ЛОГИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ТИПОВ ДАННЫХ
(Вычислительные системы)
1986 год Выпуск 114

УДК 519.685

ИНДУКТИВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ В ЛОГИЧЕСКИХ СПЕЦИФИКАЦИЯХ

С.П. Крицкий

Введение

В программировании, по крайней мере, три направления: языки спецификаций, абстрактные типы данных, логическое программирование - имеют общий логический (теоретический) базис, в котором индуктивные определения играют все более заметную роль. В качестве примера использования индуктивных определений достаточно сослаться на рекурсивные программы Мак-Карти [1] и определяющие предложения в ПРОЛОГе [2]. В логике их глубокое исследование началось, пожалуй, с работ А.И.Мальцева по квазитождествам (если не считать исследований рекурсивных определений в стиле Эрбрана-Гёделя). А.И.Мальцев доказал существование и описал алгоритм построения наименьшей эрбрановой модели для любой системы квазитождеств [3], откуда следуют результаты о перечислимости этой модели. Денотационная семантика ПРОЛОГа использует эту же модель [2], так как она согласована с его операционной семантикой. Алгоритм Мальцева по существу совпадает с методом наименьшей неподвижной точки, используемым для обоснования ПРОЛОГа [2].

Квазитождества и определения ПРОЛОГа задают так называемую позитивную экзистенциональную (PE-) индукцию [4]. Рекурсивные программы также можно свести к PE-индуктивным определениям. Наименьшие предикаты, PE-индуктивно определимые над достаточно богатой базовой структурой, оказываются элиминируемыми, т.е. выразимыми в языке базовой структуры [4].

Для рекурсивных программ свойство минимальности рекурсивно-определимых функций было сформулировано Парком [5] и использовалось для доказательства свойств этих функций по индукции. В [1,5] это свойство называется индукцией неподвижной точки, но впослед -

ствии это название закрепилось за методом индукции де Баккера и Скотта [6], названным в [I] пошаговой вычислительной индукцией. В [I,7] показано, что для рекурсивных программ свойство минимальности является следствием индукции неподвижной точки. Мак-Карти ввел формулировку свойства минимальности в логику программ для доказательства свойств рекурсивных программ [8]. Он доказал относительную полноту получающейся логики в том смысле, что все утверждения о рекурсивно-определимых функциях доказуемо сводимы к некоторым утверждениям о базовой структуре данных (если она достаточно богата). Такая полнота является следствием доказуемой элиминируемости рекурсивно-определимых функций. Индукция неподвижной точки включается в LCF [7].

Отказ от экзистенциальности в РЕ-индукции приводит к позитивной (Р-) или монотонной индукции [4]. При этом модель, получаемая трансфинитной итерацией алгоритма Мальцева, теряет свойства перечислимости и элиминируемости, но остается наименьшей, Р-индуктивные определения изучались логиками в [4,9,I0 и др.]. Феферман [9] строит системы ID_1, в которых с каждым индуктивным определением предиката связывает схему аксиом индукции, выражающую на самом деле свойство минимальности этого предиката. Эта схема аксиом обобщает различные схемы математической индукции (по n, по структуре объекта, терма и пр.) и в случае рекурсивных программ совпадает с индукцией Парка. Мартин-Лёф [I0] вместо аксиом Фефермана вводит правила натурального вывода: правило введения индуктивно определяемого предиката и схему правил его исключения.

Отказ от позитивности приводит к немонотонной индукции [4] (немонотонной логике [II]). Алгоритм Мальцева трансфинитно строит модель, не являющуюся, вообще говоря, наименьшей, т.е. свойство минимальности для нее уже не выполняется. В более ограниченном виде немонотонность рассматривается в [9,I0]: определяемые предикаты разбиваются на уровни, и отрицание может применяться только к предикатам меньших уровней. Определяемая модель также строится по уровням с условием минимальности каждого следующего обогащения. Такой подход соответствует программистской концепции расширения спецификаций [I2] и концепции отрицания в ПРОЛОГе [2].

Логика Мартин-Лёфа используется в [I3] для построения системы ID, ориентированной на верификацию и логическое программирование. Там же показано, что ID в случае РЕ-индуктивных определений в вычислительном аспекте эквивалентна чистому ПРОЛОГу с полной стратегией доказательства. Как система доказательства ID, конечно, превосходит ПРОЛОГ.

Систему индуктивных определений можно дополнить еще одним методом рассуждений по индукции, справедливым для индуктивно определяемых моделей даже в немонотонном случае. Для позитивной индукции следствием этого метода является свойство минимальности модели, т.е. индукция Фефермана и Мартин-Лёфа. Этот метод вводится в настоящей работе под названием "индукция по определению". В случае рекурсивных программ он совпадает с индукцией неподвижной точки де Баккера и Скотта. Свойства предикатов, допускающие применение этой индукции, обобщают условия допустимости в [I].

В статье пересматривается семантика логических спецификаций. Предлагаемая теоретико-модельная семантика основывается на требованиях консервативности расширения спецификации и минимальности модели: модель, определяемая расширенной спецификацией, должна быть наименьшим обогащением модели, определяемой исходной спецификацией. Эрбрановы модели при наличии определяемых функций не удовлетворяют требованию консервативности, так как при расширении спецификации определением функции может оказаться, что значение этой функции на некотором аргументе равно двум термам, не равным между собой в исходной модели. Тогда в новой модели они будут равны, т.е. носитель модели перестраивается при расширении и ее свойства, доказанные ранее, могут измениться. При нашем подходе в этом случае спецификация вообще не имеет требуемой модели и в этом смысле ее можно считать противоречивой.

При таком подходе, естественно, появляются частичные функции, которых нет в эрбрановых моделях. Поэтому мы включаем в излагаемую теорию частичные структуры, т.е. алгебраические системы с частичными функциями.

Рассматриваются два вида операционной семантики спецификаций: семантика (наименьшей) неподвижной точки индуктивного оператора и семантика логического вывода. Семантика вывода в случае достаточно богатой базовой структуры обеспечивает перечислимость (вычислимость) и элиминируемость определяемых предикатов (функций). Для РЕ-индуктивных определений все три вида семантики определяют одну и ту же модель. Для позитивной индукции эквивалентны семантика неподвижной точки и теоретико-модельная, а структура, определяемая семантикой вывода, вообще может не быть моделью теории. В немонотонном случае все эти три семантики могут определять разные структуры, причем семантика неподвижной точки дает модель теории, но не наименьшую (наименьшей может не быть); тем не менее для нее справедлив принцип индукции по определению. Здесь результаты аналогичны изложенным в [4], но в [4] рассматриваются только определения предикатов.

