АЛГОРИТМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СТРУКТУРНОЙ ИНФОРМАЦИИ
(Вычислительные системы)
1985 год Выпуск 112

УДК 519.1

ОБОБЩЕННЫЕ МОДУЛЬНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ И СТРУКТУРНОЕ ПОДОБИЕ ГРАФОВ

Ю.Е.Бессонов, В.А.Скоробогатов

Введение

Термин "модульное произведение" был введен в работе [1] для названия операции над двумя графами, позволяющей свести проблему изоморфизма и изоморфного вхождения к задаче нахождения неплотности графа. В [2] аналогичная операция предложена для нахождения максимальных общих подграфов двух ориентированных или неориентированных графов. В [3] эта операция обобщается на случай нескольких операндов и вводится понятие модульного произведения относительных разбиений графов, что позволяет решать ряд задач определения структурного сходства графов заданного семейства [4].

Работы, посвященные изучению свойств модульных произведений, немногочисленны. Известны две статьи: [5], в которой рассматриваются хроматическое число, хроматический класс и неплотность модульного произведения, и [6], в которой даются условия представимости графа в виде модульного произведения двух других графов.

В настоящей работе определяется обобщенное модульное произведение как операция над графами, результатом которой является некоторый новый граф, содержащий информацию о соответствиях между классами вершин графов-операндов и о сохранении либо несохранении при этих соответствиях определенных отношений между парами вершин. Данная операция обобщает операции, рассмотренные в [1-6], и изучается в связи с задачами определения структурного подобия графов. Примерами структурного подобия являются изоморфизм, изометрия [7], изотопия [8].

§I. Основные определения

Пусть $G = (U, X)$ и $H = (V, Y)$ - конечные неориентированные графы без петель с множествами вершин $U = \{u_1, \ldots, u_{p_G}\} = \{1, 2, \ldots$ $\ldots, p_G\}$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_{p_H}\} = \{1, 2, \ldots, p_H\}$ и множествами ребер X, Y.

Рассмотрим вектор-функцию $\xi\colon U \times U \cup V \times V \to R^t$, ставящую в соответствие каждой паре (u, v) вершин графов G и H некоторый t-мерный числовой вектор $\xi(u, v)$. В дальнейшем будем считать, что всегда $\xi(u, v) = \xi(v, u)$. Если значения функции ξ определяются только свойствами графов G и H и инвариантны относительно изоморфизма, то $\xi(u, u)$ назовем структурной характеристикой вершины u, а $\xi(u, v)$ - структурной характеристикой пары $\{u, v\}$.

Примерами структурных характеристик являются:

$$\varepsilon(u, v) = \begin{cases} 1, & \text{если } u \text{ смежна с } v, \\ 0 & \text{- в противном случае;} \end{cases}$$

$d(u, v)$ - расстояние между u и v (т.е. длина кратчайшего пути, соединяющего u с v);

$\tau(u, v) = (\tau_1(u, v), \tau_2(u, v), \ldots, \tau_n(u, v))$ - вектор путей, соединяющих u с v; $\tau_i(u, v)$ есть число путей длины i между u и v.

Примерами функций, не являющихся структурными характеристиками, могут быть:

$\xi(u, u)$ - метки вершин в молекулярных графах [3];

$\xi(u, v)$ - веса ребер $\{u, v\}$ (длины ребер при расположении графа на плоскости, энергии химических связей [9] и т.д.);

функции, зависящие от нумерации вершин графа.

Обобщенное модульное произведение определим как операцию ∇ над графами G и H, результатом которой является граф $L(W, Z) = G \nabla H$.

Множество вершин графа L есть множество W всех упорядоченных пар (u, v) из вершин $u \in U$ и $v \in V$ с одинаковыми характеристиками: $\xi(u, u) = \xi(v, v)$.

Определим множество Z ребер графа L. Положим, что для $w, w' \in$ $\in W$ пара $\{w, w'\} = \{(u, v), (u', v')\}$; $u, u' \in U$, $v, v' \in V$ является ребром графа L тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие смежности: $f = a \,\&\, b_\xi$, где предикат $a = (u \neq u' \,\&\, v \neq v')$ определяет условие взаимно-однозначного соответствия вершин, а предикат $b_\xi = (\xi(u, u') = \xi(v, v'))$ - условие сохранения значения функции ξ при данном соответствии.

