СПЛАЙНЫ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ
(Вычислительные системы)
1986 год Выпуск II5

УДК 519.651

АСИМПТОТИКА ПОГРЕШНОСТИ И СУПЕРСХОДИМОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ СПЛАЙНОВ ЧЕТНОЙ СТЕПЕНИ

Б.С. Киндалев

Пусть на отрезке $[a,b]$ в узлах равномерной сетки $\Delta = \{x_i = a + ih,\ i=0,1,\dots,N;\ h=(b-a)/N\}$ заданы значения $f_i = f(x_i)$ некоторой $(b-a)$-периодической функции $f(x)$. Введем сетку $\bar\Delta = \{\bar x_i = (x_{i-1}+x_i)/2,\ i=1,\dots,N\}$. Через $S(x)$ обозначим $(b-a)$-периодический интерполяционный сплайн степени $2r\ (r=1,2,\dots)$ для функции $f(x)$, т.е. $S(x)$ – полином степени $2r$ на каждом из отрезков $[a,\bar x_1]$, $[\bar x_i,\bar x_{i+1}]$, $i=1,\dots,N-1$, $[\bar x_N,b]$; $S(x)\in C^{2r-1}[a,b]$; $S(x_i) = f_i$, $i=0,\dots,N$; кроме того $S(x)$ удовлетворяет условиям периодичности $S^{(k)}(a) = S^{(k)}(b)$, $k=1,\dots,2r$. Существование и единственность такого сплайна следует из [I].

В настоящей работе рассматривается задача получения асимптотических разложений для $S^{(p)}(x) - f^{(p)}(x)$, $p = 0,\dots,2r$, и $(S^{(2r)}(\bar x_i+0) - S^{(2r)}(\bar x_i-0))/h - f^{(2r+1)}(\bar x_i)$ по степеням шага сетки h. В предположении достаточной гладкости $f(x)$ показано, что

$$S^{(p)}(x) - f^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{m} \varphi_{p,k}\left(\frac{x-\bar x_i}{h}\right) h^{2r+1-p+k} f^{(2r+1+k)}(x) + O(h^{2r+2+m-p}),\quad p = 0,\dots,2r,\quad x\in[\bar x_i,\bar x_{i+1}]\cap[a,b]$$
$$(i=0,\dots,N),\ \bar x_0=a-h/2,\ \bar x_{N+1}=b+h/2; \tag{1}$$

$$(S^{(2r)}(\bar x_i+0) - S^{(2r)}(\bar x_i-0))/h - f^{(2r+1)}(\bar x_i) =$$
$$= \sum_{k=0}^{m} a_k(2r+1)h^{2r+2+2k} f^{(4r+3+2k)}(\bar x_i) + O(h^{2r+4+2m}),\quad i=1,\dots,N, \tag{2}$$

где $m\ge 0$ – любое фиксированное целое число; $\varphi_{p,k}((x-\bar x_i)/h)$ – полиномы степени $2r+1+k-p$ относительно $(x-\bar{x}_i)/h$, причем $\varphi_{p,k}$ $(0 \le k \le 3)$ представлены через полиномы Бернулли; коэффициенты $a_k(2r+1)$ находятся по рекуррентным формулам.

Полученные асимптотические разложения обобщают результаты автора [2], где найдены два члена $(m=1)$ асимптотики (I) и выписан главный член $(m=0)$ в (2). Отметим, что в [3] (для сплайнов на всей числовой оси) без явного выделения главного члена асимптотического разложения (I) указаны точки, где он обращается в нуль (точки суперсходимости). Кроме того, два члена асимптотики (I) и асимптотическая формула для скачка старшей производной сплайна найдены в [4], когда $S(x)$ - параболический сплайн $(r=1)$.

Обозначим

$$S_j^{(k)} = S^{(k)}(x_j), \quad f_j^{(k)} = f^{(k)}(x_j),$$

$$\beta_j = (S^{(2r)}(\bar{x}_j+0) - S^{(2r)}(\bar{x}_j-0))/h,$$

$$\| f \|_{C[\bar{x}_i,\bar{x}_{i+1}]} = \max_{x\in[\bar{x}_i,\bar{x}_{i+1}]} |f(x)|.$$

Пусть $\tilde{C}^k[a,b] = \tilde{C}^k$ $(k=0,1,\ldots;\tilde{C}^0=\tilde{C})$ - множество $(b-a)$-периодических функций, k раз непрерывно дифференцируемых на всей вещественной оси.

§I. Линейные соотношения для сплайна. Оценка нормы обратной матрицы

Продолжим по периодичности сетки $\Delta,\bar{\Delta}$ и сплайн $S(x)$. Справедливы следующие линейные соотношения:

$$\frac{h^{2r}}{(2r)!}\sum_{k=0}^{2r} C(2r,0,k)\, S_{i-r+k}^{(p)} = \frac{h^{2r-p}}{(2r-p)!}\sum_{k=0}^{2r} C(2r,p,k) f_{i-r+k},$$

$$p = 1,\ldots,2r, \tag{3}$$

$$\frac{h^{2r+1}}{(2r)!}\sum_{k=0}^{2r} C(2r,0,k)\,\beta_{i-r+k} = \sum_{k=0}^{2r+1} C(2r+1,2r+1,k) f_{i-1-r+k}, \tag{4}$$

