ЛОГИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ТИПОВ ДАННЫХ
(Вычислительные системы)
1986 год Выпуск II4

УДК 517.II

НЕРАЗРЕШИМОСТЬ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ТЕОРИИ ПОЛУПОЛЯ С КОНСТАНТАМИ

Р.Гуламов

В настоящей работе построено полуполе с неразрешимой элементарной теорией в сигнатуре $\sigma = \langle +, \cdot, 0, 1, \leq, c \rangle$, где c – некоторый константный символ. Работа состоит из двух параграфов. В §I с использованием методов работ [I,2] строится булева алгебра с двумя выделенными идеалами, теория которой неразрешима; §2 посвящен построению и доказательству неразрешимости элементарной теории искомого полуполя.

Неопределяемые понятия можно найти в [3,4].

§I. Булева алгебра с двумя выделенными идеалами, теория которой неразрешима

Рассмотрим все измеримые по Лебегу функции на отрезке $[0,I]$ и отождествим те, которые отличаются лишь на множестве меры нуль. Обозначим через $S(\mathcal{L})$ совокупность классов эквивалентных функций. Относительно естественных операций сложения и умножения и естественного упорядочивания это частично упорядоченное кольцо. При этом для всякого ограниченного сверху множества $M \subseteq S(\mathcal{L})$ существует $\vee M$. Определим K как совокупность классов функций, которые положительны почти всюду. При этом $\bar{K}$ составляют классы функций, неотрицательных почти всюду, где через $\bar{K}$ обозначено замыкание множества K относительно естественной топологии, введенной в $S(\mathcal{L})$. В [5] показано, что $S(\mathcal{L})$ образует универсальное полуполе в сигнатуре $\sigma = \langle +, \cdot, 0, 1, \leq \rangle$ и его булева алгебра идемпотентов $\mathcal{L}$ является полной и безатомной. Тогда нетрудно показать, что $S(\mathcal{L})^{\omega}$ тоже является универсальным полуполем с полной безатомной булевой алгеброй идемпотентов $\mathcal{L}^{\omega}$.

ЛЕММА I. $(S(\mathcal{L})^{\omega})^{\omega} \cong S(\mathcal{L})^{\omega}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждому $\varphi \in (S(\mathcal{L})^{\omega})^{\omega}$ поставим в соответствие элемент $f_{\varphi} \in S(\mathcal{L})^{\omega}$ такой, что $f_{\varphi}(c(n,k)) = [\varphi(n)](k)$, где $c(n,k)$ – функция Кантора $c\colon \omega^2 \to \omega$. Обозначим это сопоставление через ψ и покажем, что ψ есть изоморфизм. Во-первых, ψ инъективно. Предположим, что $\psi(\varphi_1) = \psi(\varphi_2)$, хотя $\varphi_1 \neq \varphi_2$. Тогда $f_{\varphi_1}(c(n,k)) = f_{\varphi_2}(c(n,k))$ или $[\varphi_1(n)](k) = [\varphi_2(n)](k)$ для любых $n,k \in \omega$. Отсюда следует, что $\varphi_1 = \varphi_2$. Противоречие. Во-вторых, ψ есть отображение "на". Действительно, пусть $f = \langle f(0), f(1), \dots, f(n), \dots \rangle \in S(\mathcal{L})^{\omega}$. Тогда существует бесконечно много $k \in \omega$ таких, что $1 = c(1,k)$, $2 = c(2,k)$, $\dots$, $n = c(n,k)$. Поэтому за $\psi^{-1}(f)$ можно взять такой φ, что $[\varphi(n)](k) = f(c(n,k))$.

Далее, $f_{c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2} = c_1 f_{\varphi_1} + c_2 f_{\varphi_2}$, $f_{\varphi_1\varphi_2} = f_{\varphi_1} \cdot f_{\varphi_2}$. Следовательно, ψ есть изоморфизм.

СЛЕДСТВИЕ I. Существует полуполе $E(\mathcal{L})$ с полной безатомной булевой алгеброй идемпотентов $\mathcal{L}$ такое, что $\mathcal{L}^{\omega} \cong \mathcal{L}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Для любого $n \geq 0$ существует идеал J_n' в $\mathcal{L}$ полуполя $S(\mathcal{L})$ такой, что

$$Ch(\mathcal{L}/J_n') = \langle n, 1, 0 \rangle.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть I – максимальный идеал в $\mathcal{L}$, тогда $\mathcal{L}/I$ – двухэлементная булева алгебра. Элементу $x = \langle x_0, x_1, \dots, x_n, \dots \rangle \in \mathcal{L}^{\omega}$ сопоставим $A_x \subseteq \omega$ такое, что $A_x = \{n \in \omega\colon x_n/I = 1\}$. Это сопоставление обозначим через Ψ. Покажем, что Ψ осуществляет гомоморфизм $\mathcal{L}^{\omega}$ на $P(\omega)$. Действительно, пусть $B = \{i_0, i_1, \dots, i_k, \dots\}$ – произвольное подмножество ω. Тогда за $\Psi^{-1}(B)$ можно взять элемент $x = \langle 0, \dots, 1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots \rangle$. Поэтому ψ есть отображение "на". Тривиально проверяется, что $\psi(x \vee y) = \psi(x) \cup \psi(y)$, $\psi(1 \setminus x) = \omega \setminus \psi(x)$, ибо I – максимальный идеал в $\mathcal{L}$.