Введенные в статье теоретико-модельная семантика и семантика вывода могут рассматриваться не только для индуктивных, но и для произвольных логических спецификаций. Формулируется условие эквивалентности этих семантик, позволяющее взглянуть с новой стороны на требование экзистенциональности индуктивных определений.

Наконец, в рамках изложенной теории рассматриваются вопросы об использовании отрицания в иерархических индуктивных определениях (как в [9,10,14]) и о построении наибольшей модели.

Перейдем к точным формулировкам, понимая под спецификацией многосортную теорию первого порядка [15].

§1. Частичные структуры

Языком называется совокупность $\Sigma = \langle S, F, P, \sigma\rangle$, где S - непустое множество сортов (символов), F и P - возможно пустые множества функциональных и предикатных символов, σ - функция, сопоставляющая каждому символу из $F \cup P$ его тип: запись вида $\langle s_1, \ldots, s_n\rangle$, $s_i \in S$, $n \geq 1$. Функция типа $\langle s\rangle$ называется константой сорта s.

Частичной структурой, или просто структурой, называется совокупность $\langle A; F', P'\rangle$, где A - множество объектов структуры (носитель), F' и P' - множества функций и отношений на A; функции, вообще говоря, частичные (тотальные функции - их частный случай). Структура, в которой все функции тотальны, называется тотальной.

Σ-структурой называется структура $\mathfrak{A} = \langle A; F'; P'\rangle$, для которой задана интерпретация I языка $\Sigma = \langle S, F, P, \sigma\rangle$ такая, что $A = \bigcup_{s\in S} A_s$, где $A_s = I(s) \neq \emptyset$ (возможно $A_s \cap A_{s'} \neq \emptyset$); $F' = \{I(f) \mid f \in F\}$ и $I(f): A_{s_1} \times \ldots \times A_{s_n} \to A_s$, если $\sigma(f) = \langle s_1, \ldots, s_n, s\rangle$; $P' = \{I(p) \mid p \in P\}$ и $I(p) \subseteq A_{s_1} \times \ldots \times A_{s_n}$, если $\sigma(p) = \langle s_1, \ldots, s_n\rangle$.

В дальнейшем I будем опускать, если это не ведет к путанице.

С языком связано множество объектных переменных $X = \bigcup_{s\in S} X_s$, где X_s - множество переменных сорта s, $X_s \cap X_{s'} = \emptyset$ при $s \neq s'$. Множество Σ-термов сорта s - это наименьшее множество τ_s со свойствами $X_s \subseteq \tau_s$ и $f(t_1, \ldots, t_n) \in \tau_s$, если $\sigma(f) = \langle s_1, \ldots, s_n, s\rangle$ и $t_i \in \tau_{s_i}$. Множество Σ-термов τ равно $\bigcup_{s\in S} \tau_s$.

Атомарные Σ-формулы имеют вид:

$t_1 = t_2$, где $t_1, t_2 \in \tau$;

$p(t_1,\ldots,t_n)$, где $p \in P$, $\sigma(p) = \langle s_1,\ldots,s_n\rangle$ и $t_i \in \tau_{s_i}$.

Первичные формулы – это атомарные формулы, содержащие не более одного символа из $F \cup P$ (= в P не входит).

Σ-формулы (первого порядка) строятся из атомарных обычным образом с помощью связок $\neg$, $\vee$, &, $\to$, $\leftrightarrow$, $\forall x$, $\exists x$.

Нормализованные формулы строятся так же из первичных.

Формулы вида $\forall \bar{x}\varphi$ и $\exists \bar{x}\varphi$, где φ – бескванторная формула, называются $\forall$- и $\exists$-формулами соответственно.

Оценкой называется частичная функция $\gamma\colon X \to A$ такая, что $\gamma(X_s) \subseteq A_s$. Значение терма t на структуре $\mathfrak{A}$ при оценке γ определяется, как обычно, и обозначается $t[\gamma]$. Истинность формулы $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ на $\mathfrak{A}$ при оценке γ обозначается $\mathfrak{A} \models \varphi[\gamma]$ или $\mathfrak{A} \models \varphi(a_1,\ldots,a_n)$, если $\gamma(x_i) = a_i$. Здесь предполагается, что γ определена для всех переменных терма t и всех свободных переменных формулы φ.

Определение $\models$ учитывает, что $t[\gamma]$ может быть не определено на частичной структуре. Для атомарных формул:

$\mathfrak{A} \models (t_1 = t_2)[\gamma] \Leftrightarrow t_1[\gamma]$ и $t_2[\gamma]$ определены и равны;

$\mathfrak{A} \models p(t_1,\ldots,t_n)[\gamma] \Leftrightarrow$ все $t_i[\gamma]$ определены и $\langle t_1[\gamma],\ldots,t_n[\gamma]\rangle \in I(p)$.

Для остальных формул $\models$ определяется, как обычно.

Истинность при любых оценках обозначается $\mathfrak{A} \models \varphi$.

Σ-теорией называется произвольное множество Σ-формул. Σ-структура $\mathfrak{A}$ называется моделью Σ-теории T, $\mathfrak{A} \models T$, если $\mathfrak{A} \models \varphi$ для всех $\varphi \in T$. Класс всех частичных моделей теории T обозначим $M(T)$; а всех тотальных моделей – $TM(T)$. Элементарной теорией класса Σ-структур K называется Σ-теория $Th(K) = \{\varphi \mid \mathfrak{A} \models \varphi$, если $\mathfrak{A} \in K\}$. $[T]_t = Th(TM(T))$ – множество t-следствий Σ-теории T, а $[T]_p = Th(M(T))$ – множество ее p-следствий.

Выводимость формулы φ из теории T в исчислении предикатов обозначается $T \vdash \varphi$. Теорема Гёделя о полноте исчисления утверждает, что $\varphi \in [T]_t \Leftrightarrow T \vdash \varphi$. Наша задача получить аналогичную характеризацию p-следствий теории T. Применим для этого следующий прием редукции, состоящий в замене функций предикатами.

Редукцией языка $\Sigma = \langle S, F, P, \sigma \rangle$ назовем язык $\Sigma^* = \langle S, \emptyset, F \cup P, \sigma \rangle$. Так как на $\mathfrak{A}$ функцию можно рассматривать как отношение, то всякая Σ-структура является Σ^*-структурой.

Редукцией Σ-формулы φ назовем Σ^*-формулу φ^*, если она получена из φ сначала преобразованием в нормализованную Σ-формулу ϕ последовательной заменой непервичных атомарных подформул $p(t_1,\dots,t_n)$ (в частности, $t_1 = t_2$) формулами

$$\exists x_1 \dots \exists x_n (x_1 = t_1 \& \dots \& x_n = t_n \& p(x_1,\dots,x_n)),$$

а затем заменой в ϕ всех подформул $x = f(x_1,\dots,x_n)$ и $f(x_1,\dots,x_n) = x$ на $f(x_1,\dots,x_n,x)$.

