиболее простых свойств конечных множеств, а именно независимости результата пересчета элементов конечного множества от порядка выбора этих элементов при пересчете. Поскольку прямая экстраполяция такого свойства невозможна, то это свойство экстраполируется косвенно.

В работе приводится обоснование предположения о том,что теория ZF_e является преемником теории ZF в следующем смысле: всякое ZF-предложение X,неразрешимое в ZF, но доказуемое в ZF_e (одно из таких предложений - отрицание континуум-гипотезы), является косвенным следствием аксиом ZF, т.е. имеет с аксиомами ZF более тесную связь, чем $\neg X$.

I. Введем исходные обозначения и соглашения. Класс всех множеств будем обозначать через V,а класс всех ординалов - через On. Если x - множество, то через $|x|$ будем обозначать мощность,через $S(x)$- множество-сумму $\{v \mid \exists w \in x(v \in w)\}$, а через $P(x)$ - множество-степень $\{v \mid v \subseteq x\}$ этого x. Через ω_0 будем обозначать мини -

мальный бесконечный кардинал, а через ω_α ($\alpha \in On$ и $\alpha > 0$) - минимальный кардинал, превосходящий все ω_β, $\beta < \alpha$. Кардинал $|P(x)|$, $x \in V$, будем обозначать иногда через $2^{|x|}$. Через $D(x)$ будем обозначать отображение $V \to V$ такое, что $D(x) = \{v \subseteq x | S(v) \in x\}$.

Для удобства изложения будем считать, что язык ZF содержит достаточное (в любых случаях) число функциональных символов, которые вводятся и используются по обычным правилам. Термы, термы-константы и формулы ZF будем называть ZF-термами, ZF-констан - тами и ZF-формулами. Если в тексте встречается упоминание о ZF-терме, содержащем функциональный символ f, то предполагается, что символ f ранее уже введен.

2. Сформулируем теорию ZF_e. Формулы ZF_e - это формулы сиг - натуры $\Sigma_e = \langle \in, \simeq, \varkappa \rangle$, содержащей три двухместных предикатных символа. Символ $\in$ обозначает обычное отношение (на V) принадлежности, символ $\simeq$ - отношение квазиравенства, а символ $\varkappa$ - отноше - ние совместимости. Смысл отношений принадлежности, квазиравенства и совместимости определяется аксиомами и правилами вывода ZF_e. Об отношениях квазиравенства и совместимости предварительно можно сказать следующее: если t_1 и t_2 - ZF -константы, то выражение $t_1 \simeq t_2$ означает, что множества, именуемые термами t_1 и t_2, похожи (структурно), а выражение $\varkappa(t_1, t_2)$ означает, что ZF-формула $|t_1| = |t_2|$ совместима с аксиомами ZF.

Заметим, что язык ZF является частью языка ZF_e; поэтому всякий ZF-терм и всякая ZF-формула являются также ZF_e-термом и ZF_e-формулой.

Логическая основа ZF_e - это исчисление предикатов (с равен - ством) сигнатуры Σ_e. Все аксиомы ZF (с аксиомой выбора) являются аксиомами ZF_e. Новых аксиом - три.

Первая аксиома фиксирует исходный шаг косвенной экстраполяции.

Аксиома A_1. $\forall x, y (x \in On \ \& \ y \in On \ \& \ |x| = |y| \to x \simeq y)$.

С помощью аксиомы A_1 свойство конечных ординалов, выражаемое доказуемой в ZF формулой $\forall x, y (|x|, |y| < \omega_0 \to (x, y \in On \ \& \ |x| = |y| \to x = y))$, переносится на бесконечные ординалы, причем так, чтобы не противоречить ZF (очевидно, прямая экстраполяция этого свойства конечных ординалов невозможна). Аксиома A_1 "наделяет" бесконечные множества, пожалуй, наиболее простым и естественным свойством конечных множеств - независимостью результата пересчета элементов конечного множества от порядка выбора этих элементов при пересчете (математически такое свойство описывается так: если

N_1 и N_2 – взаимно-однозначные отображения одного и того же конечного множества на ординалы α_1 и α_2, то $\alpha_1 = \alpha_2$).