где $C(n,\nu,k) = (-1)^{\nu}\nabla^{n+1}(k+1/2)_+^{n-\nu}$; ∇ - оператор разности назад с единичным шагом;

$$u_+^n = \begin{cases} u^n, & u>0 \\ 0, & u\le 0. \end{cases}$$

Соотношение (3) в случае $p = 1, \ldots, 2r-1$ приведено в [5]. Чтобы убедиться в справедливости (3) при $p = 2r$, запишем коэффициенты $C(n,\nu,k)$ в другом виде. Как известно,

$$\nabla^{n+1} g(x) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} g(x-k),$$

поэтому

$$C(n,\nu,k) = (-1)^{\nu} \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \binom{n+1}{m} (k+1/2-m)^{n-\nu}. \tag{5}$$

С помощью формулы из [6]

$$\sum_{m=0}^{k} (-1)^{k-m} \binom{n+1}{m} = \binom{n}{k}, \quad n \geq k,$$

из (5) при $\nu=n$ получаем

$$C(n,n,k) = (-1)^{n-k} \binom{n}{k}. \tag{6}$$

Сравнивая теперь $C(2r,0,k)$ и $C(2r,2r,k)$, $k=0,\ldots,2r$, записанные в виде (5) и (6) соответственно, с коэффициентами в линейном соотношении, полученном в [I, с.I22-I23] для старшей производной сплайна, убеждаемся в справедливости (3) при $p = 2r$.

Докажем (4). Запишем (3) ($p=2r$) для $i=i-1$ и вычтем полученное равенство из (3) ($p = 2r$). Находим

$$\frac{h^{2r}}{(2r)!} \sum_{k=0}^{2r} C(2r,0,k)\left(s^{(2r)}_{i-r+k} - s^{(2r)}_{i-1-r+k}\right) = -C(2r,2r,0) f_{i-1-r} +$$
$$+ \left(C(2r,2r,0) - C(2r,2r,1)\right) f_{i-r} + \ldots + \left(C(2r,2r,2r-1) -\right.$$
$$\left.- C(2r,2r,2r)\right) f_{i+r-1} + C(2r,2r,2r) f_{i+r}. \tag{7}$$

Так как

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

то из (6) следует, что

$$C(n+1,n+1,k) = C(n,n,k-1) - C(n,n,k), \quad k = 0,\ldots,n+1, \tag{8}$$

где полагаем $C(n,n,-1) = C(n,n,n+1) = 0$. Учитывая, что

$$s^{(2r)}(x_j) - s^{(2r)}(x_{j-1}) = s^{(2r)}(\bar{\bar{x}}_j+0) - s^{(2r)}(\bar{\bar{x}}_j-0),$$

а также (8), из (7) получаем (4).

ЗАМЕЧАНИЕ. Линейные соотношения для старшей производной сплайна и для ее скачков тоже легко выводятся, если использовать соотношения из [7], связывающие значения сплайна и его производных в узлах сеток Δ и $\bar{\Delta}$.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые свойства коэффициентов $C(n,\nu,k)$. Положим для $j = 0,1,\ldots$

$$E(n,\nu,j) = \frac{1}{j!}\sum_{k=0}^{n} C(n,\nu,k)(k-n/2)^j,\quad \nu=0,\ldots,n, \tag{9.1}$$

$$\gamma_{j,s}^{(s-1)} = \frac{1}{j!}\sum_{k=0}^{s-1} C(s-1,s-1,k)(k-(s-1)/2)^j, \tag{9.2}$$

где $n \ge 1$, $s \ge 2$ – любые фиксированные целые числа и по определению полагается $0^0 = 1$.

Справедливы следующие соотношения:

$$E(n,\nu,j) = 0,\ \text{если } j+\nu \text{ нечетное, либо } j < \nu, \tag{10.1}$$

$$E(n,\nu,\nu+2m) = \frac{(n-\nu)!}{2^{2m}}\alpha_{2m,n},\quad m = 0,\ldots,\sigma-1, \tag{10.2}$$

$$E(n,\nu,\nu+2m) = 2^{-2m}\Big\{(n-\nu)!\,\alpha_{2m,n} + (-1)^{n-\nu}\sum_{k=\sigma}^{m}\frac{(2-2^{2k})}{2k}B_{2k}\frac{\alpha_{2m-2k,n}}{(2k-n-1+\nu)!}\Big\},\ m=\sigma,\sigma+1,\ldots, \tag{10.3}$$

$$\gamma_{j,s}^{(s-1)} = 0,\ \text{если } j+s-1 \text{ нечетное, либо } j < s-1, \tag{10.4}$$

$$\gamma_{s-1+2m,s}^{(s-1)} = 2^{-2m}\alpha_{2m,s-2},\quad m=0,1,\ldots, \tag{10.5}$$

где B_{2k} – числа Бернулли [6] ($B_0=1$, $B_2=1/6$, $B_4=-1/30$ и т.д.), $\sigma = [(n+2-\nu)/2]$ (здесь и всюду в дальнейшем $[u]$ – целая часть числа u), а коэффициенты $\alpha_{0,\mu}=1$, $\alpha_{2,\mu}$, $\alpha_{4,\mu},\ldots$ определяются равенством

$$\operatorname{sh}^{\mu+1}x = x^{\mu+1}(\alpha_{0,\mu} + \alpha_{2,\mu}x^2+\alpha_{4,\mu}x^4+\ldots). \tag{10.6}$$