Очевидно, что для любой Σ-структуры $\mathfrak{A}$ и оценки γ

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\gamma] \leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi^*[\gamma].$$

Редукцией Σ-теории T назовем Σ^*-теорию T^*, состоящую из редукций формул теории T и аксиом функциональности $f(\bar{x}, y) \& f(\bar{x},z) \to y = z$ для всех $f \in F$.

Очевидна следующая

ТЕОРЕМА I. $\varphi \in [T]_p \leftrightarrow \varphi^* \in [T^*]_t \leftrightarrow T^* \vdash \varphi^*$.

Для всякой Σ-формулы имеется только конечное число редукций, и, наоборот, для каждой Σ^*-формулы есть только конечное число Σ-формул, редукцией которых она является. Поэтому справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. $[T]_p$ сводимо по перечислимости к $[T^*]_t$.

§2. Семантика логических спецификаций

Будем понимать под спецификацией некоторую Σ-теорию, а под семантикой - способ сопоставления этой теории некоторой Σ-структуры, называемой моделью спецификации и являющейся, как правило, моделью теории (но не обязательно). Здесь мы определим теоретико-модельную семантику и семантику вывода. Семантика неподвижной точки для индуктивных спецификаций определена в §3.

Всюду дальше рассматриваются языки $\Sigma \subseteq \Sigma'$ с одинаковыми сортами; произвольная Σ-структура $\mathfrak{A}$ с носителем A и Σ'-теория T.

Σ'-структура $\mathfrak{B}$ называется Σ'-обогащением Σ-структуры $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\uparrow\Sigma'$, если $\mathfrak{B}$ получается из $\mathfrak{A}$ определением на A функций и предикатов из $\Sigma'\setminus\Sigma$. В этом случае $\mathfrak{A}$ называется Σ-объединением $\mathfrak{B}$ и обозначается $\mathfrak{B}\downarrow\Sigma$.

Пусть $C(\mathfrak{A})$ - множество специальных констант, по одной константе сорта s для каждого $a \in A_s$. Поскольку объект может иметь несколько сортов, в $C(\mathfrak{A})$ ему должно соответствовать несколько констант. Язык Σ расширим этим множеством констант до языка $\Sigma(\mathfrak{A})$, а Σ-структуру $\mathfrak{A}$ обогатим до $\Sigma(\mathfrak{A})$-структуры $\mathfrak{A}_C$ так, что $a \in A$ является значением соответствующей константы из $C(\mathfrak{A})$.

Позитивной диаграммой Σ-структуры $\mathfrak{A}$ называется множество $\Delta^+(\mathfrak{A})$ всех истинных в $\mathfrak{A}_C$ формул вида $c_1 = c_2$, $f(c_1,\dots,c_n) = c_{n+1}$, $p(c_1,\dots,c_n)$, где все $c_i \in C(\mathfrak{A})$, $f \in F$, $p \in P$.

Диаграммой $\mathfrak{A}$ называется множество $\Delta(\mathfrak{A}) = \Delta^+(\mathfrak{A}) \cup \Delta^-(\mathfrak{A})$, где $\Delta^-(\mathfrak{A})$ - множество всех истинных в $\mathfrak{A}_C$ формул вида $c_1 \neq c_2$, $f(c_1,\dots,c_n) \neq c_{n+1}$, $\neg p(c_1,\dots,c_n)$ (все $c_i \in C(\mathfrak{A})$, $f \in F$, $p \in P$).

Если Σ-структуры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ имеют общий носитель и $\Delta^+(\mathfrak{A}) \subseteq \Delta^+(\mathfrak{B})$, то $\mathfrak{B}$ называется расширением $\mathfrak{A}$. Это отношение обозначим $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$; оно частично упорядочивает любое множество Σ-структур.

Σ'-обогащение $\mathfrak{B}$ Σ-структуры $\mathfrak{A}$ называется Т-определимым, если оно является наименьшим по $\leq$ обогащением $\mathfrak{A}$ до модели Σ'-теории Т, и Т-представимым, если это наибольшее Σ'-обогащение $\mathfrak{A}$, для которого $\Delta^+(\mathfrak{B}) \subseteq [\Delta(\mathfrak{A}) \cup T]_P$. Последнее понятие несколько отличается от данного в [4].

Если спецификация Т является расширением некоторой Σ-спецификации, для которой $\mathfrak{A}$ является моделью, то ее Т-определимое обогащение задает теоретико-модельную семантику спецификации Т, а Т-представимое обогащение - семантику вывода (согласно теореме I).

Используя технику, описанную в [4], можно показать, что для достаточно богатой Σ-структуры $\mathfrak{A}$ Т-представимость ее обогащения $\mathfrak{B}$ влечет элиминируемость в $\mathfrak{B}$ предикатов и функций из $\Sigma' \setminus \Sigma$.

Связь определимости и представимости проясняет

ТЕОРЕМА 3. *Т-представимая структура $\mathfrak{B}$ является моделью теории Т $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{B}$ Т-определима; Т-определимая модель Т-представима, если выполняется следующее условие представимости: для любой модели теории $\Delta(\mathfrak{A}) \cup T$ подструктура с носителем A является моделью теории Т.*

В этом условии используется следующее понятие подструктуры: Σ-структура $\mathfrak{A}$ с носителем A называется <u>подструктурой</u> Σ-структуры $\mathfrak{B}$ с носителем B (обозначение $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$), если

1) $A_s \subseteq B_s$ для всех $s \in S$;

2) функции и отношения $\mathfrak{A}$ являются ограничениями на A соответствующих функций и отношений $\mathfrak{B}$.

Носитель модели теории $\Delta(\mathfrak{A}) \cup T$ содержит множество $A' = \{a \mid I(c) = a$, если $c \in C(\mathfrak{A})$ $\}$. Подструктуру с таким носителем мы и называем в условии представимости подструктурой с носителем A.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 3.

