ЛОГИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ТИПОВ ДАННЫХ
(Вычислительные системы)
1986 год Выпуск 114

УДК 681.3:512.8

ВОПРОСЫ РАЗРЕШИМОСТИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ АБСТРАКТНЫХ ТИПОВ ДАННЫХ

Н.Х.Касымов

Понятия абстрактного типа данных и адекватного описания (спецификации) этого типа столь тесно связаны, что имеет смысл отождествлять абстрактный тип с его спецификацией. Такой подход лежит в основе аксиоматического определения абстрактных типов данных [1, 2,3,6]. Естественно потребовать, чтобы язык спецификаций L был логическим, т.е. имел корректно определенный синтаксис и средства генерирования новых выражений из заданных. Если L - логический язык, L_0 - подкласс выражений из L и S - множество выражений (спецификация) из L, то под абстрактным типом данных, определяемым в языке L спецификацией S при ограничениях L_0, будем понимать множество $\{\Phi / S \vdash_L \Phi,\ \Phi \in L_0\}$. Таким образом, абстрактный тип данных полностью определяется тройкой (L, L_0, S). Например, если L - многосортный язык квазитождеств конечной функциональной сигнатуры, L_0 - множество всех равенств между замкнутыми термами этой сигнатуры и S - конечное множество квазитождеств из L, то соответствующий абстрактный тип данных называется алгебраическим [1]. Мы будем рассматривать в качестве L многосортный язык первого порядка с равенством и $L_0 = L$. Иными словами, всюду ниже, если не оговорено противное, под абстрактным типом данных, определяемым спецификацией S, понимается элементарная теория класса всех моделей для S. Единственное ограничение, налагаемое на S, состоит в рекурсивной перечислимости множества предложений из S. На самом деле достаточно рассматривать только разрешимые спецификации, так как хорошо известно, что если $T = \{\Phi | S \vdash \Phi\}$ и S рекурсивно-перечислимо, то $T = \{\Phi | S_0 \vdash \Phi\}$ для некоторого разрешимого множества S_0.

В работе предлагается модификация абстрактного типа данных "матрица" из [2] (где адекватное описание понятия матрицы дается в языке существенно более сильном, чем язык первого порядка) и показываются полнота и разрешимость этого абстрактного типа данных. В качестве частного случая абстрактного типа данных "матрица" рассматривается полный и разрешимый абстрактный тип данных "индексированный стек", который является обогащением теории списков из [3]. В целях упорядочения логических связей абстрактный тип данных "индексированный стек" приводится раньше абстрактного типа данных "матрица".

При построении данных нового сорта из ранее определенных данных обычно неявно полагают, что множество новых данных по модулю отношения "получаться на одном шаге" является вполне упорядоченным. Хотя принцип полного упорядочения не является свойством первого порядка, тем не менее некоторый его полезный аналог – дискретный линейный порядок – таковым является. Это понятие мы в явном виде включаем как в абстрактный тип данных "матрица", так и в абстрактный тип данных "индексированный стек". В качестве отрицательного решения проблемы разрешимости приводится соответствующий результат для абстрактного типа данных "конечные множества" из [6]. Все необходимые понятия можно найти в [4,5].

§I. Индексированный стек

Сигнатуру Σ абстрактного типа данных "индексированный стек" разобьем для удобства на три части: Σ_E, Σ_I и Σ_S, где $\Sigma_E = (\bot_E)$, $\Sigma_I = (<; \bot_I, +1)$, $\Sigma_S = (\bot_S, g, h, t, f)$.

Прежде чем сформулировать аксиомы, опишем сорта сигнатурных символов и подразумеваемую интерпретацию. Пусть E, I, S означают множества (сорта) элементов, над которыми строятся стеки, индексов (шагов построения) и стеков соответственно. Константы $\bot_E : \emptyset \to E$, $\bot_I : \emptyset \to I$, $\bot_S : \emptyset \to S$ выделяют особые элементы в соответствующих сортах. Единственный предикатный символ $< \subset I \times I$ задает дискретный линейный порядок на I, а операция $+1 : I \to I$ определяет функцию следования, согласованную с порядком $<$ на I. Сорта остальных операций следующие:

$$
\begin{aligned}
g&:\ S \times E \to S,\\
h&:\ S \to E,\\
t&:\ S \to S,\\
f&:\ S \to I.
\end{aligned}
$$

Предполагается, что g - конструктор стеков, h выбирает из стека его последний элемент и t удаляет из стека s элемент $h(s)$. Функция f выдает по стеку его индекс (шаг, на котором был пост - роен данный стек).

Множество A аксиом абстрактного типа данных "стек" есть объединение трех множеств $A_E \cup A_I \cup A_S$, где A_E является рекурсивным множеством предложений

$E(h) \quad \exists e_1 \ldots e_h(\mathop{\&}_{1\le i\le j\le h}(e_i \ne e_j))$ для $h \le 2$;

A_I есть аксиомы дискретного линейного порядка с наименьшим элементом и функцией следования $+1$. Аксиомы A_S разобьем на пять групп.

