ЛОГИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ТИПОВ ДАННЫХ
(Вычислительные системы)

1986 год Выпуск 114

УДК 510.5+519.68

ЯЗЫК Σ-ВЫРАЖЕНИЙ

Ю.Л.Ершов

Процесс построения программы начинается с точной постановки задачи – спецификации, которая после ряда этапов преобразований (трансляций) и трансформируется в программу.

Спецификация задачи предполагает использование для этого точного и достаточно выразительного языка. Точность языка может быть обеспечена его формальностью, выразительность же – достаточно богатым набором синтаксических средств и точной семантикой такого языка. Формальные языки математической логики в определенной степени удовлетворяют сформулированным требованиям. Более того, многолетний опыт работы с такими языками помогает успешному их использованию в качестве языков спецификации.

Следующий этап – этап извлечения (абстрактной) программы из спецификации – предполагает использование разнообразных подходов.

Один из возможных подходов состоит в использовании точной семантики языка в качестве абстрактного алгоритма для вычисления (истинности) формулы – спецификации. Основные моменты такого подхода основаны на следующих соображениях.

Пусть $\mathfrak{M} = \langle \omega; P_1, \ldots, P_k; f_1, \ldots, f_m \rangle$ – рекурсивная (конструктивная) модель, т.е. P_i – рекурсивные предикаты, f_j – рекурсивные функции на множестве натуральных чисел $\omega = \{0,1,\ldots\}$(см.[1]).

1. Если Φ – $\exists$-формула языка логики предикатов первого порядка (сигнатуры модели $\mathfrak{M}$), то любой предикат, определенный формулой Φ на модели $\mathfrak{M}$, является рекурсивно-перечислимым.

Чтобы точно говорить о предикатах, определенных формулой Φ, введем следующую синтаксическую конструкцию. Пусть $\bar{x}=x_1,\ldots,x_t$ – список различных переменных, тогда $[\bar{x};\ \Phi]$ – t-местный предикат, определенный формулой Φ (в модели $\mathfrak{M}$) так (предполагаем для простоты, что все свободные переменные содержатся в $\{\bar{x}\}$):

$$[\bar{x};\ \Phi\ ](\mathfrak{M}) \rightleftharpoons \{\ \bar{a}\,|\,\bar{a}\in\omega^{t},\ \mathfrak{M}\models\Phi(\bar{a})\ \}.$$

2. Свойство п.I распространяется на Σ-формулы, т.е. формулы, в построении которых можно использовать не только $\exists$-кванторы, но и ограниченные кванторы вида $\forall x\in F$, $\exists x\in F$, где F – конечное множество.

3. Если $\Phi(P)$ – Σ-формула, содержащая только позитивные вхождения t-местной предикатной переменной P, $\bar{x} = x_1,\dots,x_t$ – список различных переменных, то наименьшая неподвижная точка монотонного преобразователя предикатов $P\mapsto[\bar{x};\Phi\,](\mathfrak{M}, P)$ является рекурсивно-перечислимым предикатом на рекурсивной модели $\mathfrak{M}$.

Отмеченные выше особенности сохранения рекурсивной перечислимости (вычислимости) Σ-формулами вместе с подходящим расширением на предикаты высших типов и лежат в основе предлагаемого языка Σ-выражений.

Начальный вариант этого языка для не "высоких" типов опубликован в работе автора [2].

Зафиксируем некоторую сигнатуру $\sigma = \langle\ =,\in,\ P_0^{n_0},\dots,\ P_k^{n_k}\ ;\ f_0^{m_0},\dots,\ f_l^{m_l};\ c_0,\dots,c_p\ \rangle$.

Определим понятие типа (множество T) и понятие предикатного типа (множество PT) так:

I. $T = PT\cup\{0\}$, $0\notin PT$.

2. $B\in PT$.

3. Если $\tau_1,\dots,\tau_n\in T$, $\tau_0\in PT$, то $\tau\rightleftharpoons(\tau_1,\dots,\tau_n|\tau_0)\in PT$.

Для каждого типа $\tau\in T$ в языке имеется бесконечно много переменных типа τ .

Типы вида $\underbrace{(0,\dots,0}_{n}|B)$ будем обозначать $\underline{n}$.

На множестве PT определим частичный порядок $\leq$ как наименьший частичный порядок, для которого $\tau_0\leq\tau$, если $\tau = (\tau_1,\dots,\tau_n\,|\,\tau_0)$; заметим, что B является наименьшим элементом этого частичного порядка.

Для любого типа $\tau\in T$ определяется понятие Σ-выражения (или, проще, выражения) типа τ.