1) $\Leftarrow$ очевидно. Докажем $\Rightarrow$. Если $\mathfrak{B}$ - T-представимое обогащение $\mathfrak{A}$, то $\Delta^+(\mathfrak{B}) \subseteq [\Delta(\mathfrak{A}) \cup T]_p$ и, следовательно, для любой ζ из $\zeta \models \Delta(\mathfrak{A}) \cup T$ вытекает $\zeta \models \Delta^+(\mathfrak{B})$. Для $\zeta = \mathfrak{A}\uparrow\Sigma'$ верно $\Delta(\mathfrak{A}) \subseteq \Delta(\zeta)$, т.е. $\zeta \models \Delta(\mathfrak{A})$. Поэтому если еще $\zeta \models T$, то $\zeta \models \Delta(\mathfrak{A}) \cup T$. Следовательно, для любого обогащения ζ структуры $\mathfrak{A}$ до модели T верно $\Delta^+(\mathfrak{B}) \subseteq \Delta^+(\zeta)$, т.е. $\mathfrak{B} \leq \zeta$. Значит, если $\mathfrak{B} \models T$, то $\mathfrak{B}$ T-определима.

2) Пусть $\mathfrak{B}$ - T-определимое обогащение Σ-структуры $\mathfrak{A}$. Пусть также $\mathfrak{A}' \models \Delta(\mathfrak{A}) \cup T$, $\zeta \subseteq \mathfrak{A}'$ и носитель ζ равен A. По определению подструктуры, $\zeta \models \Delta(\mathfrak{A})$ и $\zeta = \mathfrak{A}\uparrow\Sigma'$. Если выполняется условие представимости, то $\zeta \models T$ и из T-определимости $\mathfrak{B}$ следует $\mathfrak{B} \leq \zeta$, т.е. $\Delta^+(\mathfrak{B}) \subseteq \Delta^+(\zeta) \subseteq \Delta^+(\mathfrak{A}')$, т.е. $\mathfrak{A}' \models \Delta^+(\mathfrak{B})$. Так как $\mathfrak{A}'$ - произвольная модель теории $\Delta(\mathfrak{A}) \cup T$, то $\Delta^+(\mathfrak{B}) \subseteq [\Delta(\mathfrak{A}) \cup T]_p$. Заметим теперь, что для $p \in \Sigma' \setminus \Sigma$ и $c_i \in C(\mathfrak{A})$

$$p(c_1,\dots,c_n) \in [\Delta(\mathfrak{A}) \cup T]_p \Rightarrow p(c_1,\dots,c_n) \in \Delta^+(\mathfrak{B}),$$

так как $\mathfrak{B} = \Delta(\mathfrak{A}) \cup T$.Это же верно и для функций из $\Sigma' \setminus \Sigma$. Значит, $\mathfrak{B}$ - наибольшее из обогащений $\mathfrak{A}$, удовлетворяющих условию $\Delta^+(\mathfrak{B}) \subseteq [\Delta(\mathfrak{A}) \cup T]_p$, т.е. $\mathfrak{B}$ T-представима.

Укажем теперь важный случай, когда условие представимости выполняется. Следующее предложение выражает свойство устойчивости формул относительно перехода к подстуктурам. В случае тотальных структур им обладают любые $\forall$-формулы [3], а в случае частичных - только нормализованные.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если φ - нормализованная $\forall$-формула $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B} \models \varphi$, то $\mathfrak{A} \models \varphi$.*

Доказательство аналогично [3].

СЛЕДСТВИЕ I. Для любой теории T, состоящей из нормализованных $\forall$-формул, выполняется условие представимости, и, следовательно, представимость модели равносильна ее определимости.

§3. Индуктивные определения

Теория T называется индуктивным определением, если она состоит из формул вида $\varphi(\bar{x}) \to p(\bar{x})$ и $\psi(\bar{x}, z) \to f(\bar{x}) = z$, по одной для каждого $p, f \in \Sigma' \setminus \Sigma$, где посылки φ, ψ – Σ'-формулы. Теорию T', получаемую из T заменой главной импликации $\to$ на $\leftrightarrow$, будем называть усилением T, или индуктивным определением в сильной форме. Дальше T и T' понимаются в указанном смысле.

Для индуктивных определений можно ввести семантику неподвижной точки с помощью индуктивного оператора.

Обозначим $K(\Sigma)$ класс всех частичных Σ-структур. Для каждой $\mathfrak{A} \in K(\Sigma)$ обозначим $\mathfrak{A}_0$ "пустое" Σ'-обогащение $\mathfrak{A}$, т.е. обогащение пустыми отношениями и функциями. $\mathfrak{A}_0$ всегда существует и единственно. Будем обозначать $B(\mathfrak{A})$ множество всех Σ'-обогащений структуры $\mathfrak{A}$. Оно частично упорядочено отношением $\leq$, имеет точную верхнюю грань (sup) для каждого подмножества и $\mathfrak{A}_0$ является его наименьшим элементом.

Для T определим два индуктивных оператора Φ и Ψ на $K(\Sigma')$: для любой Σ'-структуры $\mathfrak{B} \in K(\Sigma')$ имеем:

$$\Phi(\mathfrak{B})\downarrow\Sigma = \Psi(\mathfrak{B})\downarrow\Sigma = \mathfrak{B}\downarrow\Sigma;$$

$$\Phi(\mathfrak{B}) \models p(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi(\bar{a}).$$

$$\Psi(\mathfrak{B}) \models p(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi(\bar{a}) \vee p(\bar{a}), \text{если } \varphi(\bar{x}) \to p(\bar{x}) \in T;$$

$$\Phi(\mathfrak{B}) \models f(\bar{a}) = b \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \psi(\bar{a}, b),$$

$$\Psi(\mathfrak{B}) \models f(\bar{a}) = b \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \psi(\bar{a}\ b) \vee f(\bar{a}) = b, \text{если } \psi(\bar{x}, z) \to f(\bar{x}) = z \in T.$$

Непосредственно из определений следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для любой $\mathfrak{B} \in K(\Sigma')$:

$$\Psi(\mathfrak{B}) = \mathfrak{B} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models T, \quad \Phi(\mathfrak{B}) = \mathfrak{B} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models T';$$

для любой $\mathfrak{A} \in K(\Sigma)$: $\mathfrak{B} \in B(\mathfrak{A})$ является наименьшей в $B(\mathfrak{A})$ неподвижной точкой оператора $\Psi(\Phi) \Leftrightarrow \mathfrak{B}$ является T (T')-определимым обогащением $\mathfrak{A}$.

Вторая часть этого утверждения устанавливает связь индуктивных операторов с теоретико-модельной семантикой спецификаций T и T'. Для задания семантики неподвижной точки определим степени (трансфинитные) произвольного оператора $F: W \to W$, где W частично упорядочено по $\leq$:

$$F^0(a) = a, \quad F^{\lambda+1}(a) = F(F^\lambda(a)),$$

$F^\lambda(a) = \sup\{F^\mu(a) \mid \mu < \lambda\}$ для предельного λ, если $F^\mu(a)$ определены для всех $\mu < \lambda$.