Аксиомы порождения:

$S_1 \quad g(s,e) = \bot_S \leftrightarrow e = \bot_E,$

$S_2 \quad g(s,e) \ne \bot_S \mathbin{\&} g(s,e) = g(s',e') \rightarrow s = s' \mathbin{\&} e = e',$

$S_3 \quad \forall s' \exists s \exists e\, (s' = g(s,e)).$

Аксиома выбора:

$S_4 \quad hg(s,e) = e.$

Аксиомы удаления:

$S_5 \quad t(\bot_S) = \bot_S.$

$S_6 \quad e \ne \bot_E \rightarrow tg(s,e) = s.$

Аксиомы индексов:

$S_7 \quad f(\bot_S) = \bot_I,$

$S_8 \quad e \ne \bot_E \rightarrow fg(s,e) = f(s) + 1$, где $f(s)+1 \leftrightharpoons +1(f(s))$.

Аксиомы полноты:

$$S_9(n) \quad \forall i \forall e_1 \ldots e_n(\bot_I + n < i \mathbin{\&} (\mathop{\&}_{1\le k\le n}(e_k \ne \bot_E)) \rightarrow (\exists s(f(s) =$$

$$= i \mathbin{\&} (\mathop{\&}_{1\le k\le n}(ht^{k-1}(s) = e_k))))),$$

где $\bot_I+n \leftrightharpoons +1^n(\bot_I)$, $t^0(s) \leftrightharpoons s$ и $n \ge 1$.

Пусть $T = \{\Phi \mid A \vdash \Phi\}$, тогда T есть абстрактный тип данных "индексированный стек". Так как очевидно, что у теории T нет конечных моделей, а любая бесконечная модель по теореме Лёвенгейма-Сколема имеет счетную элементарную подмодель, то для доказательства полноты достаточно показать, что $\mathfrak{M} \models T \mathbin{\&} \mathfrak{N} \models T \rightarrow \mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$ для любых двух счетных моделей $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Мы дадим доказательство, основанное на изоморфности ультрастепеней по подходящему ультрафильтру любых двух счетных моделей, которое, по существу, использует конструкцию из [3]. Если $\mathfrak{M} \models T$, то через $\mathfrak{M}_P$, где $P \in \{E, I, S\}$, обозначим модель, основное множество которой есть множество сорта P модели $\mathfrak{M}$, а функции и отношения – те функции и отношения на $\mathfrak{M}$, которые определены лишь для множества сорта P. Аналогично определяются $\mathfrak{M}_{P,Q}$ и $\mathfrak{M}_{P,Q,R}$ для $P, Q, R \in \{E, I, S\}$. Через $|\mathfrak{M}_P|$ будем обозначать носитель модели $\mathfrak{M}_P$, который иногда будет обозначаться просто через P. Введение в рассмотрение ультрастепеней продиктовано глубокими причинами, как показывает следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Теория T некатегорична ни в какой мощности λ.

В самом деле, если λ конечно, то в мощности λ множество A_I не имеет моделей, если же λ бесконечно, то для A_I существуют модели, упорядоченные по типам $\omega + \eta_1 x(\omega^* + \omega)$ и $\omega + \eta_2 x(\omega^* + \omega)$, где ω – тип упорядочения натуральных чисел, ω^* – порядок, двойственный ω, а η_1 и η_2 – неизоморфные линейные порядки мощности λ. Остается заметить, что если $\mathfrak{A} \models A_I$, то существует модель $\mathfrak{M} \models T$ такая, что $\mathfrak{M}_I = \mathfrak{A}$.

Как обычно, ω обозначает наряду с типом полного упорядочения натуральных чисел и само множество $\{0, 1, 2, \dots\}$.

Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ – счетные модели теории T и D – неглавный ультрафильтр над ω. В [5] показано, что $(\mathfrak{M}^\omega/D_I) \cong (\mathfrak{N}^\omega / D)_I$, причем это верно независимо от истинности континуум-гипотезы. Отсюда следует, что $(\mathfrak{M}^\omega/D)_{E,I} \cong (\mathfrak{N}^\omega/D)_{E,I}$, так как модели $(\mathfrak{M}^\omega/D)_E$ и $(\mathfrak{N}^\omega/D)_E$ имеют мощность 2^ω и единственную нуль-местную операцию $\bot_E$.

ЛЕММА I. Пусть $e_0 e_1 e_2 \dots$ – бесконечная последовательность элементов из $E \setminus \{\bot_E\}$ в модели $\mathfrak{M}^\omega/D$, $i \in |(\mathfrak{M}^\omega/D)_I|$, причем $\forall n \geq 0$ $(\bot_I + n < i)$. Тогда существует континуум таких $s \in |(\mathfrak{M}^\omega/D)_S|$, что $f(s) = i$ и $\forall n \geq 0\ (ht^n(s) = e_n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{M}^\omega$ – прямая степень $\mathfrak{M}$. Пусть $e_n = Da_n = \{a \mid a \in \mathfrak{M}^\omega_E, a_D \sim a_n\}$. Можно считать, что $\forall n \forall \alpha\ a_n(\alpha) \neq \bot_E$, где $a_n(\alpha) \leftrightharpoons \pi_\alpha(a_n)$ и π_α – естественная проекция $\mathfrak{M}^\omega$ на сомножитель с номером α. Пусть $i = Dj = \{k \mid k \in \mathcal{M}_I^{\omega}, k_\alpha \sim j\}$ и $\forall \alpha \in \omega\ (1_I + 1 < j(\alpha))$. Назовем элемент $i \in |\mathcal{M}_I|$ стандартным, если $\exists n \geq 0\ \ 1_I + n = i$, и нестандартным – в противном случае. Определим элемент $b \in |\mathcal{M}_S^{\omega}|$ по шагам следующим образом.