Выражения типа 0 – это обычные термы:

а) всякая переменная типа 0 и всякая константа c_i являются термами;

б) если $t_1,\dots,t_{m_i}$ – термы, то $f_i(t_1,\dots,t_{m_i})$ – терм.

Выражения типа B будут называться также формулами.

Слова вида $P_j(t_1,\dots,t_{n_j})$, где $t_1,\dots,t_{n_j}$ – термы, – элементарные формулы.

Простыми формулами называются булевы комбинации элементарных формул (используются логические связки $\neg, \vee, \wedge$).

Всякая простая формула является формулой, т.е. выражением типа B.

Всякая переменная R типа $\tau \in PT$ есть выражение типа τ.

Если Φ_0 – выражение типа $\tau_0 \in PT$, Φ_1 – выражение типа $\tau_1 \in PT$ и $\tau_1 \le \tau_0$, то $(\Phi_0 \wedge \Phi_1)$ и $(\Phi_0 \vee \Phi_1)$ – выражения типа τ_0.

Если Φ – выражение типа $\tau_0 \in PT$, $\bar{R} \rightleftharpoons R_1,\dots,R_t$ – список различных переменных типов $\tau_1,\dots,\tau_t \in T$, то $[\bar{R};\Phi]$ – выражение типа $(\tau_1,\dots,\tau_t|\tau_0)$.

Если Φ – выражение типа $(\tau_1,\dots,\tau_t|\tau_0)$; $\Phi_1,\dots,\Phi_t$ – выражения типов $\tau_1,\dots,\tau_t$ соответственно, то $\Phi(\Phi_1,\dots,\Phi_t)$ – выражение типа τ_0.

Если Φ – выражение типа $\underline{n}=(0,\dots,0|B)$, $\bar{x} \rightleftharpoons x_1,\dots,x_n$ – список различных переменных типа 0 и Φ_0 – выражение типа $\tau \in PT$, то $[\Phi;\bar{x}]\Phi_0$ – выражение типа τ.

Если Φ – выражение типа $\tau \in PT$, R – переменная типа τ, то $\langle R\rangle\Phi$ – выражение типа τ.

Если Φ – выражение типа $\tau \in PT$, x, y – переменные типа 0, то $(\exists x\Phi)$, $(\exists x \in y\Phi)$ и $(\forall x \in y\Phi)$ – выражения типа τ.

Для каждого выражения Φ типа $\tau \in T$ индуктивно определяются понятия свободного и связанного вхождения переменных и множество $FV(\Phi)$ свободных переменных выражения Φ.

Дадим определение последнему.

Для термов (выражений типа 0):

если $t = x$, то $FV(t) \rightleftharpoons \{x\}$;

если $t = c_i$, то $FV(t) \rightleftharpoons \emptyset$;

если $t = f_j(t_1,\dots,t_{m_j})$, то $FV(t) \rightleftharpoons \bigcup_{i=1}^{m_j} FV(t_i)$.

Для элементарной формулы $\Phi = P_i(t_1,\dots,t_{n_i})$: $FV(\Phi) \rightleftharpoons \bigcup_{j=1}^{n_i} FV(t_j)$; для простых формул, как обычно.

Для переменной R типа τ:

$$FV(R) \rightleftharpoons \{R\};$$

$$FV(\Phi_0 \circ \Phi_1) \rightleftharpoons FV(\Phi_0) \cup FV(\Phi_1), \quad \circ \in \{\vee, \wedge\};$$

$$FV([\bar{R}; \Phi]) \rightleftharpoons FV(\Phi) \setminus \{\bar{R}\};$$

$$FV(\Phi(\Phi_1, \ldots, \Phi_t)) \rightleftharpoons FV(\Phi) \cup \bigcup_{i=1}^{t} FV(\Phi_i);$$

$$FV([\Phi; \bar{x}]\Phi_0) \rightleftharpoons FV(\Phi) \cup (FV(\Phi_0) \setminus \{\bar{x}\});$$

$$FV(\langle R \rangle \Phi) \rightleftharpoons FV(\Phi) \setminus \{R\};$$

$$FV(\exists x \Phi) \rightleftharpoons FV(\Phi) \setminus \{x\};$$

$$FV(\exists x \in y \Phi) = FV(\forall x \in y \Phi) = (FV(\Phi) \setminus \{x\}) \cup \{y\}.$$

Для языка Σ-выражений формулируется простое исчисление, правила которого позволяют в определенной мере понять и семантику этого языка.