Оператор F называется <u>направленным</u>, если $a \leq F(a)$, когда $F(a)$ определено; <u>монотонным</u>, если $a \leq b$ и определенность $F(a)$ и $F(b)$ влечет $F(a) \leq F(b)$; <u>непрерывным</u>, если $F(\sup\{a_i \mid i \in \omega\}) = \sup\{F(a_i) \mid i \in \omega\}$ для любой цепи $a_0 \leq a_1 \leq \ldots$, для которой определены все $F(a_i)$ и указанные верхние грани. Непрерывный оператор монотонен.

Стандартным образом доказывается теорема о наименьшей неподвижной точке.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Если в $\langle W; \leq \rangle$ есть наименьший элемент 0, а $F: W \to W$ – направленный или монотонный оператор, для которого определены $F^\lambda(0)$ для всех $\lambda < 2^{|W|}$, то $F^\mu(0) \leq F^\lambda(0)$ при $\mu < \lambda$ и в W существует неподвижная точка оператора F $a = \sup\{F^\lambda(0) \mid \lambda < 2^{|W|}\}$; если F монотонен, то a – наименьшая неподвижная точка; если F непрерывен, то*

$$a = \sup\{F^n(0) \mid n \in \omega\}.$$

Эта теорема применима к операторам Φ и Ψ, действующим в $B(\mathfrak{A})$. Для удобства формулировок рассмотрим дополнительные определения и утверждения.

Монотонность Φ можно охарактеризовать в терминах формул. Обозначим $\varphi_{\mathfrak{B}}$ отношение, определяемое формулой φ на структуре $\mathfrak{B}$.

Σ'-формула φ называется <u>монотонной</u>, если $\mathfrak{B}_1 \leq \mathfrak{B}_2$ влечет $\varphi_{\mathfrak{B}_1} \subseteq \varphi_{\mathfrak{B}_2}$; <u>непрерывной</u>, если для любой цепи $\mathfrak{B}_1 \leq \mathfrak{B}_2 \leq \ldots$, имеющей sup, выполняется $\varphi_{\sup\{\mathfrak{B}_i\}} = \bigcup_i \varphi_{\mathfrak{B}_i}$.

Следующие утверждения очевидны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Φ монотонен (непрерывен) $\Leftrightarrow$ все посылки в T монотонны (непрерывны).*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Оператор Ψ направленный. Если Φ монотонен и определены все степени $\Phi^{\lambda}(\mathfrak{A}_0)$ для $\lambda < \mu$, то $\Psi^{\lambda}(\mathfrak{A}_0) = \Phi^{\lambda}(\mathfrak{A}_0)$ для $\lambda < \mu$.

Семантика (наименьшей) неподвижной точки ставит в соответствие каждому индуктивному определению T и Σ-структуре $\mathfrak{A}$ ее Σ'-обогащение $\mathfrak{B} = \sup\{\Psi^{\lambda}(\mathfrak{A}_0) \mid \lambda < 2^{|A|}\}$.

Будем говорить, что T сходится на $\mathfrak{A}$, если для каждой формулы $\varphi(\bar{x},z) \to f(\bar{x}) = z$ из T и любой $\mathfrak{B}$ из $B(\mathfrak{A})$ выполняется условие

$$\mathfrak{B} = (\varphi(\bar{x},y) \vee f(\bar{x}) = y) \;\&\; (\varphi(\bar{x}\ z) \vee f(\bar{x}) = z) \to y = z.$$

Для таких T и $\mathfrak{A}$ все степени $\Psi^{\lambda}(\mathfrak{A}_0)$ определены.

ТЕОРЕМА 4. I) Если T сходится на $\mathfrak{A}$, то в $B(\mathfrak{A})$ есть модель теории T, определяемая семантикой неподвижной точки;

2) если все посылки в T монотонны и T'- усиление T, то: а) в $B(\mathfrak{A})$ есть модель T $\Leftrightarrow$ в $B(\mathfrak{A})$ есть T-определимая модель; б) T-определимая модель является T'-определимой моделью и моделью, определяемой семантикой неподвижной точки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения I, 2,а $\Leftarrow$ и 2,б легко следуют из предложений 2-5. Для 2,а $\Rightarrow$ в доказательстве нуждается только утверждение, что наличие в $B(\mathfrak{A})$ модели для T влечет существование всех степеней $\Psi^{\lambda}(\mathfrak{A}_0)$. Это не очевидно, если $\Sigma'\setminus\Sigma$ содержит функциональный символ. В этом случае перейдем от T к T* полученной редукцией формул из T, но без добавления аксиом функциональности. Соответствующий оператор Ψ^* остается монотонным и имеет наименьшую неподвижную точку $\mathfrak{B}^*$. Если $\mathfrak{B}$ – модель для T в $B(\mathfrak{A})$, то $\mathfrak{B}^* \leq \mathfrak{B}$. Если бы степени Ψ существовали не все, это означало бы, что в $\mathfrak{B}^*$ не всякая редукция функции f из $\Sigma'\setminus\Sigma$ удовлетворяет условию функциональности. Но тогда невозможно соотношение $\mathfrak{B}^* \leq \mathfrak{B}$. Противоречие завершает доказательство.

Рассмотрим теперь условия монотонности и непрерывности оператора Ψ.

. Σ'-формула называется <u>$(\Sigma'\setminus\Sigma)$-позитивной</u>, если ее пренексная нормальная форма может содержать отрицания только атомарных Σ-формул. Индуктивное определение T называется P- или <u>PE-индуктивным</u>, если посылки формул в T являются $(\Sigma'\setminus\Sigma)$-позитивными формулами или $(\Sigma'\setminus\Sigma)$-позитивными $\exists$-формулами соответственно. Индукцией по структуре формулы легко доказывается

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. $(\Sigma'\setminus\Sigma)$-позитивные формулы монотонны на $B(\mathfrak{A})$; $(\Sigma'\setminus\Sigma)$-позитивные $\exists$-формулы непрерывны на $B(\mathfrak{A})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. PE-индуктивное определение T удовлетворяет условию представимости.

Утверждение следует из эквивалентности формул из T нормализованным $\forall$-формулам.

Пусть T' - усиление T.