Положим $b(0) = 1_S$.

Пусть элементы $b(0), b(1), \ldots, b(\alpha-1)$ определены. Если $j(\alpha)$ – стандартный элемент, то выбираем в $\mathcal{M}_S$ такой элемент $b(\alpha)$, что $ht^n(b(\alpha)) = a_n(\alpha)$ и $f(b(\alpha)) = j(\alpha)$ для $0 \leq n < j(\alpha)$. Такой элемент существует в силу $S_9(j(\alpha))$.

Если $j(\alpha)$ нестандартный, то выбираем такой $b(\alpha)$, что $ht^n(b(\alpha)) = a_n(\alpha)$ и $f(b(\alpha)) = j(\alpha)$, но уже для $0 \leq n \leq \alpha$. Тогда элемент $s = Db$, где b – стек такой, что $\pi_\alpha(b) = b(\alpha)$, удовлетворяет заключению леммы, так как для фиксированного $n \geq 0$ очевидно $\{\alpha / ht^n(b(\alpha)) = a_n(\alpha),\ f(b(\alpha)) = j(\alpha)\} \in D$. Для данного b можно построить такой b', что $\neg(b \underset{D}{\sim} b')$, но b' также удовлетворяет заключению леммы, если положить $ht^n(b(\alpha)) = ht^n(b'(\alpha))$ и $f(b'(\alpha)) = j(\alpha)$, где $0 \leq n < j(\alpha)$ для стандартного $j(\alpha)$ и $0 \leq n \leq \alpha$ для нестандартного $j(\alpha)$, но $ht^q(b(\alpha)) \neq ht^q(b'(\alpha))$, где $q = j(\alpha)$ в первом и $q = \alpha+1$ во втором случаях соответственно. Такой элемент b' существует в силу аксиом индексов и аксиом полноты. Ясно, что, используя эту конструкцию, можно получить 2^{ω} таких попарно неэквивалентных по ультрафильтру D стеков, каждый из которых удовлетворяет заключению леммы.

Назовем характеристикой элемента $s \in S$ бесконечную последовательность $(f(s), h(s), ht(s), \ldots, ht^n(s), \ldots)$ и будем обозначать характеристику s через $c(s)$. Нетрудно проверить, что всякий стек s имеет характеристику либо вида $(1_I + n, e_1, \ldots, e_n, 1_E, 1_E, \ldots)$ для некоторого $n \geq 0$ и $e_1, \ldots, e_n \in E \setminus \{1_E\}$, либо $(i, e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots)$, где $\forall n \geq 0\ (1_I + n < i \ \&\ e_{n+1} \neq 1_E)$.

ТЕОРЕМА I. Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{K}$ – счетные модели теории T и D – неглавный ультрафильтр над ω. Тогда $\mathcal{M}^{\omega}/D \cong \mathcal{K}^{\omega}/D$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем на множествах S в моделях $\mathcal{M}^{\omega}/D$ и $\mathcal{K}^{\omega}/D$ отношение Θ:

$$s_1 \Theta s_2 \leftrightarrow \exists n\, \exists m (ct^n(s_1) = ct^m(s_2)).$$

Ясно, что Θ есть эквивалентность на S, классы эквивалентности по которой будем называть блоками и обозначать $s/\theta = \{s'/s'\theta s\}$. Пусть отображение "$'$": $(\mathfrak{M}^{\omega}/D)_{E,I} \to (\mathfrak{N}^{\omega}/D)_{E,I}$ есть изоморфизм. Тогда частичное отображение $\Phi_0 : |(\mathfrak{M}^{\omega}/D)_S| \to |(\mathfrak{N}^{\omega}/D)_S|$ такое, что $\Phi_0 g^n(1_S; e_1,\ldots,e_n) = g^n(1_S; e'_1,\ldots,e'_n)$, осуществляет изоморфизм между блоками $1_S|\theta$ моделей $\mathfrak{M}^{\omega}/D$ и $\mathfrak{N}^{\omega}/D$. Это следует из того, что всякий стандартный (т.е. принадлежащий блоку $1_S/\theta$) элемент, отличный от 1_S, единственным образом выражается через 1_S при подходящих $e_1,\ldots,e_n$, операции t и h хорошо согласованы с g, а f выдает "длину" стека, которую Φ_0 сохраняет. Покажем, что Φ_0 доопределяется до изоморфизма. Пусть R – траверсал для θ, т.е. множество представителей классов θ-эквивалентности, не содержащий элементы из $1_S|\theta$. Если $c(s) = (i, e_1, e_2, \ldots)$, то обозначим $c'(s) = (i', e'_1, e'_2, \ldots)$. Для каждого $r \in R$ в модели $\mathfrak{M}^{\omega}/D$ по лемме I существует 2^{ω} таких s, что $c(s) = c(r)$. Аналогично в $\mathfrak{N}^{\omega}/D$ имеется 2^{ω} элементов характеристики $c'(r)$. Установим произвольную биекцию γ между множествами $\{s/c(s) = c(r)\}$ и $\{s/c(s) = c'(r)\}$. Для упрощения обозначений одной и той же буквой "$'$" мы обозначим как изоморфизм $(\mathfrak{M}^{\omega}/D)_{E,I}$ на $(\mathfrak{N}^{\omega}/D)_{E,I}$, так и его продолжение на $\{s/c(s) = c(r)\}$, совпадающее с γ, т.е. $' = ' \cup \gamma$, где "$'$" слева расширяет "$'$", стоящий справа. Для любого $n \geq 0$ определим соответствие Ψ_n из $r|\theta$ в $r'|\theta$ следующим образом: область определения Ψ_n есть