§2. Представление графа L в дискретной плоскости

Представим $U \times V$ множеством точек дискретной плоскости в форме прямоугольника П, состоящего из p_G горизонтальных и p_H вертикальных рядов точек (рис. I). Занумеруем горизонтальные ряды сверху вниз, а вертикальные - слева направо. Каждую вершину $(i,j) \in W$ поместим в точку, лежащую на пересечении i-го горизонтального и j-го вертикального рядов.

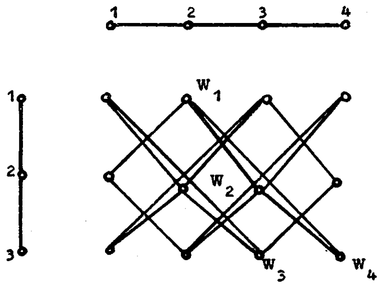

Рис. I

Рассмотрим некоторое множество $I = \{(u_1,v_1),(u_2,v_2),\ldots,(u_n,v_n)\} \subseteq W$. Проекцией множества I на граф G назовем множество $I_G = \{u_1,\ldots,u_n\}$, а на граф H - множество $I_H=\{v_1,\ldots,v_n\}$. Проекциями подграфа $\langle I \rangle$ будем считать подграфы $\langle I_G \rangle \subseteq G$ и $\langle I_H \rangle \subseteq G$. Графы G и H будут проекциями графа L.

Рангом множества I назовем число r, равное максимальному количеству вершин, не лежащих попарно в одном ряду. Наименьшее множество I ранга r состоит из r вершин и определяет взаимно-однозначное соответствие $\varphi: I_G \to I_H$.

ПРИМЕР I. Пусть $\xi(u,v) = d(u,v)$. На рис.I изображен граф $L = P_3 \nabla P_4$. Проекциями множества $I = \{w_1,w_2,w_3,w_4\} \subseteq W$ являются $I_G = \{1,2,3\}$ и $I_H = \{2,3,4\}$. Ранг множества I равен 2.

Функция ξ определяет разбиения множеств U и V на классы $\{U_i\}_{i=1}^{m}$ и $\{V_j\}_{j=1}^{n}$ вершин, имеющих одинаковые значения $\xi(u,u)$, $u \in U_i$ и $\xi(v,v)$, $v \in V_j$. Поэтому вершины графов G и H можно занумеровать таким образом, что W будет объединением непересекающихся прямоугольников $U_i \times V_i$, $i=1,2,\ldots,\min(m,n)$, расположенных вдоль диагонали прямоугольника П (рис.2).

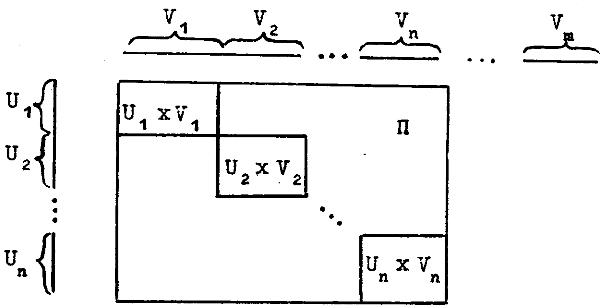

Рис. 2

§3. Матрица смежностей графа L и ξ-разложения графов-операндов

Множество значений функции ξ на парах вершин графов G и H можно представить в виде матриц $\Xi_G = \|\xi(i,j)\|_{i,j\in U}$ и $\Xi_H = \|\xi(i,j)\|_{i,j\in V}$. Пусть $\{\xi_1^G,\xi_2^G,\dots,\xi_m^G\}$ и $\{\xi_1^H,\xi_2^H,\dots,\xi_n^H\}$ – множества всех попарно различных значений функции ξ на парах вершин графов G и H. Определим m матриц $A_G(\xi_i^G) = \|a_{kl}\|$,

$$a_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{если } \xi(k,l) = \xi_i^G \text{ и } k \neq l, \\ 0, & \text{если } \xi(k,l) \neq \xi_i^G \text{ или } k = l. \end{cases}$$

Аналогичным образом определим n матриц $A_H(\xi_j^H)$. Полученные матрицы являются симметрическими бинарными матрицами с нулями по диагонали, поэтому им можно поставить в соответствие некоторые графы $G_1^\xi, G_2^\xi,\dots,G_m^\xi$ и $H_1^\xi, H_2^\xi,\dots,H_n^\xi$. Множества $\{G_i^\xi\}$ и $\{H_j^\xi\}$ назовем ξ-разложениями графов G и H.