Соотношения (10.1)-(10.3) доказываются методом использованным в [5], где в случае $\nu = 0,\ldots,n-1$ они получены при $m \le \sigma$ и неявно содержится результат для $m > \sigma$. В случае $\nu=n$ необходимо только заметить, что равенство [5]

$$\sum_{k=0}^{n} C(n,\nu,k) z^{k+1/2} = (-1)^{\nu}(1-z)^{n+1}\left(z\frac{d}{dz}\right)^{n-\nu}\left(\frac{z^{1/2}}{1-z}\right), \qquad (11)$$

$$\nu = 0,\dots,n-1,$$

которое является исходным для получения (I0.I)-(I0.3), остается справедливым и при $\nu = n$. В самом деле, воспользовавшись (6), запишем

$$\sum_{k=0}^{n} C(n,n,k) z^{k+1/2} = (-1)^{n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k} z^{k+1/2}.$$

Отсюда, в силу бинома Ньютона, получаем

$$\sum_{k=0}^{n} C(n,n,k) z^{k+1/2} = (-1)^{n}(1-z)^{n} z^{1/2},$$

что доказывает (II) для $\nu = n$.

Осталось доказать (I0.4), (I0.5). Заметим, что справедливо равенство

$$\gamma_{j,s}^{(s-1)} = -\frac{1}{j!\,2^{j-s+1}}\left\{\left(\frac{d}{dx}\right)^{j}\left(\mathrm{sh}^{s+1}x\,\frac{d}{dx}\coth x\right)\right\}_{x=0}. \qquad (12)$$

Это соотношение доказано в [8] для случая нечетного s. Однако рассуждения, приведенные в указанной работе, сохраняются и когда s четное, т.е. (I2) справедливо при любом целом $s \geq 2$. Так как

$$\frac{d}{dx}\coth x = -\frac{1}{\mathrm{sh}^{2}x},$$

то из (I2) получаем

$$\gamma_{j,s}^{(s-1)} = \frac{1}{2^{j-s+1}j!}\left\{\left(\frac{d}{dx}\right)^{j}\mathrm{sh}^{s-1}x\right\}_{x=0}.$$

Отсюда, учитывая (I0.6) и проводя дифференцирование, получаем (I0.4), (I0.5). Соотношения (I0.I)-(I0.5) доказаны.

Определим в пространстве векторов $x=(x_1,\dots,x_N)$ норму $\|x\| = \max_{1\leq i\leq N}|x_i|$. С ней согласована в пространстве матриц норма $\|A\|_{\infty} = \max_{1\leq i\leq N}\sum_{j=1}^{N}|a_{i,j}|$, где $A=\{a_{ij}\}$ – квадратная матрица порядка N. Введем векторы $\bar{S}^{(p)} = (S_1^{(p)},\dots,S_N^{(p)})^T$, $\bar{\beta}=(\beta_1,\dots,\beta_N)^T$, $\bar{G}_p = (g_{p,1},\dots,g_{p,N})^T$, $D = (d_1,\dots,d_N)^T$ (T – операция транспонирования), где

$$g_{p,i} = \sum_{k=0}^{2r} C(2r,p,k) f_{i-r+k}, \quad d_i = \sum_{k=0}^{2r+1} C(2r+1,2r+1,k) f_{i-1-r+k}.$$

Используя условия периодичности $S_k^{(p)} = S_{N+k}^{(p)}$, $\beta_k = \beta_{N+k}$ $(k=-r+1, -r+2, \ldots, r)$, $f_k = f_{N+k}$ $(k=-r, \ldots, r)$, запишем линейные соотношения (3), (4) для $i = 1, \ldots, N$ в виде систем линейных уравнений относительно $\bar{S}^{(p)}$, $\bar{\beta}$. Имеем

$$A\bar{S}^{(p)} = \frac{(2r)!\,h^{-p}}{(2r-p)!}\,\bar{G}_p, \quad p=1,\ldots,2r; \tag{13}$$

$$A\bar{\beta} = \frac{(2r)!}{h^{2r+1}}\bar{D}, \tag{14}$$

где матрица A – циркулянт [9] порядка N, первая строка которого имеет вид

$$(C(2r,0,r), C(2r,0,r+1), \ldots, C(2r,0,2r), 0, \ldots, 0, C(2r,0,0), \ldots$$
$$\ldots, C(2r,0,r-1)). \tag{15}$$

В дальнейшем нам понадобится равномерная по h ограниченность нормы $\|A^{-1}\|_\infty$. Этот факт следует, например, из полученной автором в [2] оценки для $\| A^{-1} \|_\infty$. Здесь мы приведем детальное доказательство этого результата и заодно усилим его. Покажем, что полученная в [2] оценка для $\|A^{-1}\|_\infty$ точная.

ТЕОРЕМА I. *Пусть A – циркулянт порядка N, первая строка которого имеет вид (I5). Тогда A^{-1} существует и справедливо неравенство*

$$\| A^{-1} \|_\infty \le \frac{1}{|E_{2r}|}, \tag{16}$$

где E_{2r} – числа Эйлера [6] ($E_2=-1$, $E_4=5$, $E_6 = -6I, \ldots$). Неравенство обращается в равенство только для четного N.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим матрицу A в виде произведения матриц с диагональным преобладанием, для которых известны (см., например, [II,с.334]) оценки норм обратных матриц. Тем самым оценка для $\|A^{-1}\|_\infty$ будет получена. Такой прием использовался в [I2] для оценки нормы обратной матрицы в задаче интерполяции периодическими сплайнами нечетной степени.