Формулы исчисления имеют вид $\Phi_0 \subseteq \Phi_1$, где Φ_0 и Φ_1 – выражения одного и того же типа $\tau \in PT$; $\Phi_0 \approx \Phi_1$ означает $\Phi_0 \subseteq \Phi_1$ и $\Phi_1 \subseteq \Phi_0$. Через $\tau(\Phi)$ будем обозначать тип выражения Φ.

Аксиомы

$\Phi_0 \subseteq \Phi_1$, если Φ_0 и Φ_1 – $\exists$-формулы языка исчисления предикатов и $\Phi_0 \to \Phi_1$ – тождественно истинная формула.

$$[\bar{R}; \Phi](\bar{\Phi}) \approx (\Phi)^{\bar{R}}_{\bar{\Phi}};$$

$$(\Phi_0 \circ \Phi_1)(\bar{\Psi}) \approx \Phi_0(\bar{\Psi}) \circ \Phi_1(\bar{\Psi}), \quad \circ \in \{\vee, \wedge\}, \quad \tau(\Phi_0) = \tau(\Phi_1);$$

$$(\Phi_0 \circ \Phi_1)(\bar{\Psi}) \approx \Phi_0(\bar{\Psi}) \circ \Phi_1, \quad \circ \in \{\vee, \wedge\}, \quad \tau(\Phi_1) < \tau(\Phi_0);$$

$$[\Phi; \bar{x}]\Phi_0 \approx \exists \bar{y}((\Phi_0)^{\bar{x}}_{\bar{y}} \wedge \Phi(\bar{y})), \quad \{\bar{y}\} \cap (FV(\Phi) \cup FV(\Phi_0)) = \emptyset;$$

$$(\Phi)^{R}_{\langle R \rangle \Phi} \approx \langle R \rangle \Phi.$$

Введем выражения $\bot_\tau$, T_τ для $\tau \in PT$ так: $\bot_B \rightleftharpoons \exists x(x \neq x)$, $T_B \rightleftharpoons \exists x(x = x)$; если $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n | \tau_0)$; $\bar{R} = R_1, \ldots, R_n$ – список различных переменных типов $\tau_1,\dots,\tau_n$ соответственно, то $\perp_\tau \rightleftharpoons [\bar{R}; \perp_{\tau_0}]$, $T_\tau \rightleftharpoons [\bar{R}: T_{\tau_0}]$.

Еще три аксиомы для этих выражений:

$$\perp_\tau \subseteq \Phi,\quad \Phi \subseteq T_\tau,\quad \tau(\Phi) = \tau.$$

П р а в и л а   в ы в о д а

$$\frac{\Phi_0 \subseteq \Psi_0 \quad \Phi_1 \subseteq \Psi_1}{(\Phi_0 \circ \Phi_1) \subseteq (\Psi_0 \circ \Psi_1)} \quad \circ\in\{\vee,\wedge\};\quad \frac{\Phi_0 \subseteq \Phi_1}{[\bar{R};\Phi_0] \subseteq [\bar{R};\Phi_1]};$$

$$\frac{\Phi_0 \subseteq \Psi_0, \Phi_1 \subseteq \Psi_1, \dots, \Phi_k \subseteq \Psi_k}{\Phi_0(\Phi_1,\dots,\Phi_k) \subseteq \Psi_0(\Psi_1,\dots,\Psi_k)};\quad \frac{[\bar{R};\Phi_0] \subseteq [\bar{R};\Phi_1]}{\Phi_0 \subseteq \Phi_1};$$

$$\frac{\Phi_0 \subseteq \Psi_0 \quad \Phi_1 \subseteq \Psi_1}{[\Phi_0;\bar{x}]\Phi_1 \subseteq [\Psi_0;\bar{x}]\Psi_1};\qquad \frac{\Phi_0 \subseteq \Phi_1}{\langle R\rangle\Phi_0 \subseteq \langle R\rangle\Phi_1};$$

$$\frac{\Phi_0 \subseteq \Phi_1}{(Q\Phi_0) \subseteq (Q\Phi_1)} \qquad Q \in \{\exists x, \exists x \in y, \forall x \in y\};$$

$$\frac{\Phi_0 \subseteq \Phi_1}{(\Phi)^R_{\Phi_0} \subseteq (\Phi)^R_{\Phi_1}};\quad \frac{(\Phi)^R_{\Phi_0} \subseteq \Phi_0}{\langle R\rangle\ \Phi \subseteq \Phi_0};\quad \frac{\Phi_0 \subseteq \langle R\rangle\Phi}{(\Phi)^R_{\Phi_0} \subseteq \langle R\rangle\Phi}.$$

Под программами будем понимать выражения типов $\underline{\underline{n}}$, $n\in\omega$; входными параметрами программы являются все свободные переменные соответствующего выражения, а выходными – n-ки элементов, удовлетворяющие соответствующему предикату. Так, если $\Phi(\bar{x};\bar{y})$ – спецификация, являющаяся выражением типа B, то $[\bar{y};\Phi]$ – соответствующая программа. Такое понимание программы отражает, конечно, ее недетерминированность.