Вторая аксиома выражает "реальный" смысл отношения квазиравенства (похожести).

А к с и о м а A_2. $\forall x,y(x \simeq y \to |x| = |y|)$.

Этой аксиомой постулируется, что (единственным) "реальным" следствием квазиравенства двух множеств является их равномощность – самая слабая форма одинаковости этих множеств. Ясно, что аксиома A_2 согласована с аксиомой A_1 в том смысле, что конъюнкция A_1 & A_2 не противоречит ZF.

Последняя аксиома (схема аксиом) определяет переходы от квазиравенств одних множеств к квазиравенствам других. Эта аксиома мотивируется фундаментальным свойством отношения равенства, а именно: для всякого отображения φ: $V \to V$ имеет место $\forall x,y(x = y \to \to \varphi(x) = \varphi(y))$.

В соответствии с идеей косвенной экстраполяции квазиравенство (похожесть) равномощных ординалов, постулируемое аксиомой A_1, может "распространяться" на множества других видов не любыми отображениями $(V \to V)$, а только равномерными. Понятие равномерного отображения является сугубо интуитивным. Здесь предполагается, что всякому отображению φ $(:V \to V)$ можно поставить в соответствие некий "алгоритм" $A(\varphi)$, реализующий это φ, т.е. некий алгоритм "построения" по любому исходному $a \in V$ множества $\varphi(a)$. Здесь предполагается также, что для всякого отображения φ "алгоритм" $A(\varphi)$ – простейший и его структура соответствует простейшему из определений этого φ (структура "алгоритма" $A(\varphi)$ идентична структуре простейшего из алгоритмов $A(\varphi \restriction K)$, реализующих ограничение φ на классе всех наследственно конечных множеств K). Наконец, здесь предполагается, что отображение φ будет равномерным тогда и только тогда, когда похожесть множеств $\varphi(a)$ и $\varphi(b)$ является интуитивным следствием свойств (структуры) "алгоритма" $A(\varphi)$ и похожести множеств a и b, т.е. когда анализ структуры "алгоритма" $A(\varphi)$ не дает никаких оснований для того, чтобы не принять похожесть (гипотезу о равенстве неравных) множеств $\varphi(a)$ и $\varphi(b)$ при условии, что похожесть (гипотеза о равенстве неравных) множеств a и b уже принята. Проиллюстрируем понятие равномерного отображения примерами – как положительными, так и отрицательными.

Примерами равномерных отображений служат однородные отображения – отображения, именуемые однородными термами в ZF_e. Одно –

родные (в ZF_e) термы определяются следующим образом (для указания того, что терм t содержит точно одну переменную, будем писать $t(x)$):

1) если $t(x) = S(x)$, то t – однородный терм;

2) если $t(x) = P(x)$, то t – однородный терм;

3) если $t_1(x)$ и $t_2(x)$ – однородные термы и если $t(x) = t_1(t_2(x))$, то t – однородный терм;

4) если $t_1(x)$ и $t_2(x)$ – однородные термы, переменные z_1, $z_2 \in \{v, x\}$ и если $t(x) = \{v \in x \mid t_1(z_1) \in t_2(z_2)\}$, то t – однородный терм. (Ясно, что всякий однородный терм является ZF-термом.)

Отметим, что отображение $D(x)$ однородно, поскольку однородны $B(x) = \{v \in x \mid S(v) \in S(x)\}$ и $C(x) = B(P(x)) = \{v \in P(x) \mid S(v) \in S(P(x))\} = \{v \subseteq x \mid S(v) \in x\} = D(x)$.