ПРИМЕР 2. Для $G = P_4$ положим $\xi(u,v) = d(u,v)$. Тогда

$$\Xi_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_G(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_G(2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_G(3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ПРИМЕР 3. Для любого графа G его ε-разложение состоит из G и $\bar{G}$.

ТЕОРЕМА 1. Матрица смежностей $A_{G\nabla H}$ графа $L = G\nabla H$ получается из матрицы Ξ_G заменой диагональных элементов матрицами размера $p_H \times p_H$, состоящими из нулей, а недиагональных элементов $\xi(i,j)$ – матрицами $A_H(\xi(i,j))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Занумеруем строки и столбцы матрицы смежностей A_L графа $L = G\nabla H$ парами (i,k), где $i\in U$, $k \in V$. Матрица A_L разбивается на p_G^2 миноров A_{ij} размером $p_H \times p_H$ (рис.3), образованных пересечениями строк $(i,1),(i,2),\dots,(i,p_H)$ и столбцов $(j,1),(j,2),\dots,(j,p_H)$. Из определения графа $G\nabla H$ следует, что все миноры A_{ii} состоят из одних нулей; при $i \neq j$ на главной диа-

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & (1,1)\ldots(1,p_H) & (2,1)\ldots(2,p_H) & \ldots & (p_G,1)\ldots(p_G,p_H) \\
\hline
\begin{matrix}(1,1)\\(1,2)\\ \vdots \\ (1,p_H)\end{matrix} & 0 & A_{12} & \ldots & A_{1,p_G} \\
\hline
\begin{matrix}(2,1)\\ \vdots \\ (2,p_H)\end{matrix} & A_{21} & 0 & \ldots & A_{2,p_G} \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\hline
\begin{matrix}(p_G,1)\\ \vdots \\ (p_G,p_H)\end{matrix} & A_{p_G,1} & A_{p_G,2} & \ldots & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

Рис. 3

гонали A_{ij} стоят нули, а недиагональный элемент $a_{(i,k),(j,l)}$ равен I, если $\xi(i,j) = \xi(k,l)$, и нулю – в противном случае. Следовательно, A_{ij} есть матрица смежностей некоторого графа в ξ-разложении графа H.

СЛЕДСТВИЕ. Поскольку $G \nabla H \cong H \nabla G$, то матрица $A_{H \nabla G}$, полученная из Ξ_H заменой диагональных элементов матрицами размера $p_G \times p_G$, состоящими из нулей, а недиагональных элементов $\xi(i,j)$ – матрицами $A_G(\xi(i,j))$, может быть получена из $A_{G \nabla H}$ подходящей перестановкой строк и столбцов.

ПРИМЕР 4. Положим $\xi = \varepsilon$. Тогда минор A_{ij} $(i \neq j)$ в A_L есть либо матрица смежностей A_H графа H (если $(i,j) \in X$), либо матрица смежностей $A_{\bar{H}}$ дополнения графа H (если $(i,j) \notin X$). Следовательно, A_L получается, если в A_G заменить диагональные нули матрицами $p_H \times p_H$, состоящими из нулей; на остальных позициях заменить 0 матрицей $A_{\bar{H}}$, а I – матрицей A_H.

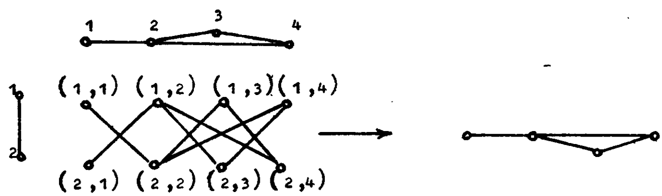

Рис.4

Можно дать следующую интерпретацию ξ-разложения, используя представление графа L в дискретной плоскости. Рассмотрим подграф D в L, порожденный двумя горизонтальными рядами в П: $(i,1)$, $(i,2),\ldots,(i,p_H)$ и $(j,1),(j,2),\ldots,(j,p_H)$ (рис.4). Этот подграф является двудольным, его вершины $(i,1)$ и $(j,1)$ несмежны, а из смежности (i,k) и (j,l) вытекает смежность (i,l) и (j,k). Рассмотрим гомоморфизм, переводящий (i,l) в (j,l), $l=\overline{1,p_H}$. Гомоморфный образ графа D будет некоторым графом из ξ-разложения графа H.

