ЛОГИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ТИПОВ ДАННЫХ
(Вычислительные системы)
1986 год Выпуск 114

УДК 517.11

Σ-ДОПУСТИМЫЕ МНОЖЕСТВА

Ю.Л.Ершов

Цель настоящей заметки - несколько расширить понятие допустимого множества, сохранив основные свойства теории рекурсии на таких множествах.

Пусть $\sigma = \langle U, \in, \ldots \rangle$ - сигнатура некоторой теории KPU_σ допустимых множеств с праэлементами; расширим эту сигнатуру, добавив семейство новых (одноместных) предикатных символов $\sigma^+ = \langle P_i \setminus i \in I \rangle$; пусть $\sigma_0 = \sigma \cup \sigma^+$. Назовем Δ_0-*формулой сигнатуры* σ_0 всякую Δ_0-формулу сигнатуры σ и Σ-*формулой сигнатуры* σ_0 любую формулу из наименьшего множества Σ-формул сигнатуры σ_0 такого, что

1) всякая Δ_0-формула лежит в Σ;

2) для любого терма t и $P_i \in \sigma^+$, $P_i(t) \in \Sigma$;

3) Σ замкнуто относительно образования конъюнкций, дизъюнкций и замкнуто относительно навешивания ограниченных кванторов $(\exists x \in y, \forall x \in y)$ и квантора существования.

Теория ΣKPU_{σ_0} - Σ-*допустимых множеств* - определяется следующей системой аксиом: аксиомами экстенсиональности фундирования, пары, объединения, Δ_0-выделения и аксиомами Σ-выборки:

$$\forall x \in a \exists y \varphi(x,y) \to \exists b (\forall x \in a \exists y \in b \varphi(x,y) \wedge \forall y \in b \exists x \in a \varphi(x,y))$$

для любой Σ-формулы φ сигнатуры σ_0.

Σ-*допустимым множеством* сигнатуры σ_0 называется всякая "натуральная" модель системы аксиом ΣKPU_{σ_0}.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если ограничиться формулами сигнатуры σ, то ΣKPU_{σ_0} влечет KPU_σ.

Пусть φ – Σ-формула сигнатуры σ_0, пусть $P_0,\dots,P_k$ – все предикатные символы из σ^+, встречающиеся в φ; выберем различные (множественные) переменные $\pi_0,\dots,\pi_k$, не встречающиеся в φ. Формула φ^* получается из φ заменой всех элементарных подформул вида $P_i(t)$ на подформулу $t\in\pi_i$. Заметим, что φ^* – Σ-формула сигнатуры σ. Запись $\exists\pi_i\subseteq P_i\Phi$ есть сокращение для выражения $\exists\pi_i\,(\forall u\in\pi_i P_i(u)\wedge\Phi)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I (принцип непрерывности). В ΣKPU_{σ_0} для любой Σ-формулы φ доказуема эквивалентность

$$\varphi\leftrightarrow\exists\pi_0\subseteq P_0\dots\exists\pi_k\subseteq P_k\varphi^*.$$

Предложение доказывается индукцией по сложности Σ-формулы φ обычным образом. Рассмотрим наиболее нетривиальный случай. Пусть для φ уже установлено, что $\varphi\longleftrightarrow\exists\pi_0\subseteq P_0\dots\exists\pi_k\subseteq P_k\varphi^*$. Пусть $\Psi\rightleftharpoons\forall x\in y\varphi$, тогда $\Psi\leftrightarrow\forall x\in y\,\exists\pi_0\subseteq P_0\dots\exists\pi_k\subseteq P_k\varphi^*$.