Согласно [9], имеем

$$A = C(2r,0,r)I + C(2r,0,r-1)P + C(2r,0,r-2)P^2 + \ldots + $$
$$+ C(2r,0,0)P^r + C(2r,0,2r)P^{N-r} + \ldots + C(2r,0,r+1)P^{N-1}, \qquad (17)$$

где I – единичная матрица, а матрица P имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 000\ldots01 \\ 100\ldots00 \\ 010\ldots00 \\ \cdots\cdots \\ 000\ldots10 \end{pmatrix},$$

причем I и P – квадратные матрицы порядка N.

Свяжем с матрицей A полином

$$Q_A(z) = C(2r,0,0)z^{2r} + C(2r,0,1)z^{2r-1} + \ldots + C(2r,0,2r).$$

Так как $P^N = I$ [9], то из (17) получаем

$$A = P^{-r}Q_A(P). \qquad (18)$$

Нам понадобятся следующие свойства полинома $Q_A(z)$ [1,с.124-126; 13]:

а) $Q_A(z)$ удовлетворяет тождеству $Q_A(z) = z^{2r}Q_A\left(\frac{1}{z}\right)$, или, иначе, $C(2r,0,2r-k) = C(2r,0,k)$, $k = 0,\ldots,2r$;

б) все нули $Q_A(z)$ отрицательны, различны и $Q_A(-1) \neq 0$.

Учитывая эти свойства, легко получить, что

$$Q_A(z) = C(2r,0,0)\prod_{\nu=1}^{r}(z^2 + a_\nu z + 1), \qquad (19)$$

причем $a_\nu > 2$, где $a_\nu = -\left(z_\nu + \frac{1}{z_\nu}\right)$, z_ν – нули полинома $Q_A(z)$, такие, что $z_\nu < -1$. Из (18) и (19) получаем

$$A = C(2r,0,0)\prod_{\nu=1}^{r}(P + a_\nu I + P^{-1}).$$

Отсюда, полагая $A_\nu = P + a_\nu I + P^{-1}$ и учитывая (5), находим

$$A = 2^{-2r}\prod_{\nu=1}^{r} A_\nu. \qquad (20)$$

Поскольку $a_\nu > 2$, $\nu = 1,\ldots,r$, то матрицы A_ν имеют диагональное преобладание. Следовательно, они невырождены, и в силу [11, с. 334] имеем

$$\|A_\nu^{-1}\|_\infty \le \frac{1}{a_\nu - 2}, \quad \nu = 1, \ldots, r. \tag{21}$$

Так как матрица A представлена в виде произведения невырожденных матриц, то она тоже невырождена. Из (20) вытекает оценка

$$\| A^{-1}\|_\infty \le 2^{2r} \prod_{\nu=1}^{r} \| A_\nu^{-1}\|_\infty . \tag{22}$$

Отсюда с помощью (2I) получаем

$$\| A^{-1}\|_\infty \le \frac{2^{2r}}{\prod\limits_{\nu=1}^{r} (a_\nu - 2)} = \frac{1}{(-1)^r Q_A(-1)} . \tag{23}$$

Убедимся, что при нечетном $N=2m+1$ в полученной оценке имеет место знак строгого неравенства. Воспользуемся [I0], где для матрицы вида A_ν выписаны элементы обратной матрицы. Вычисляя норму $\| A_\nu^{-1}\|_\infty$, после несложных выкладок получаем

$$\| A_\nu^{-1}\|_\infty = \frac{1}{a_\nu - 2} - \frac{4|\omega_\nu^{m+1}|}{\sqrt{a_\nu^2 - 4}\,(1-\omega_\nu^{2m+1})(1+\omega_\nu)},$$

где $\omega_\nu = (-a_\nu + \sqrt{a_\nu^2 - 4})/2$. Так как $|\omega_\nu| < 1$, то

$$\| A_\nu^{-1} \|_\infty < \frac{1}{a_\nu - 2}, \quad \nu = 1, \ldots, r. \tag{24}$$

Используя полученное неравенство, из (22) находим при нечетном N

$$\| A^{-1}\|_\infty < \frac{1}{(-1)^r Q_A(-1)} . \tag{25}$$

Покажем теперь, что при четном N в оценке (23) достигается равенство. Следуя [I0], оценим $\| A^{-1}\|_\infty$ снизу. Так как спектральный радиус матрицы не больше любой матричной нормы, то

$$\| A^{-1}\|_\infty \ge \Big(\min_{0 \le k \le N-1} |\lambda_k|\Big)^{-1}, \tag{26}$$

где λ_k - характеристические числа матрицы A. Характеристические числа циркулянта легко выписываются [9]. Имеем

$$\lambda_k = C(2r,0,r)+C(2r,0,r-1)\xi_k+\ldots+C(2r,0,0)\xi_k^r+C(2r,0,2r)\xi_k^{N-r}+\ldots$$
$$\ldots+C(2r,0,r+1)\xi_k^{N-1}, \quad k=0,\ldots,N-1,$$

где $\xi_k = \exp(2\pi ki/N)$, $i=\sqrt{-1}$. Так как $\xi_k^N = 1$, то
$$\lambda_k = z^{-r}Q_A(z)\,|_{z=\xi_k}.$$