ТЕОРЕМА 5. 1) Для P-индуктивного определения T в $B(\mathfrak{A})$ есть модель T $\Leftrightarrow$ в $B(\mathfrak{A})$ есть T- и T'-определимая модель;

2) для PE-индуктивного определения T в $B(\mathfrak{A})$ есть модель T $\Leftrightarrow$ в $B(\mathfrak{A})$ есть T- и T'-представимая модель.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1 следует сразу из первой части предложения 6 и теоремы 4; утверждение 2 для T следует из предложения 7 и следствия 1. Чтобы доказать утверждение 2 для T', достаточно показать, что T-представимость и T'-определимость модели $\mathfrak{B}$ влекут ее T'-представимость. Очевидно, что $\Delta^+(\mathfrak{B}) \subseteq [\Delta(\mathfrak{A}) \cup T]_p \subseteq$ $\subseteq [\Delta(\mathfrak{A}) \cup T']_p$, если $\mathfrak{B}$ T-представима. T'-определимость $\mathfrak{B}$ влечет $\mathfrak{B}_c \models \Delta(\mathfrak{A}) \cup T'$, поэтому любая ложная в $\mathfrak{B}_c$ $(\Sigma'\setminus\Sigma)_c$-формула вида $p(c_1,\ldots,c_n)$ или $f(c_1,\ldots,c_n) = c_{n+1}$, где $c_i \in C(\mathfrak{A})$, не принадлежит $[\Delta(\mathfrak{A}) \cup T']_p$. Следовательно, $\mathfrak{B}$ T'-представима. Теорема доказана.

В [4] аналогичный результат получен только для T.

ЗАМЕЧАНИЕ. Непрерывность оператора Ψ для PE-индуктивного определения позволяет получить любую конечную часть T-определимой модели с помощью конечной итерации Ψ, тогда как для P-индуктивных определений для этого могут потребоваться трансфинитные итерации.

§4. Индукция по определению

Принцип индукции по определению имеет место для любых индуктивных определений и допустимых формул. Σ-формула ρ называется допустимой над $\mathfrak{A}$, если из $\zeta_1 \le \zeta_2 \le \dots$, $\zeta_i \in B(\mathfrak{A})$ и $\zeta_i \models \rho$ (для всех i) следует $\sup\{\zeta_i\} \models \rho$.

Пусть $\rho(\bar{x})$ – нормализованная допустимая Σ'-формула и T – индуктивное определение. Обозначим через ρ_0 Σ-формулу, получающуюся из ρ заменой атомарных $(\Sigma'\setminus\Sigma)$-подформул ложью, а через ρ_T Σ'-формулу, получающуюся заменой в ρ этих подформул соответствующими посылками из T. Пусть также $\mathfrak{B} = \sup\{\Psi^\lambda(\mathfrak{A}_0)\}$. Тогда, очевидно, справедлива

ТЕОРЕМА 6 (индукция по определению). Если $\mathfrak{A} \models \rho_0$ и $\zeta \models \forall\bar{x}\rho \to \forall\bar{x}\,\rho_T$ для всех $\zeta \in B(\mathfrak{A})$, то $\mathfrak{B} \models \rho$.

Рассмотрим некоторые достаточные условия допустимости формул.

ТЕОРЕМА 7.

I. Всякая монотонная Σ'-формула допустима.

2. Формула, полученная из допустимых с помощью связок $\&$ и $\forall x$, допустима.

3. Формула вида $\pi(\bar{x}) \to \rho(\bar{x})$ допустима над $\mathfrak{A}$, если π непрерывна, а $\rho(\bar{c})$ допустима над $\mathfrak{A}_c$ для любых констант $\bar{c}$.

4. Любая непрерывная Σ'-формула и ее отрицание допустимы; в частности, для любых Σ'-термов t_1, t_2 допустимы формулы $t_1 = t_2$ и $t_1 \ne t_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения I и 2 очевидны. Докажем утверждение 3.

Пусть $\zeta_1 \le \zeta_2 \le \dots$, $\zeta = \sup\{\zeta_i\}$, $\zeta_i \in B(\mathfrak{A})$ и $\zeta_i \models \pi(\bar{x}) \to \rho(\bar{x})$. Тогда непрерывность π, предположение $\zeta_i \models \pi(\bar{x}) \to \rho(\bar{x})$ и допустимость $\rho(\bar{c})$ дают последовательно $\zeta \models \pi[\gamma] \Rightarrow \exists i\ \forall j \ge i\ \zeta_j \models \pi[\gamma] \Rightarrow \exists i\ \forall j \ge i\, \zeta_j \models \rho[\gamma] \Rightarrow \zeta \models \rho[\gamma]$ для любой оценки γ. Поэтому $\zeta \models \pi \to \rho$.

Докажем утверждение 4.

Непрерывная формула ρ допустима в силу своей монотонности, а ее отрицание – благодаря эквивалентности $\neg\rho$ и $\rho \to x = x$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Рассмотренный в [I] предикат $t_1 \sqsubseteq t_2$ эквивалентен формуле $\forall x(x = t_1 \to x = t_2)$, допустимой по предыдущей теореме.

Рассмотрим теперь условие минимальности индуктивно определяемого обогащения Σ-структуры $\mathfrak{A}$. Пусть T состоит из одной формулы $\varphi[p](\bar{x})$ $p(\bar{x})$, определяющей предикат p. Условие минимальности p (схема индукции Фефермана) задается схемой формул

(*) $\forall\bar{x}(\varphi[\psi](\bar{x}) \to \psi(\bar{x})) \to \forall\bar{x}(p(\bar{x}) \to \psi(\bar{x}))$,

где ψ - произвольная Σ'-формула того же типа, что и p, а $\varphi[\psi]$ получается из φ заменой всех вхождений $p(\bar{t})$ на $\psi(\bar{t})$. Посылка в (*) утверждает, что предикат, определяемый формулой $\psi(\bar{x})$, удовлетворяет определению для p, а заключение (*) - что p меньше ψ. Если T является P-индуктивным определением, то условию минимальности удовлетворяет T-определимое обогащение структуры $\mathfrak{A}$.

Если T состоит из конечного числа формул, то в посылке условия (*) будет стоять конъюнкция соответствующих импликаций. Если Σ' содержит определяемые функции, то все посылки T следует считать нормализованными.

Если в схеме (*) формулы ψ могут быть только Σ-формулами, то будем называть его условием <u>относительной минимальности</u>.

Покажем, что относительная минимальность является следствием индукции по определению. Будем говорить, что для T на $\mathfrak{B} \in B(\mathfrak{A})$ справедлива индукция по определению, если $\mathfrak{B} \models T$ и для любой допустимой Σ'-формулы $\rho(\bar{x})$ из $\mathfrak{A} \models \rho_0$ и $\forall\zeta \in B(\mathfrak{A})$: $\zeta \models \forall\bar{x}\rho \to \forall\bar{x}\rho_T$ следует $\mathfrak{B} \models \rho$.

