АЛГОРИТМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СТРУКТУРНОЙ ИНФОРМАЦИИ
(Вычислительные системы)
1985 год Выпуск 112

УДК 681.3.323

УСТРАНЕНИЕ ПЕТЕЛЬ В СЕТЯХ ПЕТРИ

П.А.Анишев

Сети Петри - математическая модель, получившая в последнее время широкое распространение (только на русском языке имеются две монографии по сетям Петри [3,4]) как средство описания и моделирования дискретных систем разной природы. При использовании сетей Петри одной из важных задач является анализ их поведенческих свойств. Создание алгоритмов анализа наталкивается на значительные трудности, связанные, с одной стороны, с экспоненциальной сложностью алгоритмов, а с другой - с многообразием форм представления сетей. Выбор удачной формы представления облегчает программирование, позволяет использовать теоретические результаты из других областей и ранее разработанные алгоритмы и программы. Одной из таких удобных форм представления сетей Петри является матрица инциденций [9]. Применение матричного представления позволяет свести некоторые задачи анализа сетей к поиску (определению существования) целочисленных решений системы линейных уравнений и/или неравенств [10]. Одним из факторов, ограничивающих использование матричного представления, является то, что матрица инциденций задает сеть с точностью до петель. В статье исследуется преобразование, устраняющее петли и сохраняющее свойства живости и безопасности анализируемой сети.

§1. Основные определения

Краткое изложение основных понятий, связанных с сетями, можно найти в [7,8]. Здесь мы дадим только самые необходимые определения.

Обозначим через N – множество натуральных чисел, через N^+ – множество натуральных чисел с нулем, через Z – множество целых чисел. Пусть ω – наименьшее число, большее любого натурального числа. Сеть Петри – это шестерка

$$PN = (P, T, F, K, W, M_0), \tag{1}$$

где P – множество позиций, T – множество переходов, такие что $P \cap T = 0$, $P \cup T \neq 0$; F – это бинарное отношение на множестве вершин сети такое, что

$$F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P), \tag{2}$$

причем $dom(F) \cup cod(F) = P \cup T$, где $dom(F) = \{x \mid \exists y (x F y)\}$, а $cod(F) = dom(F^{-1})$. Другими словами, графическое представление сети является двудольным ориентированным графом на множестве позиций P и множестве переходов T.

Далее K – функция, ставящая в соответствие каждой позиции натуральное число или ω, называемое емкостью, $K: P \to N \cup \{\omega\}$. Емкость – это максимальное число меток, которое может содержать позиция; W – кратность дуги, $W: F \to N$; M_0 – начальное маркирование, т.е. функция, отображающая множество позиций в множество $N^+ \cup \{\omega\}$, такая, что $p \in P[M_0(p) \leq K(p)]$. Каждой позиции соответствует определенное число меток, нуль соответствует отсутствию меток в позиции, $\{\omega\}$ – бесконечному числу меток. Если пара (x, y) принадлежит отношению F, то будем говорить, что x является входом для y, или y является выходом для x. На рисунках позиции изображаются кружками, переходы – прямоугольниками, маркирование – точками в позиции (число точек равно значению маркирования), а отношение F – дугами. Вслед за [8] через $A^{\bullet}$ (соответственно ${}^{\bullet}A$) обозначим множество выходов (входов) для множества вершин A.

Переход возбужден, если каждая его входная позиция содержит число меток, не меньшее, чем кратность соответствующей дуги. Из множества возбужденных переходов может сработать любой единственный переход. Срабатывание этого перехода приводит к изменению маркирования по следующему правилу: от значения маркирования каждой входной позиции отнимается, а к значению маркирования каждой выходной позиции добавляется число меток, равное кратности соответствующих инцидентных дуг. Маркирование M можно представить вектором, i-я компонента которого равна числу меток в i-й позиции.