Далее, учитывая (I9), получаем

$$\lambda_k = 2^{-2r}\prod_{\nu=1}^{r}(z+a_\nu+z^{-1})\Big|_{z=\xi_k} = 2^{-2r}\prod_{\nu=1}^{r}\left(a_\nu+2\cos\frac{2\pi k}{N}\right).$$

Отсюда в случае, когда N четное, находим
$$\min_k |\lambda_k| = 2^{-2r}\prod_{\nu=1}^{r}(a_\nu-2) = (-1)^r Q_A(-1).$$

В итоге из (26) при четном N имеем
$$\| A^{-1}\|_\infty \ge \frac{1}{(-1)^r Q_A(-1)}.$$

Объединяя полученную оценку с неравенством (23), заключаем, что для четного N
$$\| A^{-1}\|_\infty = \frac{1}{(-1)^r Q_A(-1)}.$$

Для завершения доказательства остается показать, что $(-1)^r Q_A(-1) = |E_{2r}|$. Нам потребуются некоторые свойства полиномов Бернулли и Эйлера [6]:

$$E_{m-1}(x) = \frac{2^m}{m}\left\{B_m\left(\frac{x+1}{2}\right) - B_m\left(\frac{x}{2}\right)\right\}, \quad m=1,2,\ldots; \tag{27}$$

$$E_m = 2^m E_m\left(\frac{1}{2}\right), \quad m=0,1,\ldots; \tag{28}$$

$$B_m\left(\frac{1}{4}\right) = (-1)^m B_m\left(\frac{3}{4}\right), \quad m=1,2,\ldots, \tag{29}$$

где $B_k(x)$ и $E_k(x)$ - полиномы Бернулли и Эйлера соответственно.

Из (27) имеем

$$E_{2k}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2^{2k+1}}{2k+1}\left\{B_{2k+1}\left(\frac{3}{4}\right) - B_{2k+1}\left(\frac{1}{4}\right)\right\}, \quad k = 0,1,\dots,$$

что с учетом (28) и (29) приводит к равенству

$$E_{2k} = -\frac{2^{4k+2}}{2k+1} B_{2k+1}\left(\frac{1}{4}\right), \quad k = 0,1,\dots$$

Отсюда, воспользовавшись соотношением (см. [13])

$$\frac{2^{4r+2}}{2r+1}\left| B_{2r+1}\left(\frac{1}{4}\right)\right| = (-1)^r Q_A(-1),$$

получаем $(-1)^r Q_A(-1) = |E_{2r}|$. Теорема полностью доказана.

Отметим, что в [10] получена точная оценка нормы обратной матрицы для трехдиагональных циркулянтов типа A_ν, когда $|a_\nu| > 2$. Неравенство (24) усиливает результат [10] в случае нечетного N и $a_\nu \geq 2$.

§2. Асимптотические разложения

Определим $a_j(p)$, $j=0,1,\dots$; $p=1,\dots,2r$, рекуррентными со-отношениями[ж)]:

$$a_j(p) = \frac{1}{(2r-p)!}E(2r,p,p+2q+2j) - \frac{1}{(2r)!}\Big(E(2r,0,2q+2j) + \sum_{\nu=0}^{j-1} a_\nu(p)E(2r,0,2j-2\nu)\Big), \tag{30}$$

где $q = [(2r+2-p)/2]$, а $E(2r,\cdot,\cdot)$ имеет вид (9.1). Отсюда, если учесть (10.2), (10.3), можно выразить $a_j(p)$ через числа Бернулли. Так, например,

$$\left.\begin{aligned}
a_0(p) &= \frac{(-1)^p(2-2^{2q})B_{2q}}{2q\,2^{2q}(2r-p)!};\\
a_1(p) &= \begin{cases}\dfrac{(2-2^{2q+2})B_{2q+2}}{2^{2q+2}(2q+2)}\left(\dfrac{(-1)^p}{(2r-p)!(2q+1+p-2r)!} - \dfrac{1}{(2r)!}\right), & p=1,2;\\[2ex]
\dfrac{(-1)^p(2-2^{2q+2})B_{2q+2}}{2^{2q+2}(2q+2)(2r-p)!(2q+1-2r+p)!}, & p\neq 1,2.\end{cases}
\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

ж) Здесь и всюду ниже сумма полагается равной нулю, если верхний индекс в символе суммирования меньше нижнего.

ЛЕММА. Пусть $p=1,\dots,2r$; $q=[(2r+2-p)/2]$ и $n\geq 0$ — любое фиксированное целое число. Тогда если $f(x)\in\tilde{C}^{p+2q+n}$, то

$$s_i^{(p)}-f_i^{(p)}=\sum_{j=0}^{[\frac{n-1}{2}]}a_j(p)h^{2q+2j}f_i^{(p+2q+2j)}+R_{i,p,n},\quad i=1,\dots,N,$$

где

$$\max_i|R_{i,p,n}|=O(h^{2q+n}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$R_{i,p,n}=s_i^{(p)}-f_i^{(p)}-\sum_{j=0}^{[\frac{n-1}{2}]}a_j(p)h^{2q+2j}f_i^{(p+2q+2j)},$$