Примером неравномерного служит отображение

$$\phi_1(x) = \begin{cases} c_1, \text{если } \exists v \in x(|v| = \omega_0), \\ c_2 - \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где c_1 и c_2 – некоторые множества. Это отображение не будет равномерным, поскольку в "алгоритме" $A(\phi_1)$, реализующем отображение ϕ_1, используется свойство (в данном случае $\exists v \in x(|v| = \omega_0)$), характеризующее особенность того или иного множества-аргумента; ясно, что похожесть множеств $\phi_1(a)$ и $\phi_1(b)$ не может индуцироваться похожестью множеств a и b (в силу структуры "алгоритма" $A(\phi_1)$). Отображение $\phi_2(x) = c$, где c – некоторое множество, тоже не будет равномерным, так как "алгоритмом" $A(\phi_2)$ множество-аргумент вообще не "обрабатывается"; ясно, что похожесть множеств $\phi_2(a)$ и $\phi_2(b)$ не индуцируется похожестью множеств a и b (если $\phi_2(a)$ и похоже на $\phi_2(b)$, то эта похожесть существует сама по себе, вне связи с похожестью множеств a и b). Не будет равномерным и отображение $\phi_3(x) = |x|$, поскольку в "алгоритме" $A(\phi_3)$ не используются сами элементы множества-аргумента (элементы множества $\phi_3(a)$ не определяются через элементы множества a).

А к с и о м а A_3 (аксиомная схема). Если терм $t(x)$ однороден, то предложение $\forall x, y(x \simeq y \to (\pi(t(x), t(y)) \to t(x) \simeq t(y)))$ является аксиомой.

Аксиома A_3 выражает тот факт, что квазиравенство (похожесть) может "распространяться" только однородными отображениями. В данной работе понятие однородного отображения охватывает только простейшие равномерные отображения (понятия начальных однородных отображений взяты из аксиом суммы и степени теории ZF). Ясно, что ограничение класса отображений, используемых в схеме A_3, только простейшими, способно увеличить вероятность для ZF_e быть непротиворечивой (относительно ZF) теорией. Ясно также, что дальнейшее сужение класса однородных отображений (за счет сужения понятия "простейшее отображение") может привести к построению хотя и непротиворечивой теории, однако такой, которая будет консервативным расширением теории ZF. Если, например, в определении понятия однородного терма исключить условие 4, то ZF_e станет консервативным расширением ZF, поскольку в ZF доказуемо следующее: для всякого отображения $\varphi: V \to V$, являющегося (произвольной) суперпозицией отображений $S(x)$ и $P(x)$ (т.е. для всякого однородного - в новом смысле - отображения φ), и для всяких равномощных ординалов α_1 и α_2 имеет место равенство $|\varphi(\alpha_1)| = |\varphi(\alpha_2)|$. Это утверждение доказывается индукцией по числу элементарных суперпозиций, используемых при построении φ; при этом учитываются следующие факты: а) $\forall x,y(|x|=|y| \to |P(x)| = |P(y)|)$; б) $\forall x(S(P(x)) = x)$; в) $\forall x \in On(S(x) \in On)$ и г) $\forall x,y \in On(|x| = |y| \to |S(x)| = |S(y)|)$.

Аксиома A_3, кроме того, утверждает, что квазиравенство индуцируется только в том случае, когда его "реальное" следствие не противоречит ZF. Этим правилом утверждается безусловный приоритет свойств (бесконечных) множеств, "приобретенных" этими множествами в результате прямой экстраполяции. Отсутствие в аксиоме A_3 подформулы $\pi(t(x),t(y))$ привело бы к заведомо противоречивой теории, поскольку аксиомой будет, например, формула $\forall x,y(x \simeq y \to D(x) \simeq D(y))$, из которой выводится, что $\omega_0 \simeq \omega_0+1 \to D(\omega_0) \simeq D(\omega_0+1)$, затем, применяя A_1, получим формулу $D(\omega_0) \simeq D(\omega_0+1)$ и, наконец, применяя A_2, получим равенство $|D(\omega_0)| = |D(\omega_0+1)|$, т.е. $\omega_0 = 2^{\omega_0}$.

Доказательство в ZF_e формулы Φ - это последовательность $\Phi_0,\dots,\Phi_n$ формул ZF_e такая, что $\Phi_n = \Phi$ и для каждого $i \le n$ формула Φ_i удовлетворяет одному из следующих условий:

1) Φ_i - аксиома исчисления предикатов сигнатуры Σ_e;

2) Φ_i - аксиома ZF_e;

3) Φ_i получается из некоторых Φ_j, $j < i$, по одному из правил исчисления предикатов сигнатуры Σ_e;

4) Φ_i - формула вида $\pi(t_1,t_2)$, где t_1 и t_2 - ZF-термы, снабженная комментарием, содержащим выразимое средствами ZF доказательство утверждения: если ZF непротиворечива, то $ZF+|t_1|=$

$= |t_2|$ - непротиворечива (предполагая геделевскую нумерацию g формул и доказательств теории ZF зафиксированной, можно сказать, что комментарий содержит доказательство в ZF формулы $\mathrm{Consis}^g(ZF) \to$
$\to \mathrm{Consis}^g(ZF + |t_1| = |t_2|)$).