Пусть $\Psi_0\rightleftharpoons\exists\pi_1\subseteq P_1\dots\exists\pi_k\subseteq P_k\varphi^*$; Ψ_0 – Σ-формула; если $\forall x\in y$ $\exists\pi_0(\forall u\in\pi_0 P_0(u)\wedge\Psi_0)$, то по аксиоме Σ-выборки существует a такое, что

$$\forall x\in y\,\exists\pi_0\in a(\forall u\in\pi_0 P_0(u)\wedge\Psi_0)\wedge\forall\pi_0\in a\,\exists x\in y\,(\forall u\in\pi_0 P_0(u)\wedge\Psi_0).$$

Если положим $\pi_0^*\rightleftharpoons\cup a$, то из $\forall\pi_0\in a(\forall u\in\pi_0 P_0(u))$ следует, что $\pi_0^*\subseteq P_0$. Далее для любого $\pi_0\in a$ имеем $\pi_0\subseteq\pi_0^*$ и Ψ_0 влечет $(\Psi_0)^{\pi_0}_{\pi_0^*}$, отсюда

$$\forall x\in y\,\exists\pi_0\subseteq P_0\Psi_0\to\exists\pi_0\subseteq P_0\forall x\in y\Psi_0;$$

обратная импликация очевидна. Индукция по k доказывает, что

$$\forall x\in y\,\exists\pi_0\subseteq P_0\dots\exists\pi_k\subseteq P_k\varphi^*\leftrightarrow\exists\pi_0\subseteq P_0\dots\exists\pi_k\subseteq P_k\forall x\in y\,\varphi^*,$$

но $\forall x\in y\varphi^*$ это Ψ^*. □

СЛЕДСТВИЕ I (принцип рефлексии). Для любой Σ-формулы φ имеет место эквивалентность

$$\varphi\longleftrightarrow\exists a\,\exists\pi_0\subseteq P_0\dots\exists\pi_k\subseteq P_k(\varphi^*)^{(a)}.$$

Достаточно заметить, что φ^* – Σ-формула сигнатуры σ и для нее справедлив обычный принцип рефлексии.

СЛЕДСТВИЕ 2 (Δ-отделение). Для любых Σ-формул $\varphi(x), \Psi(x)$ следующее есть теорема $\Sigma KPU_{\mathfrak{b}_0}$:

$$\forall x \in a(\varphi(x) \leftrightarrow \neg\Psi(x)) \to \exists \mathfrak{b}(\mathfrak{b} = \{x \mid \varphi(x), x \in a\}).$$

Имеем $\forall x \in a(\varphi(x) \vee \Psi(x))$, тогда $\exists c\, \exists \pi_0 \subseteq P_0 \ldots \exists \pi_k \subseteq P_k$ $\forall x \in a(\varphi^*(x) \vee \Psi^*(x))^{(c)}$; по Δ_0-выделению существует $\mathfrak{b} = \{x \in a \mid \varphi^*(x)^{(c)}\}$. Легко проверить, что $\mathfrak{b}$ искомый. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $\langle \mathbb{A}, \mathbb{P} \rangle$ – Σ-допустимое множество, $Q \subseteq A$ – Σ-подмножество, то $\langle \mathbb{A}, \mathbb{P} \cup \{Q\} \rangle$ также Σ-допустимое множество.

Рутинная проверка подстановкой вместо предиката Q формулы, его определяющей.

ЗАМЕЧАНИЕ. Предложения I и 2 вместе дают новое доказательство принципу Σ-перечисления, установленному автором в [I] в той его части (основной), которая касается непрерывности. В [I] принцип Σ-перечисления сформулирован в комбинации с принципом Σ-рефлексии.

Важным обстоятельством является сохранение справедливости теоремы Ганди.

ТЕОРЕМА. Если $\varphi(x, \bar y, P_0, \ldots, P_k, R^+)$ – Σ-формула сигнатуры $\sigma_0 \cup \langle R \rangle$, то существует Σ-формула $\Psi(x, \bar y, P_0, \ldots, P_k)$, которая для любого Σ-допустимого множества $\mathbb{A}$ сигнатуры σ_0 и любых значений $\bar b$ параметров $\bar y$ определяет $(\{a \mid \mathbb{A} \models \Psi(a, \bar b, \bar P)\})$ наименьшую неподвижную точку оператора, определенного формулой φ.