и пусть $\bar{\bar{R}}_{p,n}=(R_{1,p,n},\dots,R_{N,p,n})^T$. В силу (13) имеем

$$A\bar{\bar{R}}_{p,n}=\bar{D}_{p,n},\tag{32}$$

где вектор $\bar{D}_{p,n}=(D_{1,p,n},\dots,D_{N,p,n})^T$ имеет компоненты

$$D_{i,p,n}=\frac{(2r)!h^{-p}}{(2r-p)!}\sum_{k=0}^{2r}C(2r,p,k)\,f_{i-r+k}-$$

$$-\sum_{k=0}^{2r}C(2r,0,k)\Big(f_{i-r+k}^{(p)}+\sum_{j=0}^{[\frac{n-1}{2}]}a_j(p)h^{2q+2j}f_{i-r+k}^{(p+2q+2j)}\Big)\tag{33}$$

В (33) разложим f_{i-r+k}, $f_{i-r+k}^{(p)}$ и $f_{i-r+k}^{(p+2q+2j)}$ в точке x_i по формуле Тейлора. Тогда в обозначениях (9.I) имеем

$$D_{i,p,n}=\frac{(2r)!h^{-p}}{(2r-p)!}\Big(\sum_{j=0}^{p+2q-1}B(2r,p,j)h^jf_i^{(j)}+$$

$$+\sum_{k=0}^{2[\frac{n-1}{2}]}B(2r,p,p+2q+k)h^{p+2q+k}f_i^{(p+2q+k)}\Big)-$$

$$-\sum_{j=0}^{2q+2[\frac{n-1}{2}]}B(2r,0,j)h^jf_i^{(p+j)}-$$

$$- \sum_{j=0}^{[\frac{n-1}{2}]} a_j(p)h^{2q+2j} \sum_{\nu=0}^{2[\frac{n-1}{2}]-2j} E(2r,0,\nu)h^{\nu} f_i^{(p+2q+2j+\nu)} + O(h^{2q+n}).$$

В силу (I0.I) получаем

$$D_{i,p,n} = \frac{(2r)!h^{-p}}{(2r-p)!}\Big(\sum_{j=0}^{q-1} E(2r,p,p+2j)h^{p+2j} f_i^{(p+2j)} +$$

$$+ \sum_{j=0}^{[\frac{n-1}{2}]} E(2r,p,p+2q+2j)h^{p+2q+2j} f_i^{(p+2q+2j)} \Big) -$$

$$- \sum_{j=0}^{[\frac{n-1}{2}]} a_j(p)h^{2q+2j} \sum_{\nu=0}^{[\frac{n-1}{2}]-j} E(2r,0,2\nu)h^{2\nu} f_i^{(p+2q+2j+2\nu)} -$$

$$- \sum_{j=0}^{q+[\frac{n-1}{2}]} E(2r,0,2j)h^{2j} f_i^{(p+2j)} + O(h^{2q+n}) .$$

Собирая члены при одинаковых степенях h , запишем

$$D_{i,p,n} = \sum_{k=0}^{q-1}\left(\frac{(2r)!E(2r,p,p+2k)}{(2r-p)!} - E(2r,0,2k)\right)h^{2k} f_i^{(p+2k)} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\left\{ \frac{(2r)!E(2r,p,p+2q+2k)}{(2r-p)!} - E(2r,0,2q+2k) - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=0}^{k} a_j(p)E(2r,0,2k-2j)\right\} h^{2q+2k} f_i^{(p+2q+2k)} + O(h^{2q+n}).$$

Выражения при h^{2k} $(k=0,\dots,q-1)$ равны нулю в силу (I0.2). Кроме того, согласно (I0.2), $E(2r,0,0)=(2r)!$ Следовательно, выражения при $h^{2k}(k=q,\dots,q+\left[\frac{n-1}{2}\right])$ тоже равны нулю в силу выбора коэффициентов $a_j(p)$, $j=0,\dots,k$. Поэтому

$$D_{i,p,n} = O(h^{2q+n}) . \tag{34}$$

Так как, по теореме I, $\| A^{-1}\|_{\infty}$ ограничена константой, не зависящей от h, то из (32), учитывая (34), получаем

$$\| \bar{R}_{p,n}\| \le \| A^{-1}\|_{\infty} \| \bar{D}_{p,n}\| = O(h^{2q+n}).$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $m \geq 0$ – любое фиксированное целое число. Тогда если $f(x) \in \tilde{C}^{2r+2+m}$, то для $x \in [\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}] \cap [a,b]$, $i=0,\ldots,N$, имеем

$$S^{(p)}(x) - f^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{m} \varphi_{p,k}(t) h^{2r+1-p+k} f^{(2r+1+k)}(x) +$$

$$+ O(h^{2r+2+m-p}), \quad p=0,\ldots,2r, \tag{35}$$

равномерно относительно $x \in [a,b]$, где

$$\varphi_{p,k}(t) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \frac{(t-1/2)^{k-j}}{(k-j)!} \phi_j^{(p)}(t),$$

$$\phi_j(t) = \sum_{\nu=1}^{r} \frac{(t-1/2)^{2\mu-1+j}}{(2\mu-1+j)!} a_{[j/2]}(2\mu-1+j) - \frac{(t-1/2)^{2r+1+j}}{(2r+1+j)!},$$

$\mu = [(2\nu+1-j)/2]$, $t = (x-\bar{x}_i)/h$.