ТЕОРЕМА 8. *Если T является P-индуктивным определением и для T на $\mathfrak{B} \in B(\mathfrak{A})$ справедлива индукция по определению, то на $\mathfrak{B}$ выполняется условие относительной минимальности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ради простоты проведем его для T, состоящей из одной формулы $\varphi[p](\bar{x}) \to p(\bar{x})$. В общем случае доказательство аналогично.

Пусть $\psi(\bar{x})$ - произвольная Σ-формула того же типа, что и p. Предположим, что выполнено условие теоремы и

(**) $$\mathfrak{B} \models \forall\bar{x}(\varphi[\psi](\bar{x}) \to \psi(\bar{x})).$$

Для доказательства (*) достаточно теперь показать, что $\mathfrak{B} \models \rho$, где $\rho \equiv \forall\bar{x}(p(x) \to \psi(\bar{x}))$ является допустимой формулой.

Формула $\rho_0 \equiv \forall \bar{x}(\text{false} \to \phi(\bar{x}))$ истинна на $\mathfrak{A}$, поэтому, применяя индукцию по определению, остается показать, что из (**) и $\zeta \models \rho$ следует $\zeta \models \forall \bar{x}(\varphi[p](\bar{x}) \to \phi(\bar{x}))$ для любой $\zeta \in B(\mathfrak{A})$. Так как p входит в φ позитивно, то из $\zeta \models \rho$ следует $\zeta \models \varphi[p](\bar{x}) \to \varphi[\phi](\bar{x})$. Из (**) и того, что p не входит в ϕ, следует $\zeta \models \varphi[\phi](\bar{x}) \to \phi(\bar{x})$. Это завершает доказательство индукцией по определению.

ЗАМЕЧАНИЕ. В формулировке теоремы 8 вместо позитивности посылок в T можно потребовать их монотонность.

Индукция по определению позволяет легко установить свойство инвариантности индуктивно определимой модели, аналогичное свойству инвариантности неподвижной точки для рекурсивных программ [I, теорема 5.7].

ТЕОРЕМА 9. Если T - индуктивное определение с монотонными и нормализованными посылками, а T' получено из T заменой в посылках некоторых вхождений атомарных $(\Sigma' \setminus \Sigma)$-подформул согласно определению T, то T-определимое обогащение Σ-структуры $\mathfrak{A}$ является и T'-определимым.

Доказательство аналогично приведенному в [I].

§5. Иерархические спецификации

Иерархические спецификации, состоящие из индуктивных определений, могут использовать отрицание в посылках. Поэтому данное выше определение теоретико-модельной семантики для них не подходит. Здесь вводятся понятия иерархического индуктивного определения и иерархически определимой модели и исследуются их свойства. В терминах взаимной зависимости функций и предикатов сформулирован критерий того, что непозитивное индуктивное определение может быть иерархизировано, т.е. представлено как иерархическое; доказана эквивалентность любых таких иерархизаций (с точки зрения теоретико-модельной семантики), и описан способ построения в некотором смысле минимальной иерархии.

Пусть $\Sigma \subseteq \Sigma'$ и T- Σ'-теория, являющаяся индуктивным определением. Совокупность Σ'-теорий $\langle T_1, \dots, T_n \rangle$ называется <u>иерархическим разбиением</u> T, если выполнены следующие условия:

1. $\Sigma' = \Sigma_n$, где $\Sigma = \Sigma_0 \subseteq \Sigma_1 \subseteq \ldots \subseteq \Sigma_n$;

2. $T = T_1 \cup \ldots \cup T_n$, где T_i – Σ_i-теория, индуктивно определяющая функции и предикаты из $\Sigma_i \setminus \Sigma_{i-1}$;

3. T_i – P-индуктивное определение, т.е. имеет $(\Sigma_i \setminus \Sigma_{i-1})$-позитивные посылки.

Σ'-обогащение $\mathfrak{B}$ Σ-структуры $\mathfrak{A}$ называется $\langle T_1, \ldots, T_n \rangle$-определимым (или иерархически определимым при подразумеваемом разбиении), если $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_n$, где для $1 \le i \le n$ $\mathfrak{B}_i$ есть T_i-определимое Σ_i-обогащение Σ_{i-1}-структуры $\mathfrak{B}_{i-1}$ и $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{A}$.

Аналогичное понятие вводится в [14].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Если $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \uparrow \Sigma'$ T-определима, то при любом иерархическом разбиении T $\mathfrak{B}$ иерархически определима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко убедиться, что для иерархического разбиения $\langle T_1, \ldots, T_n \rangle$ структуры $\mathfrak{B}_i = \mathfrak{B} \downarrow \Sigma_i$ удовлетворяют предыдущему определению.

Обратное утверждение неверно. Например, для теорий

$T_1 = \{r(x,y) \vee p(x,z) \,\&\, p(z,y) \to p(x,y)\}$,

$T_2 = \{\neg p(x,y) \to q(x,y)\}$

$\langle T_1, T_2 \rangle$-определимой является модель, в которой p – это транзитивное замыкание r, q – дополнение к p; в то же время (T_1, T_2)-определимой модели не существует, так как существуют модели с меньшим q, но соответственно большим p.

Следующее утверждение доказано в [14].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. $\langle T_1, \ldots, T_n \rangle$-определимое обогащение $\mathfrak{B}$ существует в $B(\mathfrak{A})$ и является моделью теории $T_1 \cup \ldots \cup T_n$ $\Leftrightarrow$ в $B(\mathfrak{A})$ существует модель теории $T_1 \cup \ldots \cup T_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из того, что $\mathfrak{B}_i = \mathfrak{B} \downarrow \Sigma_i$ – модель теории T_i, и из теоремы 5.

ТЕОРЕМА 10. Любые иерархические разбиения теории T определяют одно и то же обогащение $\mathfrak{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\langle T_1, \ldots, T_n \rangle$ и $\langle T'_1, \ldots, T'_m \rangle$ – иерархические разбиения T. Обозначим $T_{ij} = T_i \cap T'_j$ и $\Sigma_{ij} = \Sigma_i \cap \Sigma'_j$. Из иерархичности следует, что T_{ij} является Σ_{ij}-теорией с $(\Sigma_{ij} \setminus \Sigma_{i-1,j-1})$-позитивными посылками. Поэтому любое упорядочение теорий T_{ij}, при котором T_{ij} стоит после всех T_{kl}, где $1 \le k \le i$,

$1 \le l \le j$ и $(k,l) \ne (i,j)$, образует иерархическое разбиение T. Методом от противного легко доказывается, что все такие разбиения определяют одно и то же обогащение $\mathfrak{A}$. Теперь укажем два таких упорядочения. Первое – по строкам матрицы T_{ij} – определяет $\langle T_1, T_2, \ldots, T_n \rangle$-определимую модель. Второе – по столбцам T_{ij} – определяет $\langle T_1', \ldots, T_m' \rangle$-определимую модель. Следовательно, они совпадают.