Далее, для любого идеала J в $P(\omega)$ имеется естественный гомоморфизм $\varphi_J\colon P(\omega) \to P(\omega)/J$. Полагая $f = \varphi_J \circ \psi$, мы видим, что f осуществляет гомоморфизм $\mathcal{L}^{\omega}$ на $P(\omega)/J$ и, следовательно, $\mathcal{L}^{\omega}/\mathrm{Ker} f \cong P(\omega)/J$. Так как $\mathcal{L}^{\omega} \cong \mathcal{L}$, то задача сводится к задаче, решенной Ю.Л.Ершовым [I].

В силу предложения I существуют полная безатомная булева алгебра и идеалы J'_n такие, что

$$Ch(\mathscr{L}/J'_n) = \langle n, 1, 0 \rangle \quad \forall n \in \omega.$$

Для каждого фиксированного $n \in \omega$ рассмотрим $(\mathscr{L}/J'_n)^{\omega}$. Очевидно, что $Ch((\mathscr{L}/J'_n)^{\omega}) = \langle n, \omega, 0 \rangle$. Если

$$J_n = \{f \in \mathscr{L}^{\omega}: f(i) \in J'_n \quad \forall i \in \omega\},$$

то $(\mathscr{L}/J'_n)^{\omega} \cong \mathscr{L}^{\omega}/J_n$. Так как еще $\mathscr{L}^{\omega} \cong \mathscr{L}$, то $Ch(\mathscr{L}/J_n) = \langle n, \omega, 0 \rangle$. Следовательно, для каждого фиксированного $n \in \omega$ в $\mathscr{L}/J_n/I_n$ имеется счетное число атомов и отсутствуют ненулевые безатомные элементы. Далее, для каждого $n \in \omega$ выбираем $a_{n0}, a_{n1}, \ldots, a_{nm}, \ldots \in \mathscr{L}$ такими, чтобы выполнялись следующие два условия:

I) $a_{ni} \wedge a_{nj} = 0$ при $i \neq j$ $(n \in \omega)$,

2) образами $a_{n0}, a_{n1}, \ldots, a_{nm}, \ldots$ в $\mathscr{L}/J_n/I_n$ исчерпываются все атомы $\mathscr{L}/J_n/I_n$ для каждого $n = 0, I, 2, \ldots$. Отсюда мы имеем

$$1/J_n/I_n = \bigvee_{m=0}^{\infty} a_{nm}/J_n/I_n,$$

где $a_{nm}/J_n/I_n$ – атомы в $\mathscr{L}/J_n/I_n$. В силу отсутствия ненулевых безатомных элементов в $\mathscr{L}/J_n/I_n$ мы можем написать $1/J_n = \bigvee_{m=0}^{\infty} a_{nm}/J_n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $S(\mathscr{L})^{\omega}$ – универсальное полуполе с полной безатомной булевой алгеброй идемпотентов $\mathscr{L}^{\omega}$ такое, что $\mathscr{L}^{\omega} \cong \mathscr{L}$, а $I_0^* = \{f \in \mathscr{L}^{\omega}: f(n) \in J_n\}$ – идеал в $\mathscr{L}^{\omega}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

I) f/I_0^* – атом $\Leftrightarrow (\exists m)\, f(m)/J_m$ – атом в $\mathscr{L}/J_m$ и $f(k) \in J_k$ для $k \neq m$;

2) f/I_0^* – атомный элемент $\Leftrightarrow (\forall k)\, f(k)/J_k$ – атомный элемент в $\mathscr{L}/J_k$;

3) f/I_0^* – безатомный элемент $\Leftrightarrow (\forall k) f(k)/J_k$ – безатомный элемент в $\mathscr{L}/J_k$;