§4. Отношения подобия графов. Критерии подобия

Графы G и H назовем ξ-изоморфными, если существует взаимнооднозначное соответствие φ: $U \to V$, сохраняющее значение функции ξ: $\xi(u,u) = \xi(\varphi(u),\varphi(u))$, $\xi(u,v) = \xi(\varphi(u),\varphi(v))$ для всех $u,v \in U$. Если графы изоморфны, а ξ - структурная характеристика (§I), то они будут и ξ-изоморфными. Обратное утверждение справедливо, например, для $\xi = d$ и $\xi = \tau$. Структурной характеристикой, для которой ξ-изоморфизм не есть изоморфизм, является, например, длина самой длинной простой цепи, соединяющей две вершины. Любые два графа из K_4, K_4-x, C_4 будут в этом случае ξ-изоморфными. Отношение ξ-изоморфизма обозначим в виде $G \overset{\xi}{\cong} H$.

Будем говорить, что имеет место ξ-вложение G в H($G \overset{\xi}{\subseteq} H$), если в H существует подграф, ξ-изоморфный G.

Подстановку $\begin{pmatrix} u_1 u_2 \ldots u_n \\ v_1 v_2 \ldots v_n \end{pmatrix}$ назовем ξ-пересечением графов G и H, если подграфы $\langle\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}\rangle \subseteq G$ и $\langle\{v_1,v_2,\ldots,u_n\}\rangle \subseteq H$ ξ-изоморфны и максимальны по включению.

Будем говорить, что имеет место ξ-соответствие из G в H, если для каждой $u \in U$ существует отображение φ_u: $U \overset{B}{\to} V$ такое, что для каждой $v \in U$ $\xi(u,v) = \xi(\varphi_u(u), \varphi_u(v))$. Отношение ξ-соответствия из G в H обозначим в виде $G \overset{\xi}{\twoheadrightarrow} H$.

Графы G и H назовем ξ-подобными, если $G \overset{\xi}{\twoheadrightarrow} H$ и $H \overset{\xi}{\twoheadrightarrow} G$. Если графы ξ-изоморфны, то, очевидно, они ξ-подобны, причем обратное утверждение неверно. Примерами ξ-подобия являются изометрия [7] (d-подобие) и изотопия [8] (τ-подобие).

Будем говорить, что имеет место ξ-включение графа G в граф H($G \overset{\xi}{\lesssim} H$), если в H существует подграф, ξ-подобный графу G.

Частичное ξ-подобие определим как пару (G',H'), $G' \subseteq G$, $H' \subseteq H$, $G' \overset{\xi}{<\sim>} H'$.

Следующая схема показывает взаимосвязи между рассмотренными отношениями подобия графов:

$$\begin{array}{ccccccc} G \cong H & \left(\begin{array}{l}\text{если } \xi - \\ \text{структурная} \\ \text{характеристика}\end{array}\right) & \Rightarrow G \overset{\xi}{\cong} H & \Rightarrow & G \overset{\xi}{<\sim>} H & & \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & \Rightarrow G \overset{\xi}{\sim>} H. & \\ G \subseteq H & & \Rightarrow G \overset{\xi}{\subseteq} H & \Rightarrow & G \overset{\xi}{\lessapprox} H & & \end{array}$$

Характеризацию отношений ξ-изоморфизма в терминах обобщенного модульного произведения дает следующая

ТЕОРЕМА 2. Если $\langle \{(u_1,v_1),(u_2,v_2),\ldots,(u_n,v_n)\}\rangle$ – клика[ж)] в L, то подстановка $\begin{pmatrix} u_1 u_2 \ldots u_n \\ v_1 v_2 \ldots v_n \end{pmatrix}$ есть ξ-пересечение графов G и H, и обратно, если указанного вида подстановка является ξ-пересечением, то подграф в L, порожденный множеством вершин (u_i,v_i), $i=\overline{1,n}$, является кликой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно получается из определения обобщенного модульного произведения, ξ-пересечения и клики.

Определим теперь критерии ξ-соответствия и ξ подобия графов.