В частности,

$$\varphi_{p,0}(t) = -\frac{B_{2r+1-p}(t)}{(2r+1-p)!};$$

$$\varphi_{p,1}(t) = \begin{cases} \dfrac{(2r+1)(B_{2r+2}(t) - B_{2r+2}(\frac{1}{2}))}{(2r+2)!}, & p=0; \\[2ex] \dfrac{(2r+1-p)B_{2r+2-p}(t)}{(2r+2-p)!}, & p \neq 0; \end{cases}$$

$$\varphi_{p,2}(t) = \begin{cases} -\dfrac{(2r+1)(2rB_{2r+2}(t) + 2B_{2r+2}(\frac{1}{2}))}{(2r+2)!\,2!}, & p=1; \\[2ex] -\dfrac{(2r+1-p)(2r+2-p)B_{2r+3-p}(t)}{(2r+3-p)!\,2!}, & p \neq 1; \end{cases}$$

$$\varphi_{p,3}(t) = \begin{cases} \dfrac{(2r+1)(2r+2)(2r+3)(B_{2r+4}(t) - B_{2r+4}(\frac{1}{2}))}{3!\,(2r+4)!}, & p=0; \\[2ex] \dfrac{(2r+1)(2r(2r-1)B_{2r+2}(t) - 6B_{2r+2}(\frac{1}{2}))}{3!(2r+2)!}, & p=2; \\[2ex] \dfrac{(2r+1-p)(2r+2-p)(2r+3-p)\,B_{2r+4-p}(t)}{3!\,(2r+4-p)!}, & p \neq 0,2. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in [\bar{\bar{x}}_i, \bar{\bar{x}}_{i+1}] \cap [a, b]$. Разложим разность $s(x) - f(x)$ в точке x_i по формуле Тейлора. Имеем

$$s(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{2r} \frac{((t-1/2)h)^k}{k!} s_i^{(k)} - \sum_{k=0}^{2r+1+m} \frac{((t-1/2)h)^k}{k!} f_i^{(k)} -$$

$$- \frac{1}{(2r+1+m)!} \int_{x_i}^{x} f^{(2r+2+m)}(v)(x-v)^{2r+1+m}\, dv .$$

Подставим в правую часть этого равенства выражения для $s_i^{(p)}$, $p = 1, \ldots, 2r$, из леммы. Имеем

$$s(x)-f(x) = \sum_{k=1}^{r} \left\{ \frac{((t-1/2)h)^{2k}}{(2k)!} \left(f_i^{(2k)} + \right.\right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=0}^{[\frac{m-1}{2}]} a_\nu(2k) h^{2r+2-2k+2\nu} f_i^{(2r+2+2\nu)} + R_{i,2k,m} \right) +$$

$$+ \frac{((t-1/2)h)^{2k-1}}{(2k-1)!} \left(f_i^{(2k-1)} + \sum_{\nu=0}^{[\frac{m}{2}]} a_\nu(2k-1) h^{2r+2-2k+2\nu} f_i^{(2r+1+2\nu)} + \right.$$

$$\left.\left. + R_{i,2k-1,m+1} \right) \right\} - \sum_{k=0}^{2r+1+m} \frac{((t-1/2)h)^k}{k!} f_i^{(k)} -$$

$$- \frac{1}{(2r+1+m)!} \int_{x_i}^{x} f^{(2r+2+m)}(v)\,(x-v)^{2r+1+m}\, dv ,$$

где $\max_i |R_{i,2k,m}| = O(h^{2r+2-2k+m})$, $\max_i |R_{i,2k-1,m+1}| = O(h^{2r+3-2k+m})$.
Сгруппировав члены при одинаковых степенях h и продифференцировав по x полученное соотношение $2r$ раз, получаем

$$s^{(p)}(x) - f^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{m} \phi_k^{(p)}(t) h^{2r+1+k-p} f_i^{(2r+1+k)} + Q_m^{(p)}(x),$$

$$p = 0, \ldots, 2r, \qquad (36)$$

где

$$\phi_k(t) = \sum_{\nu=1}^{r} \frac{(t-1/2)^{2\mu-1+k}}{(2\mu-1+k)!} a_{[k/2]}(2\mu-1+k) -$$

$$- \frac{(t-1/2)^{2r+1+k}}{(2r+1+k)!}, \quad \mu = \left[\frac{2\nu+1-k}{2}\right],$$

$$Q_m(x) = \sum_{k=0}^{2r-1} \frac{((t-1/2)h)^{2r-k}}{(2r-k)!} R_{i,2r-k,m+2[(k+1)/2]-k} -$$

$$- \frac{1}{(2r+1+m)!} \int_{x_i}^{x} f^{(2r+2+m)}(v)(x-v)^{2r+1+m}\, dv.$$

Положим

$$\varphi_{p,k}(t) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \frac{(t-1/2)^{k-j}}{(k-j)!} \psi_j^{(p)}(t). \tag{37}$$

В (36) разложим $f_i^{(2r+1+k)}$, $k=0,\dots,m$, в точке x по формуле Тейлора с остаточным членом в интегральном виде. Далее перегруппируем в (36) члены по степеням h. В итоге получаем

$$S^{(p)}(x) - f^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{m} \varphi_{p,k}(t) h^{2r+1-p+k} f^{(2r+1+k)}(x) + R_{p,m}(x),$$

где

$$R_{p,m}(x) = \sum_{k=0}^{m} \psi_k^{(p)}(t) \frac{h^{2r+1-p+k}}{(m-k)!} \int_{x}^{x_i} f^{(2r+2+m)}(v)(x_i-v)^{m-k} dv + Q_m^{(p)}(x).$$