3. ЛЕММА. Для всякого ординала α справедливы равенства:

$$\text{а) } |D(\omega_{\alpha+1})| = 2^{\omega_\alpha} \quad \text{и} \quad \text{б) } |D(\omega_{\alpha+1}+1)| = 2^{\omega_{\alpha+1}} .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha \in On$.

Докажем "а". Поскольку $\omega_\alpha \in \omega_{\alpha+1}$, имеем $P(\omega_\alpha) \subseteq D(\omega_{\alpha+1})$, откуда $|P(\omega_\alpha)| \le |D(\omega_{\alpha+1})|$. Поскольку $\forall \beta \in \omega_{\alpha+1}(|\beta| \le \omega_\alpha)$, получаем $|D(\omega_{\alpha+1})| \le ||P(\omega_\alpha)| \times \omega_{\alpha+1}| = |P(\omega_\alpha)|$..

Доказательство "б" следует из равенства $D(\omega_{\alpha+1}+1) = P(\omega_{\alpha+1}) \cup$
$\cup \{x \cup \{\omega_{\alpha+1}\} | x \in P(\omega_{\alpha+1})\}$. □

МЕТАТЕОРЕМА. Для всякого ординала α, если совместимость равенства $2^{\omega_\alpha} = 2^{\omega_{\alpha+1}}$ с аксиомами ZF доказуема средствами ZF, то равенство $2^{\omega_\alpha} = 2^{\omega_{\alpha+1}}$ доказуемо в ZF_e.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha \in On$. Рассмотрим ординалы $\omega_{\alpha+1}$ и $\omega_{\alpha+1}+1$. Ясно, что $\omega_{\alpha+1} \simeq \omega_{\alpha+1}+1$ (аксиома A_1). Поскольку $D(x)$ - однородное отображение, предложение $\forall x,y(x \simeq y \to (\pi(D(x),D(y)) \to$
$\to D(x) \simeq D(y)))$ будет аксиомой ZF_e (схема A_3), откуда следует $\pi(D(\omega_{\alpha+1}), D(\omega_{\alpha+1}+1)) \to D(\omega_{\alpha+1}) \simeq D(\omega_{\alpha+1}+1)$. Отметим, что эта импликация будет доказуемой в ZF_e.

Поскольку совместимость равенства $2^{\omega_\alpha} = 2^{\omega_{\alpha+1}}$ с аксиомами ZF доказуема средствами ZF (условие метатеоремы) и поскольку в ZF лемма доказуема, то средствами ZF будет доказуема совместимость с аксиомами ZF равенства $|D(\omega_{\alpha+1})| = |D(\omega_{\alpha+1}+1)|$, т.е. в ZF_e будет доказуемо утверждение $\pi(D(\omega_{\alpha+1}), D(\omega_{\alpha+1}+1))$. Следовательно, в ZF_e будет доказуемо квазиравенство $D(\omega_{\alpha+1}) \simeq D(\omega_{\alpha+1}+1)$, а затем (применением A_2) - равенство $|D(\omega_{\alpha+1})| = |D(\omega_{\alpha+1}+1)|$, т.е. $2^{\omega_\alpha} =$
$= 2^{\omega_{\alpha+1}}$. □

ТЕОРЕМА.

$$2^{\omega_0} = 2^{\omega_1} .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из метатеоремы следует, что если равенство $2^{\omega_0}=2^{\omega_1}$ совместимо с аксиомами ZF и факт совместимости доказуем средствами ZF, то равенство $2^{\omega_0}=2^{\omega_1}$ доказуемо в ZF_e. Совместимость равенства $2^{\omega_0}=2^{\omega_1}$ с аксиомами ZF доказана [4,с.126] методом вынуждения, выразимым средствами теории ZF. □

Ясно, что эта теорема отрицает равенство $2^{\omega_0}=\omega_1$ (континуум-гипотезу), поскольку $2^{\omega_1} \neq \omega_1$.