Пусть $(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_h)$ – множество всех различных значений функции ξ на $U \times U \cup V \times V$, упорядоченное некоторым образом (например, лексикографически). Выделим в G некоторую вершину u. Множество U разбивается на классы $U_i(u) = \{u' \mid \xi(u,u') = \xi_i\}$, $i=\overline{1,h}$, упорядоченный набор которых назовем относительным ξ-разбиением множества U по отношению к вершине u. По аналогии с [7] определим матрицу слоев $\lambda(G)$ и спектр $\Lambda(G)$ графа G: $\lambda(G) = \|a_{ij}\|$, $a_{ij} = |U_j(u_i)|$, $i = \overline{1,p_G}$, $j=\overline{1,h}$, $\Lambda(G)$ – множество всех различных строк матрицы $\lambda(G)$.

Обозначим через $\lambda_G(u)$ и $\lambda_H(v)$ строки $\lambda(G)$ и $\lambda(H)$, соответствующие вершинам $u \in U$ и $v \in V$. Если i-й элемент строки $\lambda_G(u)$ не превосходит i-го элемента строки $\lambda_H(v)$, $i=\overline{1,h}$, то будем считать, что $\lambda_G(u) \le \lambda_H(v)$. Если для каждой строки λ_G^i в $\Lambda(G)$ существует

ж) Кликой называется максимальный по включению полный подграф.

строка λ'_H в $\Lambda(H)$ такая, что $\lambda'_G \le \lambda'_H$, то будем считать, что $\Lambda(G) \le \Lambda(H)$.

ЛЕММА. Если $\Lambda(G) \le \Lambda(H)$ и $\Lambda(H) \le \Lambda(G)$ то $\Lambda(G) = \Lambda(H)$ и $p_G = p_H$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сначала, что $\lambda(G)$ имеет следующее свойство: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} = p_G$ для любых $i,k = \overline{1,p_G}$. Таким же свойством обладает и $\lambda(H)$. Поэтому если взять строки $\lambda'_G \in \Lambda(G)$, $\lambda''_G \in \Lambda(G)$, $\lambda'_H \in \Lambda(H)$, $\lambda''_H \in \Lambda(H)$, для которых $\lambda'_G \le \lambda'_H$ и $\lambda''_H \le \lambda''_G$, то получим $p_G = p_H$. Тогда для любой строки $(a_1,\dots,a_h)$ в $\Lambda(G)$ существует равная ей строка $(b_1,\dots,b_h)$ в $\Lambda(H)$ (если имелось хотя бы одно строгое неравенство $a_i < b_i$, то оказалось бы, что $p_G < p_H$). Точно также для любой строки в $\Lambda(H)$ существует равная ей в $\Lambda(G)$. Следовательно, $\Lambda(G) = \Lambda(H)$.

Следующая теорема, обобщая результат [7], дает критерий ξ-подобия графов в терминах матриц слоев.

ТЕОРЕМА 3.

1. $\Lambda(G) \le \Lambda(H) \Leftrightarrow G \overset{\xi}{\rightsquigarrow} H$;

2. $\Lambda(G) = \Lambda(H) \Leftrightarrow G \overset{\xi}{\leftrightsquigarrow} H$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Lambda(G) \le \Lambda(H)$. Возьмем произвольную вершину $u \in U$. Для строки $\lambda_G(u) \in \lambda(G)$ существует строка $\lambda_H(v) \in \lambda(H)$ такая, что $\lambda_G(u) \le \lambda_H(v)$. Рассмотрим относительные ξ-разбиения $(U_1,U_2,\dots,U_h)$ и $(V_1,V_2,\dots,V_h)$, соответствующие этим строкам. Тогда произвольное отображение φ_u, удовлетворяющее условиям $\varphi_u(u) = v$, $\varphi_u : U_i \xrightarrow{B} V_i$, имеет свойство $\xi(u,u_i) = \xi(\varphi_u(u),\varphi_u(u_i))$ для $u_i \in U_i$, $i = \overline{1,h}$. Пусть теперь $G \overset{\xi}{\rightsquigarrow} H$. Рассмотрим вершины $u, v = \varphi_u(u)$ и соответствующие им относительные ξ-разбиения $(U_1,\dots,U_h)$ и $(V_1,\dots,V_h)$. Тогда $\varphi_u(U_i) \subseteq V_i$, откуда следует, что $\lambda_G(u) \le \lambda_H(v)$, а значит, и $\Lambda(G) \le \Lambda(H)$. Второе утверждение теоремы следует из первого и доказанной выше леммы.