4) f/I_0^* – сумма атомного и безатомного элементов в $\mathscr{L}^{\omega}/I_0^* \Leftrightarrow (\forall k)\, f(k)/J_k$ есть сумма атомного и безатомного элементов в $\mathscr{L}/J_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение I$\Leftarrow$. Пусть $(\exists m)f(m)/J_m$ – атом в $\mathcal{L}/J_m$ и $f(k)\in J_k$ для любого $k\neq m$. Тогда, очевидно, $f\notin I_0^*$. Следовательно, $f/I_0^*\neq 0$. Если бы существовал $g\in\mathcal{L}^\omega$ такой, что $g(r)/J_m\neq 0$ и $g/I_0^*\leq f/I_0^*$, то для $g\leq f$ имеем $g(m)/J_m\leq f(m)/J_m$. Так как $f(m)/J_m$ – атом, то $g(m)/J_m=f(m)/J_m$, а так как еще $g(k)\leq\leq f(k)$ для $k\neq m$ и $f(k)\in J_k$, то $g(k)\in J_k$. Следовательно, $g/I_0^*=$ $=f/I_0^*$.

Докажем утверждение I$\Rightarrow$. Пусть f/I_0^* – атом в $\mathcal{L}^\omega/I_0^*$. Если бы существовали $m_1\neq m_2$ такие, что $f(m_1)/J_{m_1}, f(m_2)/J_{m_2}$ – атомы в $\mathcal{L}/J_{m_1}$, $\mathcal{L}/J_{m_2}$ соответственно, то элементы $0\neq\langle 0,\ldots, f(m_1), 0,\ldots\rangle/I_0^*$ и $0\neq\langle 0,\ldots, f(m_2), 0,\ldots\rangle/I_0^*$, находясь под f/I_0^*, противоречили бы тому, что f/I_0^* – атом в $\mathcal{L}^\omega/I_0^*$.

Рассмотрим утверждение 2$\Leftarrow$. Пусть $(\forall k)\ f(k)/J_k$ – атомный элемент в $\mathcal{L}/J_k$. Нам надо доказать, что любой элемент $0\neq g/I_0^*\leq$ $\leq f/I_0^*$ содержит атом. Действительно, из $g/I_0^*\leq f/I_0^*$ вытекает, что $g\leq f$, следовательно, $(\forall k)\ (g(k)\leq f(k))\Rightarrow(\forall k)\ (g(k)/J_k\leq$ $\leq f(k)/J_k)$. Так как $(\forall k)f(k)/J_k$ – атомный элемент, то $g(k)/J_k$ содержит атом, тогда и g/I_0^* тоже содержит атом. Обратное очевидно.

Рассмотрим утверждение 3$\Leftarrow$. Пусть $(\forall k)f(k)/J_k$ – безатомный элемент в $\mathcal{L}/J_k$. Тогда любой $0\neq g(k)/J_k\leq f(k)/J_k$ не является атомом. Следовательно, по утверждению I, g/I_0^* не является атомом, лежащим под f/I_0^*. Обратно, пусть f/I_0^* – безатомный элемент в $\mathcal{L}^\omega/I_0^*$. Если бы $f(m)/J_m$ содержал атом $g(m)/J_m$, то элемент $g/I_0^*\in\mathcal{L}^\omega/I_0^*$ такой, что $g(m)/J_m$ – атом и $g(k)\in J_k$ $(k\neq m)$ был бы атомом, лежащим под f/I_0^*. Противоречие.

Из доказательства утверждений 2 и 3 легко следует доказательство утверждения 4.

Введем некоторые обозначения: $\mathcal{L}_k=\mathcal{L}/J_k$, $\mathcal{L}_\omega=\mathcal{L}^\omega/I_0^*$, $f_k=$ $=f(k)/J_k$, $f_\omega=f/I_0^*$. Если I – идеал Ершова некоторой булевой алгебры $\mathcal{L}$, то полагаем $I_0=\{0\}$, $I_1=I$, ${}^0\mathcal{L}=\mathcal{L}$,

$$ {}^1\mathcal{L}=\mathcal{L}/I_1(\mathcal{L}),\ldots,{}^n\mathcal{L}=\mathcal{L}/I_n(\mathcal{L}); $$

$$ {}^np:\mathcal{L}\to{}^n\mathcal{L},\quad I_{n+1}={}^np^{-1}(I({}^n\mathcal{L})). $$

Далее, как обычно, для любого $n\in\omega$ полагаем

$$ \mathcal{L}\models I_n(f)\leftrightarrow f\in I_n(\mathcal{L}), $$

причем $\mathcal{L}\models A_n(f)\to\bar{f}$ – атом в ${}^n\mathcal{L}$;

$\mathcal{K} \models Б_n(f) \leftrightarrow \bar{f}$ - безатомный элемент в ${}^n\mathcal{K}$;

$\mathcal{K} \models В_n(f) \leftrightarrow \bar{f}$ есть сумма атомного и безатомного элементов в ${}^n\mathcal{K}$, где $\bar{f} = P(f)$. При этих обозначениях имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Справедливы следующие утверждения:

1. $\mathcal{K}_\omega \models A_{n+1}(f_\omega) \leftrightarrow (\exists m)(m \neq k)\mathcal{K}_m = A_{n+1}(f_m) \;\&\; f_k \in I_n(\mathcal{K}_k)$;
2. $\mathcal{K}_\omega \models Б_{n+1}(f_\omega) \leftrightarrow (\forall k)\mathcal{K}_k = Б_{n+1}(f_k)$;
3. $\mathcal{K}_\omega \models В_{n+1}(f_\omega) \leftrightarrow (\forall k)\mathcal{K}_k = В_{n+1}(f_k)$;
4. $\mathcal{K}_\omega \models I_{n+1}(f_\omega) \leftrightarrow (\forall k)\mathcal{K}_k = I_{n+1}(f_k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость этих утверждений для A_0, $Б_0$, $В_0$, I_0 доказана в предложении 2. Пусть они верны для всех $i \leq n$, установим их справедливость для $i = n+1$.

$1 \Leftarrow$. Пусть $(\exists m)\mathcal{K}_m \models A_{n+1}(f_m) \;\&\; (\forall k)\ (k \neq m)$ и $f_k \in I_n(\mathcal{K}_k)$.Из $\mathcal{K}_m \models A_{n+1}(f_m)$ вытекает, что $f_m \notin I_n(\mathcal{K}_m) \;\&\; (\forall g_m)(g_m < f_m)$, следовательно, $g_m \in I_n(\mathcal{K}_m)$ или $\bar{g}_m = \bar{f}_m$. На основании индукционного предположения и из утверждения 4 при $i = n$ имеем $f_\omega \notin I_n(\mathcal{K}_\omega)$, а так как $g_\omega = \langle f_0, f_1, \ldots, f_{m-1}, g_m, f_{m+1}, \ldots \rangle$ меньше, чем $f_\omega = \langle f(0), f(1), \ldots, f(m), \ldots \rangle$, и $f_k \in I_n(\mathcal{K}_k)$ для $k \neq m$ и $g_m \in I_n(\mathcal{K}_m)$, то отсюда вытекает $g_\omega \in I_n$ либо $\bar{g}_\omega = \bar{f}_\omega$; т.е. $f_\omega \in A_{n+1}(\mathcal{K}_\omega)$.

$1 \Rightarrow$. Пусть $f_\omega \in A_{n+1}(\mathcal{K}_\omega)$, тогда $f_\omega \notin I_n(\mathcal{K}_\omega)$ и $(\forall g_\omega)(g_\omega < f_\omega)$, и, следовательно, $g_\omega \in I_n(\mathcal{K}_\omega)$ либо $\bar{g}_\omega = \bar{f}_\omega$. Если бы существовали $m_1 \neq m_2$ такие, что $f_{m_1} \in I_n(\mathcal{K}_{m_1})$, $f_{m_2} \in I_n(\mathcal{K}_{m_2})$, а для всех $k \neq m_1, m_2$ $f_k \in I_n(\mathcal{K}_k)$, то мы легко пришли бы (как в предложении 2) к противоречию с утверждением $1 \Leftarrow$. Поэтому из $f_\omega \notin I_n(\mathcal{K}_0)$ вытекает, что $(\exists m) f_m \notin I_n(\mathcal{K}_m)$, и, следовательно, $(\forall k)(k \neq m)$ $f_k \in I_n(\mathcal{K}_k)$ имеем $f_k \in A_{n+1}(\mathcal{K}_k)$.

$2 \Leftarrow$. Пусть $(\forall k)$ $f_k \in Б_{n+1}(\mathcal{K}_k) \rightarrow f_k \in I_n(\mathcal{K}_k)$ либо $(\exists g_k)$ $(g_k < f_k)$ и $g_k \notin I_n(\mathcal{K}_k)$ и $\bar{g}_k = \bar{f}_k$. Тогда на основании индукционного предположения мы имеем: $f_\omega \in I_n(\mathcal{K}_\omega)$ или $(\exists g_\omega)$ $(g_\omega < f_\omega)$ и $g_\omega \notin I_n(\mathcal{K}_\omega)$ и $\bar{f}_\omega = \bar{g}_\omega$ и, следовательно, $f_\omega \in Б_{n+1}(\mathcal{K}_\omega)$. Обратное тоже очевидно.

Утверждение 3 следует из 1 и 2.