$$\delta\Psi_n = \{s/\exists k \geq 0\ \exists s_0 (c(s_0) = c(r)\ \&\ \exists e_1 \ldots e_k \times$$

$$\times (s = g^k t^n (s_0; e_1, \ldots, e_s)))\},$$

причем $\Psi_n(g^k t^n (s_0; e_1, \ldots, e_k)) = g^k t^n (s'_0; e'_1, \ldots, e'_k)$. Непосредственно из аксиом вытекает справедливость следующих трех утверждений:

I) Ψ_n – взаимно-однозначное отображение,

2) $\forall s \in r|\theta\ \exists n \geq 0\ (s \in \delta\Psi_n)$,

3) $\Psi_n \subset \Psi_{n+1}$.

Таким образом, имеем линейно упорядоченную по включению цепь частичных отображений $\Psi_0 \subset \Psi_1 \subset \Psi_2 \subset \ldots$.

Пусть $\Psi_r = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Psi_n$, тогда Ψ_r есть (частичный) изоморфизм $r|\theta$ на $r'|\theta$. Теперь, если определить $\Phi = \bigcup_{r \in R} \Psi_r \cup \Phi_0 \cup '$, то Φ осуществляет изоморфизм между $\mathfrak{M}^{\omega}/D$ и $\mathfrak{N}^{\omega}/D$.

§2. Матрицы

Сигнатура Σ абстрактного типа данных "матрица" есть сигнатура абстрактного типа данных "стек" и Σ_M , где $\Sigma_M = (\bot_M, g_0, g_1, h_0, h_1, t_0, t_1, f_0, f_1)$. Всякая модель абстрактного типа данных "матрица" содержит наряду с сортами E, I, S сорт M для матриц. Константа $\bot_M$: $\Phi \to M$ выделяет особую матрицу. Сорта операций из Σ_M следующие:

$$g_k: M \times S \to M,$$

$$h_k: \quad M \to S,$$

$$t_k: \quad M \to M,$$

$$f_k: \quad M \to I,$$

где $K \in \{0, 1\}$. Интерпретация символов очевидна. Наличие пар функций связано с необходимостью порождения матрицы в двух измерениях. Множество аксиом абстрактного типа данных "матрица" есть аксиомы абстрактного типа данных "индексированный стек" и рекурсивная группа аксиом A_M, которая приводится ниже, где $m, n \in \{0, 1\}$ и $m = 0 \leftrightarrow n = 1$.

Аксиомы порождения:

M_1 $\quad g_m(\mu, \bot_S) = \bot_M$,

M_2 $\quad g_m(\bot_M, s) = \bot_M \leftrightarrow s = \bot_S$,

M_3 $\quad s \neq \bot_S \ \& \ \mu \neq \bot_M \to (g_m(\mu, s) = \bot_M \leftrightarrow f_n(\mu) \neq f(s))$,

M_4 $\quad g_m(\mu, s) \neq \bot_M \ \& \ g_m(\mu, s) = g_m(\mu', s') \to \mu = \mu' \ \& \ s = s'$,

M_5 $\quad \forall \mu' \exists \mu \exists s (\mu' = g_m(\mu, s))$,

M_6 $\quad g_m(g_n(\mu, s_1), s_2) = g_n(g_m(\mu, t(s_2)), g(s_1, h(s_2)))$.

Аксиомы выбора:

M_7 $\quad h_m(\bot_M) = \bot_S$,

M_8 $\quad g_m(\mu, s) \neq \bot_M \to h_m g_m(\mu, s) = s$,

M_9 $\quad g_m(\mu, s) \neq \bot_M \to h_n g_m(\mu, s) = g(h_n(\mu), h(s))$,

M_{10} $\quad hh_0(\mu) = hh_1(\mu)$,

Аксиомы удаления:

M_{11} $\quad t_m(\bot_M) = \bot_M$,

M_{12} $\quad g_m(\mu, s) \neq \bot_M \to t_m g_m(\mu, s) = \mu$,

M_{13} $\quad g_m(\mu, s) \neq \bot_M \to t_n g_m(\mu, s) = g_m(t_n(\mu), t(s))$,

M_{14} $\quad t_m t_n(\mu)=t_n t_m(\mu)$.

Аксиомы индексов:

M_{15} $\quad f_m(1_M)=1_I$,

M_{16} $\quad g_n(\mu,s)\neq 1_M \to f_n g_n(\mu,s)=f_n(\mu)+1$,

M_{17} $\quad \mu\neq 1_M \ \&\ g_m(\mu,s)\neq 1_M \to f_n g_m(\mu,s)=f_n(\mu)$,

M_{18} $\quad g_n(\mu,s)\neq 1_M \to f_n g_n(\mu,s)=f(s)$.