Дадим теперь характеризацию ξ-подобия графов в терминах обобщенного модульного произведения.

Граф с множеством вершин $\{w,w_1,\dots,w_n\}$ и ребер $\{\{w,w_i\} \mid i=\overline{1,n}\}$ будем называть звездой с центром w.

ТЕОРЕМА 4. Для существования соответствия $G \overset{\xi}{\rightsquigarrow} H$ необходимо и достаточно наличие в $G \nabla H$ суграфов – звезд ранга p_G, множество центров которых имеет ранг p_G.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно отметить, что звезда в $G \nabla H$ с центром $w = (u,v)$ и множеством вершин $\{(u,v),(u_1,v_1), \ldots$

$\ldots,(u_{p_G-1},v_{p_G-1})\}$ ранга p_G определяет подстановку $\begin{pmatrix} uu_1 \ldots u_{p_G-1} \\ vv_1 \ldots v_{p_G-1} \end{pmatrix}$, для которой $\xi(u,u_i) = \xi(v,v_i)$, $i = \overline{1,p_G-1}$.

Критерий ξ-включения дает следующая

ТЕОРЕМА 5. Для ξ-включения G в H необходимо и достаточно, чтобы в $G \nabla H$ существовало p_G звезд ранга p_G, множество центров которых имеет ранг p_G и чтобы всеми проекциями этих звезд на H был один и тот же подграф.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $G \overset{\xi}{\subseteq} H$, то в H существует подграф H', для которого $G \overset{\xi}{\longleftrightarrow} H'$. Тогда в $G \nabla H' \subseteq G \nabla H$, по теореме 4, существуют указанные в условии звезды. Обратно, пусть $H' \subseteq H$ есть подграф, который является проекцией всех звезд, указанных в условии. Все проекции этих звезд на G совпадают с G. Поэтому для графов G и H' выполняется условие предыдущей теоремы, а значит, $G \overset{\xi}{\subseteq} H$.

Литература

1. ВИЗИНГ В.Г. Сведение проблемы изоморфизма и изоморфного вхождения к задаче нахождения неплотности графа. –В кн.: Тезисы докл. III Всесоюзн. конф. по пробл. теорет. киб. Новосибирск, 1974, с.124.

2. LEVI G. A note on the derivation of maximal common sub-graphs of two directed or undirected graphs.– Calcolo, 1972, N 9, p.341-352.

3. СКОРОБОГАТОВ В.А. Нахождение общих частей в семействах графов. –В сб.: Прикладные задачи на графах и сетях. Материалы Всесоюзн. сов. Новосибирск, 1981, с.117-132.

4. ДЕНИЩИК Е.Ю. Нахождение максимальных общих подграфов в семействе графов. –В кн.: Алгоритмы анализа структурной информации (Вычислительные системы, вып.103). Новосибирск, 1984, с.85-89.

5. ТИМОФЕЕВ А.А. Некоторые числовые характеристики модульного произведения графов. –В кн.: Автоматизация проектирования в микроэлектронике. Теория. Методы. Алгоритмы (Вычислительные системы, вып. 77). Новосибирск, 1978, с.38-41.

6. POLJAK S., PULTR A. Representing graphs by means of strong and week products.- Comment.Math.Univ.carol.,1981, v.22, N 3, p. 449-466.

7. СКОРОБОГАТОВ В.А. Матрицы слоев и изометричность графов.- В кн.: Автоматизация проектирования в микроэлектронике. Теория. Методы. Алгоритмы (Вычислительные системы, вып.77). Новосибирск, 1978, с. 20-23.

8. ДОБРЫНИН А.А., СКОРОБОГАТОВ В.А. Свойства цепей графов и изотопичность.-Настоящий сборник,с. 33-45.

9. БЕССОНОВ Ю.Е., МИЩЕНКО Г.Л., СКОРОБОГАТОВ В.А. О задаче выделения скелетных схем химических реакций при построении информационных систем по химии.-В кн.: Научно-техническая информация. 1985, Сер. 2, № 1, с.8-12.

Поступила в ред.-изд.отд.
2 октября 1985 года