Докажем $4 \Rightarrow$. Пусть $f_\omega \in I_{n+1}(\mathcal{K}_\omega)$.Тогда $f_\omega/I_n = g_\omega/I_n \vee h_\omega/I_n$, где g_ω/I_n - атомная, h_ω/I_n - безатомная части в ${}^n\mathcal{K}_\omega$. На основании утверждений 2 и 3 и индукционного предположения мы имеем $(\forall k) g_k/I_n$ - атомную и $(\forall k) h_k/I_n$ - безатомную части, а тогда $f_k/I_n = g_k/I_n \vee h_k/I_n$ и, следовательно, $f_k \in I_{n+1}(\mathcal{K}_k)$. Аналогично доказывается и обратное утверждение.

Пусть $\emptyset \neq A \subseteq \omega$. Определим идеал I_A следующим образом:

$$I_A = gr(\{f \in \mathcal{L}^{\omega}: (\exists n)(\forall k)(k \neq n) \ \& \ (n \notin A) f(k) \in I_k\} \cup$$

$$\cup \{f \in \mathcal{L}^{\omega}: (\exists n)(\forall k)(k < n) f(k) \in J_k,$$

а

$$(\forall k)(k > n) \ \& \ Ch_1(f(k)/J_k) < n \ \& \ ((n \in A) Ch_1(f(n)/J_n) = n \rightarrow$$

$$\rightarrow Ch_2(f(n)/J_n < \omega\}).$$

Тогда предложение для Φ_n в сигнатуре $\sigma = \langle \vee, \wedge, \setminus, 0, 1, I_0^*, I_A \rangle$ запишется формулой $\Phi_n = (\exists x)(x \notin I_A \ \& \ Ch_1(x) = n$ для любого $y (y < x) \ \& \ Ch_1(y) < n \rightarrow y \in I_A)$.

Пусть $B_\omega = \langle \mathcal{L}^{\omega}/I_0^*, I_0^*, I_A \rangle$, тогда имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. $B_\omega \models \Phi_n \Leftrightarrow n \in A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем $\Rightarrow$. Пусть $B_\omega \models \Phi_n$, но $n \notin A$. Пусть f/I_0^* такой, что $B_\omega \models \Phi_n\,(f/I_0^*)$, тогда $\langle 0, \ldots, f(n), 0, \ldots \rangle / I_0^* \in I_A$ для $n \notin A$. Так как для любого $y/I_0^* \leq f/I_0^*$ и $Ch_1(y/I_0^*) < n$ следует, что $y/I_0^* \in I_A$, то отсюда следует, что $\langle 0, \ldots, f(i), 0, \ldots \rangle / I_0^* \in I_A$ для $i < n$. Теперь построим функции

$$g_0(i) = \begin{cases} 0, & \text{если } i \leq n, \\ f(i), & \text{если } i > n, \end{cases}$$

$$g_1(i) = \begin{cases} f(i), & \text{если } i \leq n, \\ 0, & \text{если } i > n. \end{cases}$$

Заметим, что если $i > n$, то $Ch_1(f(i)/J_i) < n$, в противном случае $Ch_1(f/I_0^*) > n$. Поэтому $g_0/I_0^* \in I_A$, ибо $Ch_1(g_0/I_0^*) < n$, а g_1/I_0^* лежит в I_A по построению f и g. Следовательно, $g_0 \vee g_1/I_0^* = f/I_0^* \in I_A$. Противоречие.

За f/I_0^* можно взять $1_n/I_0^*$, где

$$1_n(i) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = n, \\ 0, & \text{если } i \neq n. \end{cases}$$

Пусть $\emptyset \neq A \subseteq \omega$ и $|A| = \omega$ такое, что A нерекурсивно, тогда имеет место

СЛЕДСТВИЕ 2. $Th(B_\omega)$ неразрешима.

Предположим, что $Th(B_\omega)$ разрешима. Тогда в силу рекурсивности $\{\Phi_n : n < \omega\}$ множество $\{\Phi_n : n \in A\} = \{\Phi_n : n < \omega\} \cap Th(B_\omega)$ рекурсивно. Значит, A рекурсивно. Получили противоречие.

§2. Построение полуполя $F_A(\mathscr{L}, I_0^*, I_A)$

Теперь переходим к построению полуполя с неразрешимой теорией в сигнатуре $\sigma = \langle +, \cdot, 0, 1, \leq, c \rangle$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Подкольцо E_1 полуполя E называется подполуполем, если оно содержит ось E и относительно частичного порядка, индуцированного из E, является полуполем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Подполуполе E_1 полуполя E будем называть заполненным, если из соотношений $|x| \leq |y|$, $y \in E_1$ вытекает, что $x \in E_1$.

Имеет место предложение, доказанное в [5]: если подкольцо E_1 содержит единицу и из $|x| \leq |y|$, $y \in E_1$, следует $x \in E_1$, то E_1 является заполненным подполуполем в E.