4. Приведем обоснование предположения о том, что ZF_e - преемник теории ZF. Будем называть экстраполяционной теорию ZF_e и всякую теорию, получаемую из ZF_e путем замены аксиомы A_1 на другую, "наделяющую" бесконечные множества каким-то другим простейшим свойством конечных множеств и имеющую вид $\forall x,y(R(x,y) \to x \simeq y)$, где $R(x,y)$ - формула с двумя свободными переменными x и y такая, что в ZF доказуемы предложения:

а) $\forall x,y(|x|,|y| < \omega_0 \to (R(x,y) \to x = y))$,

б) $\exists x,y(R(x,y) \& x \neq y)$.

Аксиому A_1 будем называть аксиомой исходного квазиравенства теории ZF_e. Аксиомой исходного квазиравенства любой другой экстраполяционной теории будем называть аксиому, заменяющую при построении этой теории аксиому A_1. Будем говорить, что в экстраполяционной теории множества a и b квазиравны исходно, если квазиравенство $a \simeq b$ непосредственно следует из аксиомы исходного квазиравенства этой теории (в доказательстве факта $a \simeq b$ не используется аксиома A_3).

<u>ГИПОТЕЗА h_1.</u> Среди экстраполяционных теорий непротиворечивой (относительно ZF) является только теория ZF_e.

ОБОСНОВАНИЕ. Непротиворечивость теории ZF_e представляется весьма вероятной ввиду следующих двух обстоятельств. Во-первых, нет никаких серьезных оснований для исключения возможности существования косвенной экстраполяции свойств конечных множеств на бесконечные. Но если косвенная экстраполяция возможна в принципе, то существует непротиворечивая (относительно ZF) экстраполяционная теория. И, во вторых, если существует непротиворечивая экстраполяционная теория, то таковой должна быть теория ZF_e, которая характеризуется следующим: а) в ZF_e исходно квазиравны наиболее, пожалуй, похожие множества из неравных – (равномощные) ординалы, при этом похожесть ординалов друг с другом проявляется в идентичности их структур (структура ординала α определяется тем, что его элементами являются только ординалы, причем все ординалы, меньшие этого α); б) однородные отображения (как, впрочем, и все равномерные) обладают, по-видимому, свойством сохранять идентичность структур, а именно: если φ – однородное отображение и если структуры множеств x и y идентичны, то структуры множеств $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$ будут тоже идентичными. Действительно, из "а" и "б" следует, что вероятность доказуемости квазиравенства $a \simeq b$ в ZF_e существует тогда, когда структуры множества a и b идентичны. А такая ситуация позволяет надеяться на то, что в ZF_e непосредственно (т.е. одноразовым использованием аксиомы A_3 и последующим использованием A_2) недоказуемы равенства $x=y$ и $x=z$ при условии, что в ZF доказуемо $y \neq z$ (например, в ZF_e непосредственно доказуемо $2^{\omega_0}=2^{\omega_1}$, и не видно никаких путей для нахождения однородного отображения φ и множеств a и b таких, что $a \simeq b$, структуры множеств $\varphi(a)$ и $\varphi(b)$ идентичны, в ZF доказуемы $|\varphi(a)|=2^{\omega_0}$ и $|\varphi(b)| = \omega_1$). Кроме того, такая ситуация позволяет надеяться на то, что совокупность всех неразрешимых в ZF равенств, непосредственно доказуемых в ZF_e, будет совместима с аксиомами ZF.