Обозначим

$$\Phi_n(i,j,s_1,\ldots,s_n,s'_1,\ldots,s'_n) \rightleftharpoons (1_I+n<i)\ \&\ (1_I+n<j)\ \&$$

$$\&\,(\mathop{\&}_{1\le k\le n}(f(s_k)=i\ \&\ f(s'_k)=j))\ \&\ (\mathop{\&}_{1\le k,\,m\le n}(ht^{k-1}(s_m)=ht^{m-1}(s'_k))).$$

Аксиомы полноты:

$$M_{19}(n)\ \forall ijs_1\ldots s_n s'_1\ldots s'_n\ (\Phi_n(i,j,s_1,\ldots,s_n,s'_1,\ldots,s'_n)\to$$

$$\to\exists\mu(f_0(\mu)=i\ \&\ f_1(\mu)=j\ \&\ (\mathop{\&}_{1\le k,\,m\le n}(h_0t_0^{k-1}t_1^{m-1}(\mu)=$$

$$=t^{m-1}(s_k)\ \&\ h_1t_0^{k-1}t_1^{m-1}(\mu)=t^{k-1}(s'_m))))),\quad n\ge 1.$$

Абстрактный тип данных "матрица" есть множество $T=\{\Phi/A\vdash\Phi\}$. Прямым применением конструкции теоремы I доказать полноту теории T нельзя, так как в отличие от стека матрица может собираться из "содержащихся" в ней подматриц не единственным способом – комбинациями вдоль строк и столбцов. Тем не менее для каждой матрицы так же, как и для стека, существует единственная в некотором смысле запись, выражающая эту матрицу через некоторую фиксированную. Аналогично лемме I доказывается

ЛЕММА 2. Пусть $s_1s_2\ldots$ и $s'_1s'_2\ldots$ – две бесконечные последовательности элементов из $|(\mathfrak{M}^\omega/D)_S|$, где $\mathfrak{M}\models T$ и D – неглавный ультрафильтр над ω. Если $\forall n\ge 1$

$$1_I+n<i\ \&\ 1_I+n<j\ \&\ f(s_n)=j\ \&\ f(s'_n)=i,$$

причем $\forall k,m\ge 1\ (ht^{m-1}(s_k)=ht^{k-1}(s'_m))$, то существует 2^ω таких μ, что $f_0(\mu)=i$, $f_1(\mu)=j$ и $\forall k,m\ge 1\ (h_0t_0^{k-1}t_1^{m-1}(\mu)=t^{m-1}(s_k)\ \&\ h_0t_0^{k-1}t_1^{m-1}(\mu)=t^{k-1}(s'_m))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представляющий граф d матрицы μ определим как множество

$$d(\mu) = \{\langle t_{k_1}\ldots t_{k_n}(\mu), t_{k_1}\ldots t_{k_n} t_k(\mu)\rangle / k_1,\ldots,k_n, k\in\{0,1\},\ n\in\omega\}.$$

Пусть $h_0(d)$ есть результат замены каждой вершины μ' представляющего графа d матрицы μ элементом $h_0(\mu)$. Аналогично определим $h_1(d)$. Характеристикой $c(\mu)$ матрицы μ назовем четверку

$$c(\mu) = (f_0(\mu), f_1(\mu), h_0(d), h_1(d)),$$

где d – представляющий граф матрицы μ. Назовем матрицу μ стандартной, если $\exists n \geq 0 \quad t_0^n t_1^n(\mu) = 1_M$, иначе – нестандартной.

ТЕОРЕМА 2. Если $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ – счетные модели теории T и D – неглавный ультрафильтр над ω, то $\mathcal{M}^\omega/D \cong \mathcal{N}^\omega/D$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем на множествах в моделях $\mathcal{M}^\omega/D$ и $\mathcal{N}^\omega/D$ отношение θ:

$$\mu_1\theta\mu_2 \leftrightarrow \exists mkpq(ct_1^m t_0^k(\mu_1) = ct_1^p t_0^q(\mu_2)).$$

Тогда θ – эквивалентность, классы эквивалентности по которой, как и выше, будем называть блоками. По теореме I, существует изоморфизм "$'$": $(\mathcal{M}^\omega/D)_{E,I,S} \to (\mathcal{N}^\omega/D)_{E,I,S}$. Обозначим через Φ_0 сопоставление

$$\Phi_0 g_1^k g_0^m(1_M; s_1,\ldots,s_{k+m}) \mapsto g_1^k g_0^m(1_M; s_1',\ldots,s_{k+m}').$$