Укажем набросок доказательства. Пусть $\varphi'(x, \bar y, \pi_0, \ldots, \pi_k, R)$ – формула, полученная из φ заменой всех элементарных подформул вида $P_i(t)$ на $t \in \pi_i$. Тогда φ' – Σ-формула сигнатуры $\sigma \cup \langle R \rangle$ и, по теореме Ганди, для $\mathbb{A}\restriction\sigma$ существует Σ-формула $\Psi'(x, \bar y, \bar\pi)$, определяющая наименьшую неподвижную точку для $\varphi'(R^+)$; полагаем $\Psi(x, \bar y, \bar P) \rightleftharpoons \exists \pi_0 \subseteq P_0 \ldots \exists \pi_k \subseteq P_k \Psi'(x, \bar y, \bar\pi)$. Нетрудное применение принципа непрерывности позволяет установить, что Ψ – искомая формула.

Пусть $\mathbb{A}$ Σ-допустимо, $\bar b \in A$ и $I_{\bar b}$ – наименьшая неподвижная точка для $\varphi(-, \bar b, \bar P, -)$. Пусть $\bar\pi \subseteq \bar P$ – любые, тогда $J_{\bar b, \bar\pi} = \{a \mid \mathbb{A} \models \Psi'(a, \bar b, \bar\pi)\}$ – наименьшая неподвижная точка $\varphi'(-, \bar b, \bar\pi, -)$; но $\bar\pi \subseteq \bar P$ влечет $J_{\bar b, \bar\pi} \subseteq I_{\bar b}$; следовательно, $J_{\bar b} \rightleftharpoons \{\mathbb{A} \models \exists \bar\pi \subseteq \bar P\, \Psi'(a, \bar b, \bar\pi)\} \subseteq I_{\bar b}$.

Остается показать, что $J_{\bar b}$ - неподвижная точка.

Пусть $\mathbb{A} \models \varphi(a, \bar b, \bar P, J_{\bar b})$, тогда (так как $J_{\bar b}$ - Σ-предикат) существуют $\bar\pi \subseteq \bar P$, $\pi \subseteq J_{\bar b}$ такие, что $\mathbb{A} \models \varphi^*(a, \bar b, \bar\pi, \pi)$.

Так как $\pi \subseteq J_{\bar b}$, то

$$\mathbb{A} \models \forall b \in \pi \exists \bar\pi' \subseteq \bar P \Psi'(b, \bar b, \bar\pi'),$$

по Σ^+-объединению (см. предложение 3 ниже)

$$\mathbb{A} \models \exists \bar\pi'' \subseteq \bar P \forall b \in \pi\ \Psi'(b, \bar b, \bar\pi'').$$

Пусть $\bar\pi^0 \rightleftharpoons \bar\pi'' \cup \bar\pi$, тогда $\mathbb{A} \models \forall b \in \pi\ \Psi'(b, \bar b, \bar\pi^0)$, следовательно, $\pi \subseteq J_{\bar b, \bar\pi^0}$; так как $\mathbb{A} \models \varphi^*(a, \bar b, \bar\pi, \pi)$, то $\mathbb{A} \models \varphi^*(a, \bar b, \bar\pi^0, \pi)$,

$$\mathbb{A} \models \varphi^*(a, \bar b, \bar\pi^0, J_{\bar b, \bar\pi^0}) \Rightarrow a \in J_{\bar b, \bar\pi^0} \subseteq J_{\bar b}.$$

СЛЕДСТВИЕ. *Если сигнатура σ_0 конечна, то для любого $n \in \omega$ существует $(n+1)$-местный Σ-предикат P, универсальный для n-местных Σ-предикатов.*

В работе [2] было введено условие Σ^+-объединения для класса предикатов $\mathbb{P}$ на допустимом множестве $\mathbb{A}$. Не уменьшая общности, можно считать, что $\mathbb{P}$ состоит из одноместных предикатов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Класс $\mathbb{P}$ удовлетворяет принципу Σ^+-объединения тогда и только тогда, когда $\langle \mathbb{A}, \mathbb{P} \rangle$ - Σ-допустимое множество.*