Пусть $S(\mathscr{L})^{\omega}$ – универсальное полуполе измеримых функций на $[0, 1]$ с полной безатомной булевой алгеброй идемпотентов $\mathscr{L}^{\omega}$, а I_0^*, I_A – два идеала в $\mathscr{L}^{\omega}$. Обозначим через $F_A(\mathscr{L}, I_0^*, I_A)$ следующее множество $\{f \in S(\mathscr{L})^{\omega}:$ существуют $a \in F_M$, $b \in F_{I_0^*}$, $c \in F_{I_A}$ такие, что $f = a + b + c$, $e_a \wedge e_b = e_b \wedge e_c = e_c \wedge e_a = 0\}$, где

$$F_M = \{a \in S(\mathscr{L})^{\omega}: |a| \leq k \cdot 1,\ k \in \omega\},$$

$$F_{I_0^*} = \{b \in S(\mathscr{L})^{\omega}: e_b \in I_0^*\},$$

$F_{I_A} = \{c \in S(\mathscr{L})^{\omega}:$ существуют $g \in F_M$, $N, k \in \omega$ такие, что $|c| \leq \leq N g^k$ и g квазиобратна к $f_A \cdot e_g$ и $e_g \in I_A\}$; $f_A \geq 0$ – ограниченная функция такая, что g, квазиобратная к $f_A \cdot e_g$, не лежит в полуполе, порожденном $F_M \cup F_{I_0^*}$.

Установим некоторые факты о $F_A(\mathscr{L}, I_0^*, I_A)$. Сразу заметим, что если $f_0, f_1 \in F_A(\mathscr{L}, I_0^*, I_A)$, то существуют $a_i \in F_M$, $b_i \in F_{I_0^*}$, $c_i \in F_{I_A}$, $i = 0, 1$, такие, что $f_0 = a_0 + b_0 + c_0$, $f_1 = a_1 + b_1 + c_1$ и $e_{a_i} \wedge e_{b_j} = e_{b_j} \wedge e_{c_i} = e_{c_i} \wedge e_{a_j} = 0$ для любых $i, j = 0, 1$.

ЛЕММА 2.

$$e_a \in I_0^* \Leftrightarrow e_{a_+}, e_{a_-} \in I_0^*.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $\Rightarrow$. Пусть $e_a \in I_0^*$, так как $e_a = e_{a_+} + e_{a_-}$, то $e_a \geq e_{a_+}$, $e_a \geq e_{a_-}$, следовательно, $e_{a_+}, e_{a_-} \in I_0^*$.

$\Leftarrow$. Пусть $e_{a_+}, e_{a_-} \in I_0^*$, так как $a_+ \cdot a_- = 0$, то $e_a = e_{a_+} + e_{a_-} = e_{a_+} \vee e_{a_-} \in I_0^*$.

ЛЕММА 3. Если $a \geq 0$, $a' \geq 0$, то $e_{a+a'} = e_a \vee e_{a'}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $e_a \vee e_{a'} = e_a + e_{a'} - e_a e_{a'}$, то достаточно доказать, что $e_a + e_{a'} - e_a e_{a'}$ является носителем $a+a'$. Действительно, $(a+a')(e_a + e_{a'} - e_a \cdot e_{a'}) = (a+a')e_a + (a+a')e_{a'} - (a+a') \cdot e_a \cdot e_{a'} = 0$. Далее, если c такое, что $c(a+a') = 0$, то $|c|(a+a') = 0$, откуда $|c|a = 0$, $|c|a' = 0$. Поэтому $|c|e_a = 0$, $|c|e_{a'} = 0$ и $|c(e_a + e_{a'} - e_a \cdot e_{a'})| = |c|(e_a + e_{a'} - e_a \cdot e_{a'}) = |c|e_a + |c|e_{a'} - |c|e_a \cdot e_{a'} = 0$. Таким образом, $c(e_a + e_{a'} - e_a \cdot e_{a'}) = 0$. Следовательно, $e_a + e_{a'} - e_a \cdot e_{a'}$ есть носитель $a+a'$, а в силу однозначности носителя $e_{a+a'} = e_a + e_{a'} - e_a \cdot e_{a'}$.

ЛЕММА 4. Если $a, a' \in F_{I_0^*}$, то $a + a', a \cdot a' \in F_{I_0^*}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, из $e_{a \cdot a'} = e_a \cdot e_{a'} \in I_0^*$ вытекает, что $a \cdot a' \in F_{I_0^*}$. Далее, так как $(a+a')_+ \leq a_+ + a'_+$, $(a+a')_- \leq a_- + a'_-$, а также $e_{(a+a')_+} \leq e_{a_+ + a'_+}$, $e_{(a+a')_-} \leq e_{a_- + a'_-}$, то, в силу лемм 2,3, имеем

$$e_{(a+a')_+} \leq e_{a_+ + a'_+} = e_{a_+} \vee e_{a'_+} \in I_0^*, \quad \text{следовательно,}\ e_{(a+a')_+} \in I_0^*,$$

$$e_{(a+a')_-} \leq e_{a_- + a'_-} = e_{a_-} \vee e_{a'_-} \in I_0^*, \quad \text{следовательно,}\ e_{(a+a')_-} \in I_0^*.$$

Таким образом, $e_{(a+a')} \in I_0^*$, в силу леммы 2, т.е. $a + a' \in F_{I_0^*}$.