Если маркирование M' получено из маркирования M после срабатывания перехода t, то это обозначается так:

$$M[t\rangle M'. \qquad (3)$$

Обозначение (3) можно распространить на последовательность срабатываний $\sigma = t_{i_1} t_{i_2} \ldots t_{i_k}$. Таким образом, через $M[\sigma\rangle M'$ будем обозначать тот факт, что маркирование M' достижимо из M через последовательность срабатываний σ. Обозначим через $\bar{\sigma}$ вектор, каждая компонента которого равна натуральному числу или нулю i-я компонента $\bar{\sigma}_i$ этого вектора равна числу вхождений перехода t_i в последовательности σ. Отображение $\sigma \to \bar{\sigma}'$ называется отображением Париха. Например, для последовательности из пяти переходов t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 имеем $(t_1 t_1 t_3 t_3 t_1 t_4) \to (3,0,2,1,0)$. Вектор $\bar{\sigma}$ называется характеристическим вектором последовательности σ. Для дальнейшего изложения нам будет удобно представлять его в виде вектора-столбца или матрицы с одной колонкой, т.е. в транспонированном виде:

$$(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \ldots, \bar{\sigma}_{|T|})^T = \left\| \begin{matrix} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{\sigma}_2 \\ \vdots \\ \bar{\sigma}_{|T|} \end{matrix} \right\| .$$

Позиция p сети Петри называется k-ограниченной (где k-натуральное число), если при любом маркировании M', достижимом из начального, $M(p) \le k$. Позиция называется безопасной, если она 1-ограничена. Сеть Петри называется k-ограниченной, если все ее позиции являются k-ограниченными. Переход t сети Петри называется живым при заданном маркировании M, если для любого маркирования M', достижимого из маркирования M, существует последовательность срабатываний, которая содержит переход t. Сеть Петри называется живой, если все переходы ее - живые. Живую и безопасную сеть Петри назовем правильной.

Сети, у которых кратность дуг равна единице, а значение начального маркирования в каждой позиции не превосходит единицы, назовем ординарными. Матрица инциденций сети Петри вида (I) - это матрица $C: P \times T \to Z$ с числом строк $|P|$, числом столбцов $|T|$, такая что

$$C(p,t) = \begin{cases} -W(p,t) \leftrightarrow (p,t) \in F, \\ +W(p,t) \leftrightarrow (p,t) \in F^{-1}, \\ 0 - \text{в противном случае.} \end{cases}$$

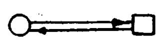
Если в сети Петри σ - последовательность срабатываний, переводящая маркирование M в маркирование M', а C - матрица инциденций этой сети, то имеет место следующее соотношение:

$$M' = M + C \cdot \bar{\sigma}, \qquad (4)$$

где "$\cdot$" - это операция умножения матриц, M и M' - векторы, представляющие маркирование, "+" - операция сложения векторов.

Уравнение (4) служит основой для применения к анализу поведенческих свойств сетей Петри методов линейной алгебры. В работе [10] сформулирован ряд результатов, связывающих такие свойства с существованием целочисленных решений систем уравнений или неравенств вида:

$$C \cdot x \geq 0, \quad C \cdot x = 0, \quad x^T \cdot C \leq 0, \quad C \cdot x \leq 0 \qquad (5)$$

и т.п., где x - искомый характеристический вектор, T - операция транспонирования, C - матрица инциденций. Система программ, ориентированная на решение уравнений вида $x^T \cdot C = 0$, описана в работе [5]. Существенной частью данного подхода является тот факт, что анализируемая сеть представляется в виде матрицы, но это порождает также некоторые ограничения. Одно из таких ограничений состоит в том, что решение уравнений вида (5) - это характеристический вектор искомой последовательности срабатываний, а не сама последовательность; другое (анализу которого мы и посвящаем дальнейшее изложение) состоит в том, что матрица инциденций не является представлением в строгом смысле. Матрица инциденций однозначно представляет только так называемые чистые сети Петри [7], т.е. сети, в которых отсутствуют фрагменты вида , где дуги могут иметь не только единичную кратность. Из определения матрицы инциденций следует, что фрагменты сети, приведенные на рис.I,а и I,б, неразличи -

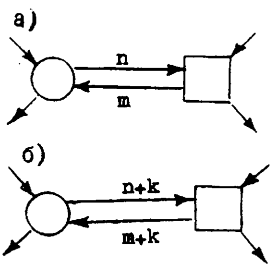


Рис.I

мы. Такие фрагменты называются (n,m)-петлями. Назовем (I,I)-петли простыми петлями. При любых целых $m,n \geq 0$ и при любом целом $k > 0$ соответствующие элементы матриц инциденций будут иметь одно и то же значение. Так, например, при $m=n=0$ и $k=1$ получим, что не связанные дугой переход и позиция неотличимы от тех переходов и позиций, которые образуют простую петлю.