Для произвольного индуктивного определения T введем на Σ' отношение зависимости $(p, p' \in F' \cup P')$:

$D = \{\langle p, p' \rangle \mid p'$ входит в посылку определения $p\}$,

$N = \{\langle p, p' \rangle \mid p'$ входит с отрицанием в пренексную форму посылки из определения $p\}$,

$ND = D^* \cdot N \cdot D^*$.

ТЕОРЕМА II. Иерархическое разбиение T существует $\leftrightarrow \neg \exists p (pNDp)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В [10] рассматриваются только индуктивные определения, удовлетворяющие условию справа, т.е. (согласно теореме) иерархические. Там это условие сформулировано в виде ограничения на уровни предикатов. Для иерархического разбиения $\langle T_1, \ldots T_n \rangle$ можно считать i номером уровня всех предикатов, определяемых в T_i.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы II. $\Rightarrow$ очевидно. Докажем $\Leftarrow$, описав способ построения иерархического разбиения. Если $\neg \exists p (pNDp)$, то для любого подъязыка $\Sigma'' \subseteq \Sigma'$ существует непустое множество $\min(\Sigma'')$ минимальных по отношению ND функциональных и предикатных символов. Поэтому следующие множества непусты:

$\Sigma_1' = \min(\Sigma' \setminus \Sigma)$, $\Sigma_i' = \min(\Sigma' \setminus (\Sigma_1' \cup \ldots \cup \Sigma_{i-1}'))$ для $i > 1$,

T_i – множество всех определений из T для p из Σ_i' $(i \ge 1)$. Нетрудно проверить, что $\langle T_1, \ldots \rangle$ является иерархическим разбиением T.

Назовем построенное здесь разбиение <u>каноническим</u>. Оно обладает следующим очевидным свойством минимальности.

ТЕОРЕМА 12. Если $\langle T_1', \ldots, T_n' \rangle$ – произвольное иерархическое разбиение T, а $\langle T_1, \ldots, T_m \rangle$ – каноническое, то $n \ge m$ и $T_i' \subseteq (T_1 \cup \ldots \cup T_i)$ для всех $1 \le i \le n$.

В ряде случаев возникает необходимость связать с индуктивным определением T (в сильной форме) не наименьшее, а наибольшее обогащение Σ-структуры $\mathfrak{A}$ до модели T. Такая семантика спецификации T называется семантикой наибольшей неподвижной точки. Она подробно рассмотрена в [2]. Мы покажем простой способ сведения ее к семантике иерархической определимости. Идея сведения в том, чтобы перейти от определения предиката p к определению его дополнения $\bar{p}$, так как в модели с наибольшим p его дополнение является наименьшим.

Пусть T определяет только предикаты и состоит из формул $\varphi_i[p_1,\dots,p_n](\bar{x}) \leftrightarrow p_i(\bar{x})$, $1 \le i \le n$. В любой модели теории T дополнения к p_i, обозначаемые $\bar{p}_i$, удовлетворяют формулам $\neg\varphi_i[\neg\bar{p}_1,\dots,\neg\bar{p}_n](\bar{x}) \leftrightarrow \bar{p}_i(\bar{x})$. Совокупность этих формул обозначим T_-. Если T - P-индуктивное определение, то и T_- P-индуктивно. Обозначим еще T_+ совокупность формул $\neg p_i \to p_i$. Следствием сказанного и теоремы 5 и предложения 9 является

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Если T - p-индуктивное определение в сильной форме, то для любой Σ-структуры $\mathfrak{A}$ наибольшее Σ'-обогащение $\mathfrak{A}$ до модели теории T является Σ'-обеднением $\langle T_-, T_+\rangle$-определимого обогащения $\mathfrak{A}$ (обеднение должно исключить вспомогательные предикаты p_i).

Этот метод использовался в [16] для определения структурной эквивалентности типов в "Паскале"; так же можно определить эквивалентность детерминированных конечных автоматов и регулярных списков.

Литература

1. МАННА З. Теория неподвижной точки программ. - Кибернетический сб., 1978, вып. 15, с. 38-100.

2. APT K.R., van EMDEN M.H. Contributions to the theory of logic programming.-JACM,1982,v.29,N 3,p.841-862.

3. МАЛЬЦЕВ А.И. Алгебраические системы. -М.: Наука, 1970.

4. АЦЕЛ П. Введение в теорию индуктивных определений. -Справочная книга по математической логике, ч.3. Теория рекурсии. -М.: Наука, 1982, с. 224-268.

5. PARK D. Fixpoint induction and proofs of program proper - ties.- In: Machine Intelligence (Eds. B.Meltzer,D.Michie).V.5. 1968, p.59-78.

6. De BAKKER J.W.,SCOTT D. A theory of programs.- IBM Semi - nar,Vienna, Austria, 1969.

7. PAULSON L. Deriving structural induction in LCF.- Lect. Notes in Comput.Sci.,1984,v.173,p.197-204.

8. CARWRIGHT R., McCARTHY J. First order programming logic.- Proc.of 6th POPL, San Antonio,1979,p.68-80.

9. FEFERMAN S. Formal theories for transfinite iterations of generalized inductive definitions and some subsystems of analysis. -Intuitionsm and Proof Theory/ Ed.A.Kino,J.Myhill, R.E.Vesley. Amsterdam, North-Holland,1970,p.303-326.

10. MARTIN-LÖF P. Haupsatz for the intuitionistic theory of iterated inductive defibitions.- Proc.of the 2nd Scand.Logic Symp. 1971,p.179-216.

11. McCARTHY J. Circumscription - a form of non-monotonic reasoning. - Artifical Intelligence,1980,N 13,p.27-39.

12. CARTWRIGHT R. Toward a logical theory of program data. - Lect.Notes in Comput.Sci.,1982,v.131,p.37-51.

13. HAGIYA M., SAKURAI T. Foundation of logic programming based on inductive definition.- New Generation Computing,1984,v. 2, p.59-77.

14. КЛЕЩЁВ А.С. Реляционная модель вычислений. -Программирование, 1980, № 4, с.20-29.

15. КОЛМОГОРОВ А.Н., ДРАГАЛИН А.Г. Введение в математическую логику. -М.; 1982. (МГУ).

16. КРИЦКИЙ С.П., САРАФАНОВ В.И. Некоторые вопросы формального определения контекстных условий языка "Паскаль". -В кн.: Технология программирования. Ростов-на-Дону, 1983, с. 121-130.

Поступила в ред.-изд.отд.
22 января 1986 года