ЛЕММА 5. Если $a, a' \in F_M$, $b, b' \in F_{I_A}$, то $a \cdot a', a+a' \in F_M$, $b+b', b \cdot b' \in F_{I_A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

ЛЕММА 6. $F_A(\varkappa, I_0^*, I_A)$ является подкольцом кольца $S(\varkappa)^\omega$, содержащим его единицу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f_0, f_1 \in F_A(\varkappa, I_0^*, I_A)$, тогда существуют $a_i \in F_M$, $b_i \in F_{I_0^*}$, $c_i \in F_{I_A}$ такие, что $f_0 = a_0 + b_0 + c_0$, $f_1 = a_1 + b_1 + c_1$ и $e_{a_i} \wedge e_{b_j} = e_{b_j} \wedge e_{c_i} = e_{c_j} \wedge e_{a_i} = 0$ для любых $j, i = \overline{0,1}$.

Далее, $f_0 + f_1 = (a_0 + b_0 + c_0) + (a_1 + b_1 + c_1) = (a_0 + a_1) + (b_0 + b_1) + (c_0 + c_1)$. В силу лемм 4,5 имеем $a_0 + a_1 \in F_M$, $b_0 + b_1 \in F_{I_0^*}$, $c_0 + c_1 \in F_{I_A}$.

Остается показать, что носители элементов $a_0+a_1, b_0+b_1, c_0+c_1$ попарно не пересекаются. Действительно, например, $e_{(a_0+a_1)(b_0+b_1)} = e_{(a_0b_0+a_0b_1+a_1b_0+a_1b_1)} = e_0 = 0$, ибо $e_f = 0 \Leftrightarrow f = 0$. Далее, $f_0 \cdot f_1 = (a_0+b_0+c_0)(a_1+b_1+c_1) = a_0a_1+b_0b_1+c_0c_1$, где $a_0 \cdot a_1 \in F_M$, $b_0 \cdot b_1 \in F_{I_0^*}$, $c_0 \cdot c_1 \in F_{I_A}$ и носители у них не пересекаются. Очевидно также, что если $f \in F_A$, то $-f \in F_A(\mathscr{K}, I_0^*, I_A)$.

ЛЕММА 7. Если $a_1 \in F_M$, $b_1 \in F_{I_0^*}$, $c_1 \in F_{I_A}$ и $|a_0| \le |a_1|$, $|b_0| \le |b_1|$, $|c_0| \le |c_1|$, то $a_0 \in F_M$, $b_0 \in F_{I_0^*}$, $c_0 \in F_{I_A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что $a_0 \in F_M$, $c_0 \in F_{I_A}$, очевидно. Покажем, что $b_0 \in F_{I_0^*}$. Для этого заметим, что $e_{|b|} = e_b^A$. Следовательно, $e_{b_0} = e_{|b_0|} \le e_{|b_1|} = e_{b_1} \in I_0^*$, т.е. $b_0 \in F_{I_0^*}$

ЛЕММА 8. Если $|a_0+b_0+c_0| \le |a_1+b_1+c_1|$, где $a_i \in F_M$, $b_i \in F_{I_0^*}$, $c_i \in F_{I_A}$ $(i = 0,1)$ и $e_{a_i} \wedge e_{b_j} = e_{b_j} \wedge e_{c_i} = e_{c_i} \wedge e_{a_j} = 0$ для любых $i,j = 0,1$, то $|a_0| \le |a_1|$, $|b_0| \le |b_1|$, $|c_0| \le |c_1|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из $|a_0+b_0+c_0| \le |a_1+b_1+c_1|$ имеем

$$|a_0+b_0+c_0|e_{a_0} \le |a_1+b_1+c_1|e_{a_0}.$$

Далее, $|a_0| = |a_0e_{a_0}| = |a_0+b_0+c_0|e_{a_0} \le |a_1+b_1+c_1|e_{a_0} = |a_1|e_{a_0} \le \le |a_1|$. Аналогично $|b_0| \le |b_1|$, $|c_0| \le |c_1|$.

Из лемм 7 и 8 имеем

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $|f_0| \le |f_1|$, $f_1 \in F_A$, то $f_0 \in F_A$.