§2. Устранение петель

В предыдущем параграфе показано, что матрица инциденций представляет сеть Петри с точностью до петель. Возникает вопрос: как анализировать сети с петлями? Разрывать петли, считая, что соответствующие переход и позиция не связаны (в случае ординарных сетей), или преобразовать фрагмент сети, содержащий петлю? Мы будем преобразовывать сети так, чтобы: I) сохранить связь между соответствующими переходом и позицией; 2) ликвидировать петлю так, чтобы сеть, полученная в результате преобразования, была однозначно представима матрицей инциденций; 3) результирующая сеть должна быть эквивалентной исходной в смысле сохранения правильности.

Преобразование, устраняющее петли в обобщенных сетях Петри, рассмотрено в [7]. Оно заключается в замене перехода, входящего в петлю, фрагментом, состоящим из двух переходов t_1, t_2 и одной по -

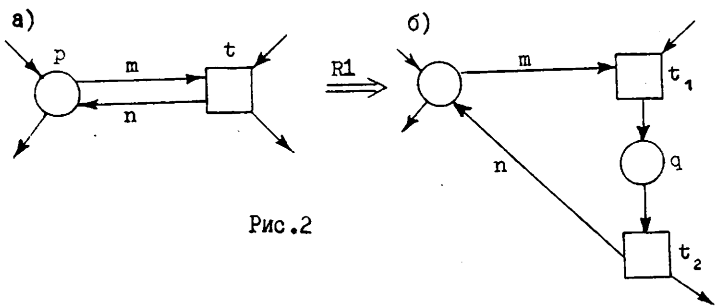


Рис.2

зиции q емкостью I, между ними. Кратность дуг, инцидентных позиции q, равна единице (см,рис.2). Назовем это преобразование R1.

Так как в работе [7] эквивалентность преобразования R1 не исследована, ниже мы проведем такой анализ. Данное преобразование является эквивалентным в смысле сохранения живости и k-ограниченности сети. Если исходная сеть была правильной (неправильной), то такой же будет и результирующая сеть, причем при преобразовании сохраняется тип неправильности в том смысле,что неживость переходит в неживость, неограниченность в неограниченность, и не возникает такой ситуации,при которой неживость переходит в неограниченность,и наоборот.

Для доказательства эквивалентности вышеописанного преобразования заметим, что фрагмент сети на рис.2,а является результатом применения правила подстановки [6] позиции q фрагмента на рис.2,б. Действительно, представив фрагменты на рис.2 в виде выражений срабатывания [6], получим

$$t:\ \ldots p^{m} \rightarrow p^{n}\ \ldots \qquad (6)$$

для фрагмента на рис.2,а и

$$t_1:\ \ldots\ p^{m} \rightarrow q \qquad (7)$$

$$t_2\qquad q \rightarrow p^{n}\ \ldots \qquad (8)$$

для фрагмента на рис.2,б. Условия для подстановки позиции q из выражения (8) в выражение (7) выполнены [6]. Подстановка состоит в замене в выражении (7) позиции q на ее выражение из (8), т.е., подставляя выражение (8) в (7),получаем (6). Значит,действительно фрагмент на рис.2,а является результатом применения к фрагменту на рис.2,б правила подстановки. В работе [6] доказано, что подстановка позиции сохраняет правильность сети; таким образом,мы получили: преобразование R1 сохраняет правильность сети.

В дальнейшем мы будем рассматривать устранение петель не в обобщенных, а в ординарных сетях Петри и с этой целью проанализируем два преобразования R2 и R3.

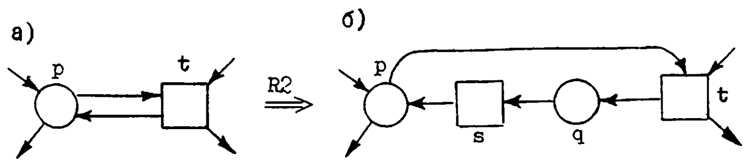


Рис. 3

Преобразование R2 (см.рис.3) заключается в замене дуги (t , p), связывающей переход t и позицию p , фрагментом, состоящим из связанных дугой (q ,s) позиции и перехода, инцидентных переходу t и позиции (см.рис.3,б). Запишем фрагменты сетей на рис.3,а,б в виде выражений срабатывания. Получим $t:\dots\ p \to p\dots$ для фрагмента на рис.3,а и

$$t:\dots\ p \to q\ \dots$$
$$s:\quad q \to p$$

для фрагмента на рис.3,б. Так же,как и при анализе преобразования R1, мы получим, что фрагмент на рис.3,а является результатом применения к фрагменту на рис.3,б подстановки позиции q. Таким образом,преобразование R2 сохраняет правильность. Итак, в ординарных сетях Петри петли могут быть устранены как преобразованием R1, так и преобразованием R2.