Укажем, как известные программистские конструкции выражаются на языке Σ-выражений.

К о м п о з и ц и я. Пусть Φ_0 – n-программа, т.е. выражение типа $\underline{\underline{n}}$, Φ_1 – m-программа. Если мы хотим n входным параметрам $x_1,\dots,x_n$ программы Φ_1 в качестве значений приписать результат работы программы Φ_0, то такая композиция реализуется как n-программа $[\Phi_0; \bar{x}]\Phi_1$.

Присваивание. Оператор присваивания $x:=t$ (примененный к Φ) реализуется так: $[[y; y=t];x]\Phi$, $y \notin FV(t)$.

Если P, то Φ_0, иначе Φ_1. Реализуется как $(\Phi_0 \wedge P) \vee (\Phi_1 \wedge \neg P)$. Здесь Φ_0 и Φ_1 – n-программы, а P – простая формула.

Рекурсия. Реализуется с помощью конструкции наименьшей неподвижной точки $\langle R \rangle \Phi$.

Использование выражений произвольных типов из PT позволяет определять схемы программ и другие сложные конструкции современных алгоритмических языков.

Связь с логическим программированием. Укажем, как по логической программе написать соответствующее Σ-выражение. Пусть логическая программа L определена списком хорновых дизъюнктов вида:

$$\ldots, \Phi_i \to P(t^i_1, \ldots, t^i_n), \ldots \quad , \quad i = 1, \ldots, k.$$

Выберем n переменных $x_1, \ldots, x_n$, которые не встречаются в этой программе; i-му дизъюнкту $\Phi_i \to P(t^i_1, \ldots, t^i_n)$ сопоставим формулу $\Psi_i \rightleftharpoons ((\bigwedge_{j=1}^{n} x_j = t^i_j) \wedge \Phi_i)$, далее образуем n-программу $\pi(L)$ так:

$\langle P \rangle [\bar{x}; \bigwedge_{i=1}^{k} \Psi_i]$. Заметим, что эта конструкция корректна, так как каждая формула Φ_i либо пуста, либо есть конъюнкция атомарных формул. n-программа $\pi(L)$ имеет ту же семантику, что и логическая программа L.

Точная семантика языка Σ-выражений определяется для произвольных допустимых множеств (с праэлементами) (см. [3–5]). С точки зрения программирования интерес представляют допустимые множества вида $HF(\mathfrak{M})$ над рекурсивной моделью $\mathfrak{M}$ (см. [I]). Для описания семантики для любого типа $\tau \in PT$ определяется класс Σ_τ Σ-предикатов типа τ над произвольным допустимым множеством и доказывается утверждение о том, что любое Σ-выражение Φ типа $\tau \in PT$ определяет на допустимом множестве Σ-предикат типа τ, как только всем свободным переменным выражения Φ приписаны в качестве значений элементы для переменных типа 0 и Σ-предикаты соответствующего типа для переменных предикатных типов. Особенностью этой семантики является то, что это теоретико-модельная семантика, а не семантика преобразователей состояний. Точное описание всех необходимых семантических понятий требует отдельной публикации.

Рассмотрим пример доказательства в приведенном выше исчислении.

Пусть Φ – Σ-выражение предикатного типа τ, а Q и R – различные предикатные переменные типа τ. Установим, что $\langle R\rangle\langle Q\rangle\Phi \approx \langle Q\rangle\langle R\rangle\Phi$. Полагаем $R_0 \rightleftharpoons \langle R\rangle\Phi$, $Q_0 \rightleftharpoons \langle Q\rangle R_0 = \langle Q\rangle\langle R\rangle\Phi$, $R_1 \rightleftharpoons (R_0)^Q_{Q_0}$.