Легко убедиться в том, что Φ_0 осуществляет изоморфизм между стандартными элементами в $\mathcal{M}^\omega/D$ и $\mathcal{N}^\omega/D$. Пусть R – траверсал для θ, не содержащий стандартные матрицы. Зафиксируем $r\in R$, имеющий характеристику $c(r) = (f_0(r), f_1(r), h_0(d), h_1(d))$, где d – представляющий граф матрицы r. Существует 2^ω элементов μ в $\mathcal{M}^\omega/D$, имеющих характеристику $c(r)$. Точно так же имеются 2^ω элементов μ в $\mathcal{N}^\omega/D$, имеющих характеристику $c'(r) = (f_0'(r), f_1'(r), h_0'(d), h_1'(d))$, где $h_0'(d)$ и $h_1'(d)$ есть результат замены каждого элемента s в $h_0(d)$ и $h_1(d)$ соответственно на s'. Установим между множествами этих элементов произвольную биекцию γ и покажем, что γ продолжается до изоморфизма между блоками r/θ и $\gamma(r)/\theta$. Как и раньше, в целях экономии обозначений положим $'=' \cup \gamma$. Пусть Ψ_n есть соответствие, задаваемое правилом

$$\Psi_n g_1^k g_0^m t_1^n t_0^n(\mu; s_1,\ldots,s_{k+m}) \mapsto g_1^k g_0^m t_1^n t_0^n(\mu'; s_1',\ldots,s_{k+m}')$$

для всех $k,m \geq 0$, и $\mu \in \{\mu/c(\mu) = c(r)\}$. Тогда Ψ_n – биекция, так как

$$t_1^n\, t_0^n(\mu_1) = t_1^n\, t_0^n(\mu_2)\ \&\ c(\mu_1) = c(\mu_2) \Rightarrow \mu_1 = \mu_2$$

и в силу аксиом индексов. Покажем, что если $\mu \theta r$, то $\exists n \geq 0$ ($\mu \in \delta \Psi_n$).

Пусть $ct_1^k t_0^m(\mu) = ct_1^p t_0^q(r)$. Если

$$r = g_0^q g_1^p t_1^p t_0^q(r;\, s_1,\ldots,s_{p+q}),$$

то

$$cg_0^q g_1^p t_1^k t_0^m(\mu;\, s_1,\ldots,s_{p+q}) = c(r).$$

Значит, $g_0^q g_1^p t_1^k t_0^m(\mu;\, s_1,\ldots,s_{p+q}) = r_0$ для некоторого r_0 такого, что $c(r_0) = c(r)$. Отсюда

$$t_1^k\, t_0^m(\mu) = t_1^p\, t_0^q(r_0).$$

Если $p \neq q$ и, скажем, $q = p+n$, то

$$t_1^{k+n}\, t_0^m(\mu) = t_1^{p+n}\, t_0^{p+n}(r_0)$$

или, что то же самое,

$$t_0^m\, t_1^{k+n}(\mu) = t_1^{p+n}\, t_0^{p+n}(r_0).$$

Тогда $\mu = g_1^{k+n} g_0^m t_1^{p+n} t_0^{p+n}(r_0;\, s_1,\ldots,s_{k+n+m})$ при подходящих $s_1,\ldots,s_{k+n+m}$, т.е. $\mu \in \delta \Psi_{p+n}$. Аналогично, если $\mu \theta r'$, то $\exists n \geq 0$ ($\mu \in \rho\Psi_n$). Теперь покажем, что Ψ_{n+1} продолжает Ψ_n. Если $\mu \in \delta\Psi_n$, т.е.

$$\mu = g_1^k g_0^m t_1^n t_0^n(\mu_0;\, s_1,\ldots,s_{k+m}),$$

то из аксиом M_6 и M_{13} следует, что

$$\mu = g_1^{k+1} g_0^{m+1} t_1^{n+1} t_0^{n+1}(\mu_0;\, s)$$

для подходящего набора $\bar{s}$. Значит, $\mu \in \delta \Psi_{n+1}$. Проверим, что $\mu \in \delta\Psi_n \to \Psi_n(\mu) = \Psi_{n+1}(\mu)$. Прежде всего, заметим, что если

$$g_1^p g_0^q t_1^{n+1} t_0^{n+1}(\mu_1;\, \bar{s}_1) = g_1^k g_0^m t_1^n t_0^n(\mu_2;\, \bar{s}_2),$$

то $p=k+1$, $q=m+1$ (аксиомы индексов) и $\mu_1 = \mu_2$, так как

$$t_1^{n+1} t_0^{n+1}(\mu_1) = t_1^{n+1} t_0^{n+1}(\mu_2)$$

(в чем можно убедиться, применив к обеим частям операцию $t_1^{k+1} t_0^{m+1}$)

и $c(\mu_1) = c(\mu_2)$. Значит, равенство имеет вид:

$$g_1^{k+1} g_0^{m+1} t_1^{n+1} t_0^{n+1}(\mu; \bar{s}_1) = g_1^k g_0^m t_1^n t_0^n(\mu; \bar{s}_2). \tag{1}$$

Заметим, что

$$g_1 g_0 t_1^{n+1} t_0^{n+1}(\mu; s_0, s_1) = t_1^n t_0^n(\mu) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_1 g_0 t_1^{n+1} t_0^{n+1}(\mu' : s_0', s_1') = t_1^n t_0^n(\mu'), \tag{2}$$

по свойству отображения "'" на множестве матриц характеристики $c(r)$.