Противоречивость всякой экстраполяционной теории, отличной от ZF_e, представляется тоже весьма вероятной. Рассмотрим, например, экстраполяционную теорию $ZF_e^!$ с аксиомой исходного квазиравенства (аксиома предложена В.Ю.Сазоновым) $A_1^!$: $\forall x,y(x \subseteq y \,\&\, |x| = |y| \to x \simeq y)$. Этой аксиомой экстраполируется свойство конечных множеств – "часть меньше целого". Покажем, что $ZF_e^!$ противоречива. Пусть множества a, b и c таковы, что $|a|=|b|=|c|=\omega_0$, $S(a)= \omega_1$, $S(b)=P(\omega_0)$ и $S(c)=P(\omega_1)$. Из $a \subseteq a \cup b$, $b \subseteq b \cup c$, $|a|=|a \cup b|$, $|b| = |b \cup c|$ и аксиомы $A_1^!$ следуют квазиравенства $a \simeq a \cup b$ и $b \simeq b \cup c$. Из аксиомы (вида A_3)

$$\forall x,y(x \simeq y \to (\pi(S(x),S(y)) \to S(x) \simeq S(y)))$$

получаются импликации:

$$\pi(S(a),S(a \cup b)) \to S(a) \simeq S(a \cup b),$$

$$\pi(S(b)\ S(b \cup c)) \to S(b) \simeq S(b \cup c).$$

Поскольку средствами ZF доказуемы $\pi(S(a), S(a\cup b))$ и $\pi(S(b), S(b\cup c))$, то в $ZF_e^!$ будут доказуемы квазиравенства $S(a) \simeq S(a\cup b)$, $S(b) \simeq S(b\cup c)$ и, ввиду A_2, - равенства $\omega_1 = 2^{\omega_0}$ и $2^{\omega_0} = 2^{\omega_1}$.

Противоречивость теории $ZF_e^!$ обусловлена, по-видимому, тем, что в $ZF_e^!$ исходно квазиравны множества не столь похожие (структурно) друг на друга, как ординалы. Поскольку во всякой экстраполяционной теории, отличной от ZF_e, исходно квазиравными будут множества менее похожие друг на друга, чем ординалы, то весьма вероятно, что такая теория будет противоречивой. □

Будем говорить, что теория T несовместима с ZF_e, если существует ZF-предложение X такое, что X неразрешимо в ZF, X доказуемо в T, но в ZF_e доказуемо $\neg X$. Предполагая гипотезу h_1 верной, сформулируем следующую гипотезу.

<u>ГИПОТЕЗА h_2</u>. Любая теория, совпадающая с ZF_e во всем, кроме понятия однородного (в этой теории) терма, и несовместимая с ZF_e, неприемлема с методологической точки зрения.

ОБОСНОВАНИЕ. Рассмотрим один пример. Пусть теория ZF_e'' совпадает с ZF_e во всем, кроме понятия однородного в ZF_e'' терма: определение понятия однородного в ZF_e'' терма получается из определения понятия однородного в ZF_e терма при замене условия 4 на

$4_1''$) если $t(x) = \{v \in x \mid |v| \in |S(x)|\}$, то t - однородный терм;

$4_2''$) если $t_1(x)$ - однородный терм и если $t(x) = \{t_1(v) \mid v \in x\}$, то t - однородный терм.

В теории ZF_e'' доказуема континуум-гипотеза: строим однородные в ZF_e'' отображения $\varphi_1(x) = \{v \in x \mid |v| \in |S(x)|\}$, $\varphi_2(x) = \varphi_1(P(x)) = \{v \in P(x) \mid |v| \in |S(P(x))|\} = \{v \subseteq x \mid |v| < |x|\}$, $\varphi_3(x) = \{\varphi_2(v) \mid v \in x\}$ и $\varphi_4(x) = S(\varphi_3(x))$; используя исходное квазиравенство $\omega_1+1 \simeq \omega_1$ и схему A_3, получаем $\varphi_4(\omega_1+1) \simeq \varphi_4(\omega_1)$, откуда, применяя A_2, выводим $|\varphi_4(\omega_1+1)| = |\varphi_4(\omega_1)|$, т.е. $2^{\omega_0} = \omega_1$. Следовательно, ZF_e'' несовместима с ZF_e. Однако теория ZF_e'' неприемлема по той причине, что не имеет удовлетворительного методологического обоснования следующее обстоятельство: в ZF_e'' допустимо "распространение" квазиравенства с помощью отображения $\phi(x) = \{v \in x \mid |v| \in |S(x)|\}$, при построении которого используется неравномерное отображение $\phi_3(x) = |x|$, но в ZF_e'' недопустимо "распространение" квазиравенства с помощью отображения $\varphi(x) = \{v \in x \mid S(v) \in S(x)\}$, которое равномерно и которое не сложнее отображения φ (φ не однородно в ZF^{*}_{e}, так как в противном случае в ZF^{*}_{e} доказывалось бы и отрицание континуум-гипотезы, т.е. ZF^{*}_{e} была бы противоречивой теорией).