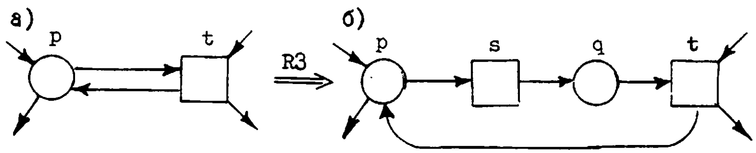


Рис. 4

Преобразование R3 (см.рис.4) состоит в замене дуги (p,t), связывающей позицию p и переход t, фрагментом,состоящим из связанных дугой перехода s, позиции q и дуг, инцидентных позиции p и переходу t соответственно. Преобразование R3, казалось бы, полностью аналогично преобразованию R2,тем не менее оно не является эквивалентным в вышеописанном смысле. Это преобразование является частным случаем введенного в [I] некорректного преобразования R4.

Некорректность введенного в [I] и повторенного в [2] преобразования R4 была замечена Н.А.Анисимовым, который указал автору на возможность построения контрпримера к преобразованию R4. Пользуясь случаем,автор выражает Н.А.Анисимову искреннюю признательность. Действительно, такой пример вскоре был построен (см. рис.5). Сеть на рис.5,а является правильной: все переходы ее живые и все позиции безопасные. Последовательность срабатываний имеет вид $t_1t_2t_3t_4t_1t_2t_3t_4\dots$. Если же дугу (p,t_3), связывающую позицию p и переход t_3, заменить фрагментом (s,q), применяя преобразование R3, то в результате получим неправильную сеть: после срабатывания перехода s метка из позиции p исчезнет и ни один

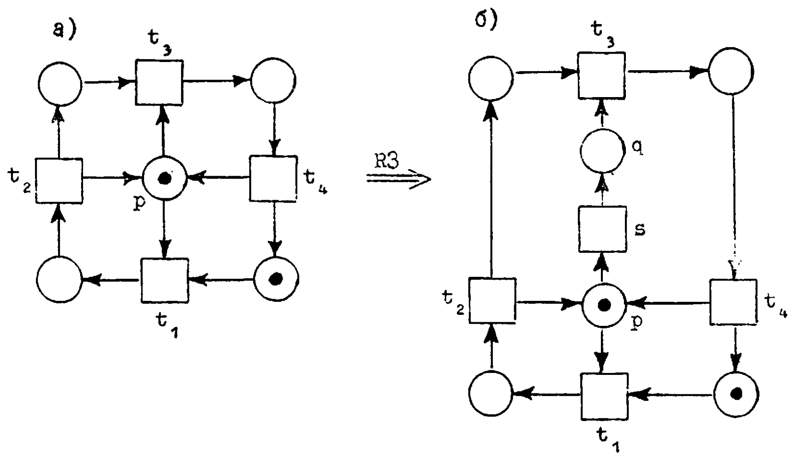


Рис. 5

переход в сети не будет возбужден. Значит, сеть на рис.5,б неправильная, и, следовательно, преобразование R3 не является эквивалентным. Использовать R3 для эквивалентных преобразований ординарных сетей Петри в общем виде нельзя.

Для того чтобы закончить анализ преобразования R3, осталось выяснить один вопрос. Хотя в общем случае преобразование R3 применять нельзя, его, может быть, можно применять для устранения петель в ординарных сетях Петри.

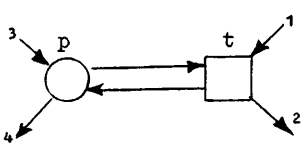


Рис. 6

Рассмотрим позицию p и переход t, образующие петлю (см.рис.6). В зависимости от наличия инцидентных (входных и выходных) дуг для перехода и для позиции получаем 16 типов случаев (фрагментов), содержащих петлю в ординарной сети. На рис.6 соответствующие дуги обозначены числами от 1 до 4. Анализ этих случаев (состоящий, как правило, в применении к фрагментам преобразований редукции, определенных в работе [1]) показывает, что в 14 из 16 случаев петлю с помощью преобразования R3 устранять можно. Но, к сожалению, в двух случаях (когда есть дуги, полученные цифрами 1,3,4 независимо от наличия дуги, помеченной цифрой 2, см. рис.6) этого делать нельзя. На рис.7,а приведен пример правильной