Ниже мы без оговорок используем соотношения $M_6 - M_{14}$. Приведем левую часть равенства (I) к виду

$$g_1^k g_0^m g_1 g_0 t_1^{n+1} t_0^{n+1}(\mu : \alpha_1(\bar{s}_1), \alpha_2(\bar{s}_1), \overline{\alpha(\bar{s}_1)}),$$

где $\alpha_1(\bar{s}_1), \alpha_2(\bar{s}_1)$ и $\overline{\alpha(\bar{s}_1)}$ – термы и набор термов от функций g, h, t над набором $\bar{s}_1$. Сравнение этого выражения с правой частью (I) дает

$$g_1 g_0 t_1^{n+1} t_0^{n+1}(\mu; \alpha_1(\bar{s}_1), \alpha_2(\bar{s}_1)) = t_1^n t_0^n(\mu), \tag{3}$$

$$\overline{\alpha(\bar{s}_1)} = \bar{s}_2. \tag{4}$$

Теперь сравним Ψ_{n+1} – образ левой и Ψ_n – образ правой части равенства (I) в модели $\mathcal{M}^{\Psi}D$:

$$g_1^{k+1} g_0^{m+1} t_1^{n+1} t_0^{n+1}(\mu'; \bar{s}_1') = g_1^k g_0^m g_1 g_0 t_1^{n+1} t_0^{n+1}(\mu';$$

$$\alpha_1(\bar{s}_1'), \alpha_2(\bar{s}_1'), \overline{\alpha(s_1')}) = g_1^k g_0^m g_1 g_0 t_1^{n+1} t_0^{n+1}(\mu';$$

$$\alpha_1'(\bar{s}_1), \alpha_2'(\overline{s_1}), \overline{\alpha(s_1)'}),$$

так как "'"-изоморфизм. В силу (2) и (3) имеем

$$g_1^{k+1} g_0^{m+1} t_1^{n+1} t_0^{n+1}(\mu'; \bar{s}_1') = g_1^k g_0^m t_1^n t_0^n(\mu'; \overline{\alpha(\bar{s}_1)}') =$$

$$= g_1^k g_0^m t_1^n t_0^n(\mu'; \bar{s}_2').$$

Последнее следует из (4). Следовательно, $\Psi_n \subset \Psi_{n+1}$. Пусть

$\Psi_r = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Psi_n$. Тогда Ψ_r биективно отображает r/θ на r'/θ. Гомоморфность Ψ_r проверяется непосредственно с учетом того, что "$'$" есть изоморфизм. Теперь, если $\Phi = \bigcup_{r\in R} \Psi_r \cup \Phi_0 \cup '$, то Φ является искомым изоморфизмом.

§3. Конечные множества

В [6] предлагается алгебра конечных множеств S_F сигнатуры $\Sigma = (o, s, \emptyset, IN, c)$. Носитель S_F есть пара множеств $\omega = \{0\ 1\ 2, \ldots\}$ и $P_F(\omega) = \{\alpha\ \alpha \subset \omega, \alpha$ конечно$\}$. Сорта операций следующие:

$$o:\ \emptyset \to \omega,$$
$$s:\ \omega \to \omega,$$
$$\emptyset:\ \emptyset \to P_F(\omega),$$
$$IN:\ \omega \times P_F(\omega) \to P_F(\omega),$$
$$c:\ P_F(\omega) \to \omega.$$

Символ o интерпретируется как число нуль, s – функция следования, $\emptyset$ – константа для пустого множества, операция IN – конструктор конечных множеств: $IN(x,\alpha) = \alpha \cup \{x\}$; операция c определяет мощность, т.е. $c(\alpha) = |\alpha| \in \omega$. Спецификацией этой алгебры является множество E, состоящее из семи квазитождеств:

e_1 $\quad IN(x, IN(x,\alpha)) = IN(x,\alpha)$,

e_2 $\quad IN(x, IN(y,\alpha)) = IN(y, IN(x,\alpha))$,

e_3 $\quad c(IN(x,IN(y,\emptyset))) = ss(o)\ \&\ c(IN(x,\alpha)) = sc(\alpha)\ \&$

$\quad \&\, c(IN(y,\alpha)) = sc(\alpha) \to c(IN(x,IN(y,\alpha))) = ssc(\alpha)$,

e_4 $\quad c(IN(x,\emptyset)) = s(o)$,

e_5 $\quad c(\emptyset) = o$,

e_6 $\quad c(IN(o,IN(s(x),\emptyset))) = ss(o)$,

e_7 $\quad c(IN(s(x),IN(s(y),\emptyset))) = c(IN(x,IN(y,\emptyset)))$.

Алгебраическим абстрактным типом данных "конечные множества" является множество

$$T_A = \{t_1 = t_2 / t_1, t_2 \in T(\Sigma), E \vdash t_1 = t_2\},$$

где $T_\Sigma = \{ t/t$ - терм сигнатуры Σ без переменных$\}$.

В [6] сформулированы три следующих предложения, справедливость которых определяет ценность спецификации E.

I) $S_F \cong T(\Sigma)/\equiv_E$, где $\equiv_E$ - конгруэнция, определенная множеством E.

2) Отношение $E \vdash t_1 = t_2$ разрешимо.

3) Пусть E_0 - произвольное конечное множество тождеств сигнатуры Σ, тогда $S_F \ncong T(\Sigma)/\equiv_{E_0}$.