Обобщим рассмотренный пример. Пусть ZF^{0}_{e} – теория, совпадающая с ZF_{e} во всем, кроме понятия однородного (в ZF^{0}_{e}) терма. Пусть X является ZF-предложением, неразрешимым в ZF и доказуемым в ZF^{0}_{e}, и пусть в ZF_{e} доказуемо $\neg X$. Обозначая через $O(ZF^{0}_{e})$ и $O(ZF_{e})$ множества однородных в ZF^{0}_{e} и в ZF_{e} отображений, отметим два обстоятельства. Во-первых, дополнение $O(ZF^{0}_{e}) \setminus O(ZF_{e})$ непусто, поскольку в ZF^{0}_{e} доказывается предложение X, неразрешимое в ZF и недоказуемое в ZF_{e}. Пусть отражение φ^{0} принадлежит этому дополнению. Ясно, что φ^{0} либо неравномерно, либо (это маловероятно) равномерно, но достаточно сложно ("алгоритм" реализации отображения φ^{0} сложнее "алгоритмов" реализации отображений из $O(ZF_{e})$). И, во-вторых, дополнение $O(ZF_{e}) \setminus O(ZF^{0}_{e})$ тоже непусто, так как в противном случае в ZF^{0}_{e} доказывалось бы и $\neg X$ (но ZF^{0}_{e} должна быть непротиворечивой теорией). Пусть отображение φ принадлежит этому дополнению. Ясно, что φ равномерно и просто. Таким образом, множество $O(ZF^{0}_{e})$ таково, что $\varphi^{0} \in O(ZF^{0}_{e})$, но $\varphi \notin O(ZF^{0}_{e})$. Однако эту ситуацию, по-видимому, следует считать методологически неприемлемой, поскольку множество $O(ZF^{0}_{e})$ эклектично и не имеет, вероятно, собственного (априорного) методологического обоснования, т.е. обоснования, исключающего апелляцию к следствиям, вытекающим из факта принятия множества $O(ZF^{0}_{e})$. □

Всякую теорию T будем называть формально подобной теории ZF_{e}, если T – экстраполяционная теория или T – теория, совпадающая с некоторой экстраполяционной теорией во всем, кроме понятия однородного (в T) терма. Предполагая гипотезы h_1 и h_2 верными, сформулируем основную гипотезу о теории ZF_{e}.

<u>ГИПОТЕЗА H.</u> Т е о р и я ZF_{e} м е т о д о л о г и ч е с к и п р и е м л е м а, а л ю б а я т е о р и я, ф о р м а л ь н о п о д о б н а я т е о р и и ZF_{e} и с н е й н е с о в м е с т и м а я, н е п р и е м л е м а с м е т о д о л о г и ч е с к о й т о ч к и з р е н и я.

ОБОСНОВАНИЕ. Приемлемость теории ZF_{e} обусловлена тем, что: а) аксиомами $A_1 - A_3$ теории ZF_{e} экстраполируется на бесконечные множества, пожалуй, наиболее фундаментальное свойство конечных множеств; б) множество однородных в ZF_{e} отображений методологи -

чески обоснованно - это множество представляет собой совокупность всех простейших равномерных отображений и в) ZF_e непротиворечива (гипотеза h_1).