Используя аксиомы, имеем: $(\Phi)^R_{R_0} \approx R_0$, $R_1 = (R_0)^Q_{Q_0} \approx Q_0$; далее

$$Q_0 \approx (R_0)^Q_{Q_0} \approx ((\Phi)^R_{R_0})^Q_{Q_0} = ((\Phi)^Q_{Q_0})^R_{(R_0)^Q_{Q_0}} =$$

$$= ((\Phi)^Q_{Q_0})^R_{R_1} = ((\Phi)^R_{R_1})^Q_{Q_0}.$$

Отсюда $((\Phi)^R_{R_1})^Q_{Q_0} \subseteq Q_0$, и, по правилу вывода, $\langle Q\rangle(\Phi)^R_{R_1} \subseteq Q_0$; далее $\langle Q\rangle(\Phi)^R_{R_1} = (\langle Q\rangle\Phi)^R_{R_1} \approx (\langle Q\rangle\Phi)^R_{Q_0}$ и $(\langle Q\rangle\Phi)^R_{Q_0} \subseteq Q_0$ влечет $\langle R\rangle\langle Q\rangle\Phi \subseteq Q_0 = \langle Q\rangle\langle R\rangle\Phi$. Симметрично $\langle Q\rangle\langle R\rangle\Phi \subseteq \langle R\rangle\langle Q\rangle\Phi$ и $\langle R\rangle\langle Q\rangle\Phi \approx \langle Q\rangle\langle R\rangle\Phi$.

Рассмотрим теперь такую ситуацию: пусть Φ – Σ-выражение предикатного типа τ_0, Ψ – Σ-выражение предикатного типа τ_1; R и Q – предикатные переменные типов τ_0 и τ_1 соответственно.

Полагаем

$$R_0 \rightleftharpoons \langle R\rangle\Phi, \qquad Q_0 \rightleftharpoons \langle Q\rangle\Psi,$$

$$R_1 \rightleftharpoons \langle R\rangle(\Phi)^Q_{Q_0}, \qquad Q_1 \rightleftharpoons \langle Q\rangle(\Psi)^R_{R_0},$$

$$R_2 \rightleftharpoons (\langle R\rangle\Phi)^Q_{Q_1} = (R_0)^Q_{Q_1}, \qquad Q_2 \rightleftharpoons (\langle Q\rangle\Psi)^R_{R_1} = (Q_0)^R_{R_1}.$$

Без особого труда, как выше, можно установить, что пары $\langle R_1, Q_2\rangle$ и $\langle R_2, Q_1\rangle$ являются неподвижными точками для $\langle \Phi, \Psi\rangle$, т.е. что

$$\begin{cases} (\Phi)^{R,Q}_{R_1,Q_2} \approx R_1, \\ (\Psi)^{R,Q}_{R_1,Q_2} \approx Q_2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} (\Phi)^{R,Q}_{R_2,Q_1} \approx R_2 \\ (\Psi)^{R,Q}_{R_2,Q_1} \approx Q_1 . \end{cases}$$

Однако остается вопрос о том, можно ли в данном исчислении доказать, что эти неподвижные точки "совпадают", т.е. что $R_1 \approx R_2$ и $Q \approx Q_2$? [x)]

Если это доказать нельзя и в разумном расширении исчисления, то, по-видимому, нужно расширить сам синтаксис языка Σ-выражений (и соответственно исчисление), допустив образование Σ-выражения типа τ_0

$$\langle R_0 ; R_1, \ldots, R_n \rangle [\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_n],$$

когда $R_0, R_1, \ldots, R_n$ – список различных переменных предикатных типов $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n$ соответственно, а $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_n$ – Σ-выражения типов $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n$ соответственно; $FV(\langle R_0 ; R_1, \ldots, R_n \rangle [\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_n]) = (\bigcup_{i \le n} FV(\Phi_i)) \setminus \{R_0, R_1, \ldots, R_n\}$.

Семантика этого выражения – нулевая компонента наименьшей неподвижной точки оператора

$$\langle P_0, P_1, \ldots, P_n \rangle \mapsto \langle (\Phi_0)^{\bar{R}}_{\bar{P}}, (\Phi_1)^{\bar{R}}_{\bar{P}}, \ldots, (\Phi_n)^{\bar{R}}_{\bar{P}} \rangle.$$

Литература

1. ЕРШОВ Ю.Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. – М.: Наука, 1980.

2. ЕРШОВ Ю.Л. Динамическая логика над допустимыми множествами. –ДАН СССР, 1983, т.273, №5, с.1045–1048.

3. ЕРШОВ Ю.Л. Σ-предикаты конечных типов. –Алгебра и логика, 1985, т.24, №5, с.563–602.

4. МАККАИ М. Допустимые множества и бесконечная логика. – В кн.: Справочная книга по математической логике. Ч.I. М., Наука, 1982, с. 235–288.

5. BARWISE J. Admissible sets and structures.– B.: Springer-Verlag, 1975.

Поступила в ред.-изд.отд.
22 января 1986 года

---

x) В.Ю.Сазонов положительно ответил на этот вопрос. (Примечание при корректуре.)