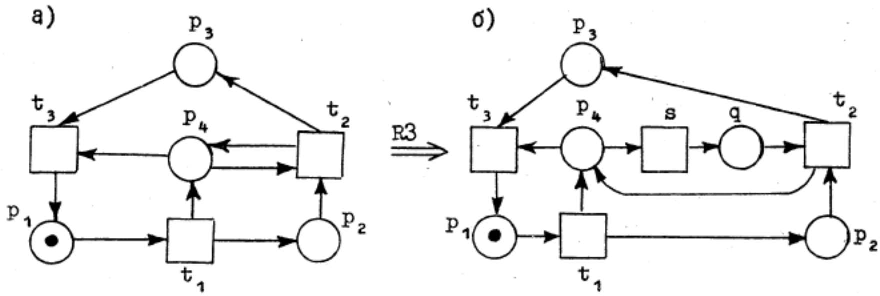


Рис. 7

сети, применение к которой преобразования R3 для устранения петли (p_4, t_2) приводит к неправильной сети. Действительно, последовательность срабатываний переходов в сети на рис.7,а имеет вид: $t_1 t_2 t_3 t_1 t_2 t_3 \ldots$.Эта сеть правильная. Но сеть на рис.7,б,полученная в результате замены дуги (p_4, t_2) фрагментом (p_4, s, q, t_2), неправильная: после срабатывания $t_1\ st_2\ s$ мы получим, что ни один переход сети на рис.7,б не возбужден – сеть неживая.

Если в сети на рис.7 удалить позицию p_3, то получим контрпример к случаю,когда петлю составляет переход, не имеющий выходной дуги. Наличие или отсутствие маркирования позиции, составляющей петлю,не влияет на возможность применения преобразования R3: если позиция маркирована, R3 можно применить в тех же случаях, что и без маркирования. Преобразование R3 для устранения петель в общем случае неприменимо, хотя в тех случаях, когда переход t, входящий в петлю $\langle p, t \rangle$, не имеет входных позиций, кроме p (т.е. $^{\bullet}t \setminus p = 0$), преобразование R3 применять можно.

Итак, преобразования R1 , R2 , R3 устраняют петли в сетях Петри и сохраняют их правильность. Преобразование R2 в ординарных сетях, в отличие от R1 , не имеет ограничений на емкость добавляемой позиции, а R3 позволяет в некоторых случаях свести ординарные сети к сетям свободного выбора.

Литература

I. АНИШЕВ П.А. Редуцируемость сетей Петри. – Программирование, 1982, №4, с.36-43.

. ЗАКРЕВСКИЙ А.Д. Редукционный метод проверки корректности ельных алгоритмов логического управления. –Докл. АН БССР, т.ХХУП, №7, с.617-619.

3. КОТОВ В.Е. Сети Петри. -М.: Наука, 1984. -158 с.

4. ПИТЕРСОН Дж. Теория сетей Петри и моделирование систем. -М.: Мир, 1984. -264 с.

5. **ALAIWAN H., TOUDIC J.M.** Recherche des semi-flots, des verrous et des trappes dans les reseaux de Petri. - Technique et science Informatiques, 1985, v.4, N 1, p.103-112.

6. **BERTHELOT G., ROUCAIROL G.** Reduction of Petri-nets.- In: Lecture Notes in Computer Sciences, 1976, N 45, p.202-209.

7. **GENRICH H.J., STANKEWICZ-WIECHNO E.** A dictionary of some basic notions of net theory.- In: Lecture Notes in Computer Science, 1980, N 84, p.519-535.

8. **HACK M.** Analysis of production schemata by Petri nets. MAC TR-94.- Cambridge (Mass.): M.I.T. Project MAC, 1972.-119 p.
Errata: HACK M. Corrections to analysis of production schemata by Petri nets. Computation structure note 17.- Cambridge (Mass.): M.I.T. Project MAC, 1974.-11 p.

9. **JANTZEN M., VALK R.** Formal properties of place/transition nets.- In: Lecture Notes in Computer Science, 1980, N 84, p.165-212.

10. **MEMMI G.** Linear algebra in net theory.- In: Lecture Notes in Computer Science, 1980, N 84, p.213-223.

Поступила в ред.-изд.отд.
17 августа 1985 года