Предположим, что вторая часть гипотезы H неверна. Пусть T - теория, формально подобная теории ZF_e, приемлемая методологически и несовместимая с ZF_e. Ясно, что T не может быть экстраполяционной теорией, иначе T была бы противоречивой теорией (гипотеза h_1) и, следовательно, методологически неприемлемой. Ясно также, что T не может совпадать с ZF_e во всем, кроме понятия однородного (в T) терма (гипотеза h_2). Пусть T_0 - экстраполяционная теория такая, что T совпадает с T_0 во всем, кроме понятия однородного (в T) терма. Ясно, что T_0 отличается от ZF_e аксиомой исходного квазиравенства. Отметим три факта: а) множество $O(T)$ однородных в T отображений непусто (иначе T была бы консервативным расширением ZF и, следовательно, совместимой с ZF_e); б) в теории T исходно квазиравны (кроме, возможно, ординалов) и не ординалы (так как аксиомы исходного квазиравенства теорий T и ZF_e различны) и в) множество $O(T)$ содержит отображения $S(x)$, $S(S(x))$ и т.д. (иначе, коль скоро имеет место факт "а", множество $O(T)$ не имело бы собственного методологического обоснования, поскольку отображения $S(x)$, $S(S(x))$,... суть простейшие из простейших равномерных отображений). Далее, отображение $S(x)$ обладает, по-видимому, следующим свойством: если структуры множеств a и b не идентичны, то структуры множеств $S(a)$ и $S(b)$, как правило, еще более различны. Учитывая это вероятное свойство отображения $S(x)$, факт "в" и тот факт (~~факт~~ "б"), что в теории T исходно квазиравными будут и не ординалы, т.е. исходно квазиравными будут и множества, структуры которых не идентичны, следует заключить, что в T квазиравными будут и множества достаточно различной структуры (это видно на примере теории $ZF_e^!$ из обоснования гипотезы h_1). Последнее обстоятельство является, по-видимому, верным признаком того, что теория T противоречива. □

Итак, рассмотрим ZF-предложение X, неразрешимое в ZF, но доказуемое в ZF_e (например, отрицание континуум-гипотезы). Предположим, что гипотеза H верна. Тогда не существует теории, которая была бы формально подобной теории ZF_e, методологически приемлемой и в которой было бы доказуемым предложение $\neg X$ и не доказуемым - предложение X. Значит, факт доказуемости в ZF_e предложения X, а не $\neg X$ будет указывать на то, что со свойствами конечных множеств более тесную связь имеет свойство (множеств), выражаемое предложением X, а не свойство, выражаемое предложением $\neg X$. А это, в свою очередь, будет указывать на то, что с аксиомами ZF, которые предопределяются свойствами конечных множеств, теснее связано предложение X, а не предложение $\neg X$, т.е. предложение X, а не $\neg X$ будет косвенным следствием аксиом ZF.

Таким образом, если гипотеза H верна, то всякое ZF-предложение, неразрешимое в ZF, но доказуемое в ZF_e, будет косвенным следствием аксиом ZF. Следовательно, если гипотеза H верна, то теория ZF_e будет преемником теории ZF.

5. Гипотеза H (об уникальности теории ZF_e), по-видимому, верна. Если гипотеза H верна, то теория ZF_e представляется достаточно естественным расширением теории ZF, поскольку при таком расширении новые аксиомы предопределяются аксиомами ZF, будучи результатом косвенной экстраполяции одного из следствий аксиом ZF, а именно предложения $\forall x,y(|x|,|y|<\omega_0 \rightarrow (x,y\in On \mathbin{\&} |x|=|y| \rightarrow x=y))$. Вполне вероятно, что идея косвенной экстраполяции может быть полезна для расширения и других теорий.

Автор выражает свою искреннюю признательность и благодарность Н.В.Белякину и В.Ю.Сазонову за их неоценимую помощь на стадии уточнения идей, легших в основу данной работы.

Литература

1. КЛИНИ С.К. Введение в метаматематику.-М.:ИЛ,1957. -526 с.

2. ФРЕНКЕЛЬ А.А., БАР-ХИЛЛЕЛ И. Основания теории множеств. -М.: Мир, 1966. - 555 с.

3. КОЭН П. Дж. Теория множеств и континуум-гипотеза. -М.:Мир, 1969. - 347 с.

4. БЕРДЖЕС Дж.П. Вынуждение. -В кн.: Справочная книга по математической логике. Ч.2. Теория множеств. М., 1982, с. 99-157.

Поступила в ред.-изд.отд.
5 апреля 1985 года