СЛЕДСТВИЕ 2. $F_A(\mathscr{K}, I_0^*, I_A)$ является заполненным подполуполем полуполя $S(\mathscr{K})^\omega$ в сигнатуре $\sigma = \langle +, \cdot, 0, 1, \le \rangle$.

Теперь определим функцию f_A следующим образом:

$$f_A(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n+1)^m}, & \text{если } t \in a_{nm},\ n \in A, \\ \dfrac{1}{n+1}, & \text{если } t \in 1_n,\ n \notin A, \\ 0 - \text{в противном случае.} & \end{cases}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $F_A(\mathscr{K}, I_0^*, I_A)$ - вышепостроенное полуполе, тогда

1) $e \in I_A \leftrightarrow (f_A \cdot e)$ квазиобратим;

2) $e \in I_0^* \leftrightarrow (\forall f)(f \cdot e$ квазиобратим).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оба утверждения в сторону $\rightarrow$ очевидны, ибо во всем $S(\mathcal{X})^\omega$ они квазиобратимы, и, следовательно, сужение их на e из I_0^* или I_A квазиобратимы в F_A.

$1 \Leftarrow$. Пусть $e \notin I_A$, а g квазиобратный к f_A на e. Предположим, $g \in F_A$, тогда $g = g_0e_0 + g_1e_1 + g_2e_2$, где $g_0 \in F_{I_0^*}$, $g_1 = ge_1$ с $e_1 \in I_A$, а $g_2 = ge_2$ ограничен. Так как $e = e_0 \vee e_1 \vee e_2$ и $e \notin I_A$, то $e_2 \notin I_A$. Это возможно в следующих случаях.

<u>Случай I</u>. Существует $n \in A$ такое, что $Ch_1(e_2(n)/J_n) = n$, а $Ch_2(e_2(n)/J_n) = \omega$. Тогда существует бесконечно много $m \in \omega$ таких, что $e_2(n) \wedge a_{nm} \neq 0$. Следовательно, квазиобратный g на e_2 неограничен. Противоречие.

<u>Случай 2</u>. Для любого $n \in A$ $Ch_1(e_2(n)/J_n) < n$. Так как $|A| = \omega$, то существует бесконечно много $n \in A$ таких, что $e_2(n) \notin J_n$. Но так как $e_2 \notin I_A$, то отсюда следует, что существует бесконечно много n таких, что $Ch_1(e_2(n)/J_n) \geq n \rightarrow (\exists m)\, e_2(n) \wedge a_{nm} \neq 0$, если $n \in A$, и $e_2(n) \wedge 1_n \neq 0$, если $n \notin A$. В любом случае квазиобратный g на e_2 неограничен. Противоречие.

$2 \Leftarrow$. Пусть $e_0 \notin I_0^*$. Построим элемент $f_0 \in F_A$ такой, что квазиобратный g к f_0 на e_0 не лежит в F_A.

<u>Случай I</u>. $e_0 \notin I_A$, тогда в качестве f_0 можно взять f_A.

<u>Случай 2</u>. $e_0 \in I_A \setminus I_0$. Определим f_0 следующим образом: $f_0(t) = 2^{-(f_A^{-1}e_0(t)+1)}$. Очевидно, $f_0 \in F_A$. Если g_0 квазиобратный к f_0 на e_0, то $g_0(t) = 2^{f_A^{-1}e_0+1} \cdot e_0(t)$. Так как не существуют $N, k \in \omega$ такие, что $2^{f_A^{-1}e_0+1} \leq N \cdot f_A^{-k}e_0$, то $g_0 \notin F_A$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Элементарная теория полуполя $F_A(\mathcal{X}, I_0^*, I_A)$ в сигнатуре $\sigma = \langle +, \cdot, 0, 1, \leq, c \rangle$ неразрешима.

Автор выражает глубокую благодарность Ю.Л.Ершову за внимание к работе, а С.С.Гончарову за полезные обсуждения.

Литература

1. КЕЙСЛЕР Г., ЧЭН Ч.Ч. Теория моделей.–М.: Мир, 1977.–600 с.

2. МОРОЗОВ А.С. О разрешимости теорий булевых алгебр с выделенным идеалом. -Сиб.мат.журн., 1982, т.23, №1, с.199-201.

3. ЕРШОВ Ю.Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. -М.: Наука, 1980.

4. АНТОНОВСКИЙ М.Я., БОЛТЯНСКИЙ В.Г., САРЫМСАКОВ Т.А. Топологические алгебры Буля. -Ташкент, 1963.

5. САРЫМСАКОВ Т.А. Полуполя и теория вероятностей. -Ташкент, 1981.

Поступила в ред.-изд.отд.
17 марта 1986 года