Пусть $\mathbb{P}$ удовлетворяет принципу Σ^+-объединения и пусть $\varphi(x,y)$ - Σ-формула такая, что $\forall x \in a \exists y \varphi(x,y)$. Определим предикаты $P'(y) \rightleftharpoons \exists x \in a \varphi(x,y)$, $Q'(x,y) \rightleftharpoons \exists z (y = \{z\} \wedge \varphi(x,y))$; тогда $\forall x \in a \exists y \subseteq P'\ Q'(x,y)$. По принципу Σ^+-объединения $\exists b \subseteq P' \forall x \in a$ $\exists y \subseteq b Q'(x,y)$. Тогда для этого b

$$b \subseteq P' \Rightarrow \forall y \in b P'(y) \Leftrightarrow \forall y \in b \exists x \in a \varphi(x,y);$$

далее, $\forall x \in a \exists y \subseteq b Q'(x,y) \Rightarrow \forall x \in a \exists y \in b \varphi(x,y)$; итак, b таково, что $\forall x \in a \exists y \in b \varphi(x,y) \wedge \forall y \in b \exists x \in a \varphi(x,y)$.

Наоборот, пусть $\langle \mathbb{A}, \mathbb{P} \rangle$ Σ-допустимо и

$$\forall x \in a \exists y \subseteq P\ Q(x,y),$$

$$\forall x \in a \exists y (\forall z \in y\ P(z) \wedge Q(x,y)),$$

по аксиоме Σ-выборки, существует b такой, что $\forall x \in a \exists y \in b (\forall z \in y\ P(z) \wedge Q(x,y)) \wedge \forall y \in b \exists x \in a (\forall z \in y\ P(z) \wedge Q(x,y))$. Полагаем $c \rightleftharpoons \cup b$, тогда $\forall y \in b \forall z \in y P(z)$ влечет $\forall z \in c\ P(z)$ или $c \subseteq P$; далее, $\forall x \in a \exists y \in$

$\in b Q(x, y)$ влечет $\forall x \in a\, \exists y \subseteq c Q(x, y)$; следовательно, $\exists c \subseteq P\, \forall x \in a$ $\exists y \subseteq c Q(x, y)$, и принцип Σ^{+}-объединения установлен.

ЗАМЕЧАНИЕ. Сделанное в [2] утверждение о справедливости обобщенной теоремы Ганди является справедливым, как это следует из приведенного выше наброска доказательства, однако эта теорема не является непосредственным следствием никакой из ранее доказанных форм этой теоремы.

Для прояснения понятия Σ-допустимого множества укажем два примера.

1. Пусть X - бесконечное множество, Y - бесконечное подмножество X с бесконечным дополнением, тогда $\langle HF(X), Y\rangle$ - Σ-допустимое множество, причем не существует допустимого множества $\langle HF(X), P\rangle$ такого, что $\langle HF(X), Y\rangle$ и $\langle HF(X), P\rangle$ имеют те же Σ-множества.

2. Пусть X и Y, как выше, тогда $\langle HYP(X), Y\rangle$ не является Σ-допустимым множеством.

Действительно, легко проверить, что Y не имеет бесконечных подмножеств, лежащих в $HYP(X)$. Отсюда следует, что хотя $\forall x \in \omega$

$\exists f(f: x \overset{1-1}{\to} Y)$, но нет b такого, что

$$\forall x \in \omega\, \exists f \in b (f: x \overset{1-1}{\to} Y) \wedge \forall f \in b\, \exists x \in \omega\, (f: x \overset{1-1}{\to} Y);$$

в противном случае $\bigcup_{f \in b} \rho f$ - бесконечное подмножество Y в $HYP(X)$.

В заключение отметим, что высказанная в конце работы [2] гипотеза о совпадении башни $A_{\tau}(\emptyset)$ с Σ-предикатами Σ_{τ} , очевидно, справедлива в случае конечной сигнатуры σ.

Литература

1. ЕРШОВ Ю.Л. Принцип Σ-перечисления. ДАН СССР, 1983, т.270, № 4, с.786-788.

2. САЗОНОВ В.Ю., СВИРИДЕНКО Д.И. Денотационная семантика языка Σ-выражений. -Настоящий сборник, с. 16-34.

Поступила в ред.-изд.отд.
12 марта 1986 года