Сделаем несколько замечаний относительно последнего пункта, который показывает, что S_F не специфицируется посредством конечного числа тождеств. Для удовлетворительного описания всех структур данных, возникающих на практике, языком квазитождеств необходимо обогащение сигнатуры, так как выразительных возможностей квазитождеств исходной сигнатуры может оказаться недостаточно для построения точной (в алгебраическом смысле) спецификации. Известно, что, используя вспомогательные сорта и операции, можно специфицировать любую эффективно представимую, т.е. обладающую позитивной нумерацией, структуру данных [7]. Вопрос о существовании эффективно представимой (неконструктивизируемой, так как для конструктивных структур данных известен отрицательный ответ [8]) структуры данных, неспецифицируемой без использования дополнительных сортов, является открытым и представляется важным потому, что введение новых сортов, по существу, расширяет носитель исходной модели, в то время как желательно иметь "истинное", не затрагивающее носитель обогащение.

Теперь под абстрактным типом данных "конечные множества" будем понимать множество $T = \{\Phi / E \vdash \Phi, \Phi$ - предложение сигнатуры $\Sigma\}$. Покажем, что элементарная теория T неразрешима. Мы докажем более сильное утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Элементарная теория алгебры S_F наследственно неразрешима.

Пусть $\mathfrak{M} = (\omega; +, /)$ - натуральные числа со сложением и предикатом делимости. Известно [4], что элементарная теория $Th(\mathfrak{M})$ модели $\mathfrak{M}$ наследственно неразрешима. Покажем, что модель $\mathfrak{M}$ относительно элементарно определима в алгебре S_F. Введем ряд полезных сокращений для формул сигнатуры Σ. Сорта аргументов определяемых выражений понятны из контекста:

1) $x \in \alpha \leftrightharpoons IN(x,\alpha) = \alpha$,

2) $\alpha \cap \beta = \gamma \leftrightharpoons \forall x(x \in \alpha \;\&\; x \in \beta \leftrightarrow x \in \gamma)$,

3) $\alpha \cup \beta = \gamma \leftrightharpoons \forall x(x \in \alpha \vee x \in \beta \leftrightarrow x \in \gamma)$,

4) $x \oplus y = z \leftrightharpoons \exists \alpha\beta\gamma(\alpha \cap \beta = \emptyset \;\&\; c(\alpha) = x \;\&$

$\& \; c(\beta) = y \;\& \alpha \cup \beta = \gamma \;\&\; c(\gamma) = z)$,

5) $x \cdot y = z \leftrightharpoons \exists \alpha\beta\gamma((\forall xy(x \in \alpha \;\&\; y \in \beta \to x \oplus y \in \gamma)) \;\&$

$\& \; (\forall z(z \in \gamma \to \exists! x \exists! y(x \in \alpha \;\&\; y \in \beta \;\&\; x \oplus y = z))))$,

6) $D(x,y) \leftrightharpoons \exists z(x \cdot z = y)$.

Пусть

$$\Phi(\alpha,y) = IN(y,\alpha) \neq \alpha,$$

$$\Psi(\alpha,y_1,y_2) \leftrightharpoons y_1 = y_2,$$

$$s_1(\alpha,x,y) = z \leftrightharpoons x \oplus y = z,$$

$$s_2(\alpha,x,y) = D(x,y),$$

где в правых частях двух последних определений стоят соответствующие выражения сигнатуры Σ алгебры S_F. Если задать интерпретацию $\alpha \to \emptyset$, то $\Phi(\emptyset,y)$ выделяет в алгебре S_F множество ω, а s_1 и s_2 представляют сложение и делимость соответственно. Полученная модель $(\omega; s_1, s_2)$, очевидно, изоморфна модели $(\omega; +, /)$. Таким образом, $\mathfrak{M}$ относительно элементарно определима в S_F, и поэтому $Th(S_F)$ наследственно неразрешима.

СЛЕДСТВИЕ. *Теория* T *неполна и неразрешима.*

Так как $T \subset Th(S_F)$, то T неразрешима. Полнота T, в силу конечной аксиоматизируемости, влекла бы ее разрешимость.

Автор глубоко признателен С.С.Гончарову за постоянное внимание к работе и ряд ценных замечаний.

Литература

1. АГАФОНОВ В.Н. Типы и абстракция данных в языках программирования. -В кн.: Данные в языках программирования. М., 1982, с. 256-327.

2. ГОНЧАРОВ С.С. Матрицы как абстрактный тип данных.-В кн.: Математическое обеспечение ВС из микро-ЭВМ (Вычислительные системы, вып.96). Новосибирск, 1983, с. 75-86.

3. ГОНЧАРОВ С.С. Теория списков и ее модели. - Настоящий сборник, с. 84-95.

4. ЕРШОВ Ю.Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. - М.: Наука, 1980.

5. КЕЙСЛЕР Г., ЧЭН Ч.Ч. Теория моделей. -М.: Мир, 1977.

6. BERGSTRA J.A., MEYER J.- J.Ch. On specifyng sets of integers.- Amsterdam.- 1983.- 14 p. (Preprint: Afdeling informatica/ N IW-237/83).

7. КАСЫМОВ Н.Х. Алгебраическое описание рекурсивно—перечислимых типов данных. -В кн.: Структурный анализ символьных последовательностей (Вычислительные системы, вып. 101). Новосибирск, 1984, с.130-140.

8. BERGSTRA J.A., TUCKER J.V. A characterisation of computable data types by means of a finite equational specification method.- In: Proc.7th.ICALP,Springer LNCS.V.85, 1980.

Поступила в ред.-изд.отд.
20 ноября 1985 года