Используя теорему о среднем для интегралов и оценивая выражения, входящие в $R_{p,m}(x)$, мы приходим к оценке (очевидно, что констан - ту в оценке можно взять, не зависящую от $x \in [a,b]$) $R_{p,m}(x) = O(h^{2r+2-p+m})$ равномерно по $x \in [a,b]$. Для завершения доказательства остается представить $\varphi_{p,k}(t)$, $0 \le k \le 3$, через полиномы Бернулли. Известно [6], что $B_n(1/2) = -(1-2^{-n+1})B_n$, поэтому из (3I) для $\nu = 1,\dots,r$ имеем

$$a_0(2\nu-1) = - \frac{B_{2r+2-2\nu}\left(\frac{1}{2}\right)}{(2r+2-2\nu)!};$$

$$a_0(2\nu) = \frac{(2r-2\nu+1)B_{2r+2-2\nu}\left(\frac{1}{2}\right)}{(2r+2-2\nu)!};$$

$$a_1(2\nu-1) = \begin{cases} -\dfrac{B_{2r+2}\left(\frac{1}{2}\right)}{(2r)!2}, & \nu = 1; \\[2ex] -\dfrac{B_{2r+4-2\nu}\left(\frac{1}{2}\right)}{(2r+1-2\nu)!(2r+4-2\nu)2}, & \nu \ge 2, \end{cases}$$

$$a_1(2\nu) = \begin{cases} \dfrac{((2r-1)2r-6)B_{2r+2}\left(\frac{1}{2}\right)}{6(2r+2)(2r)!}, & \nu = 1; \\ \dfrac{B_{2r+4-2\nu}\left(\frac{1}{2}\right)}{6(2r+4-2\nu)(2r-2\nu)!}, & \nu \ge 2. \end{cases}$$

Подставим полученные выражения в формулу (37) для $\varphi_{p,k}(t)$, $k = 0,\dots,3$. После несложных преобразований, учитывая, что $B_k(\frac{1}{2})=0$ (k нечетное) [6], получаем

$$\varphi_{p,0}(t) = -\sum_{k=0}^{2r+1-p} \frac{(t-1/2)^{2r+1-p-k} B_k(\frac{1}{2})}{(2r+1-p-k)!\,k!};$$

$$\varphi_{p,1}(t) = \binom{2r+1-p}{1}\left(\sum_{k=0}^{2r+2-p} \frac{(t-1/2)^{2r+2-p-k} B_k(\frac{1}{2})}{(2r+2-p-k)!\,k!} - \delta_{0,p}\frac{B_{2r+2}(\frac{1}{2})}{(2r+2)!}\right);$$

$$\varphi_{p,2}(t) = -\binom{2r+2-p}{2}\left(\sum_{k=0}^{2r+3-p} \frac{(t-1/2)^{2r+3-p-k} B_k(\frac{1}{2})}{(2r+3-p-k)!\,k!} + \delta_{1,p}\frac{2B_{2r+2}(\frac{1}{2})}{2r(2r+2)!}\right);$$

$$\varphi_{p,3}(t) = \binom{2r+3-p}{3}\left(\sum_{k=0}^{2r+4-p} \frac{(t-1/2)^{2r+4-p-k} B_k(\frac{1}{2})}{(2r+4-p-k)!\,k!} - \delta_{2,p}\frac{6B_{2r+2}(\frac{1}{2})}{2r\,(2r-1)(2r+2)!} - \delta_{0,p}\frac{B_{2r+4}(\frac{1}{2})}{(2r+4)!}\right),$$

где $\delta_{k,j}$ – символ Кронекера. Так как [6]

$$B_n(t) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} B_k\left(\tfrac{1}{2}\right)(t-1/2)^{n-k},$$

то из полученных соотношений для $\varphi_{p,k}(t)$, $k=0,\dots,3$, находим

$$\varphi_{p,0}(t) = -\frac{B_{2r+1-p}(t)}{(2r+1-p)!};$$

$$\varphi_{p,1}(t) = (2r+1-p)\left(\frac{B_{2r+2-p}(t)}{(2r+2-p)!} - \delta_{0,p}\frac{B_{2r+2}(\frac{1}{2})}{(2r+2)!}\right);$$

$$\varphi_{p,2}(t) = -\binom{2r+2-p}{2}\left(\frac{B_{2r+3-p}(t)}{(2r+3-p)!} + \delta_{1,p}\frac{2B_{2r+2}(\frac{1}{2})}{2r(2r+2)!}\right);$$

$$\varphi_{p,3}(t)=\binom{2r+3-p}{3}\left(\frac{B_{2r+4-p}(t)}{(2r+4-p)!}-\delta_{0,p}\frac{B_{2r+4}(\frac{1}{2})}{(2r+4)!}-\delta_{2,p}\frac{6\,B_{2r+2}(\frac{1}{2})}{(2r-1)(2r)(2r+2)!}\right).$$

Теорема полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Асимптотическое разложение вида (36) более компактно, чем (35), однако оно менее удачно с точки зрения представления полиномов $\phi_j^{(p)}(t)$ $(j>0)$ через полиномы Бернулли.

Отметим, что сформулированная в недавней работе [14] теорема 3, где приведены четыре члена асимптотики погрешности для случая $p=0$, неверна. Два последних члена асимптотики должны иметь другой вид. Это замечание касается как четной, так и нечетной степеней сплайна.

Таблица

p	x^*
$0, 2r$	$\bar{x}_i,\ i = 1,\dots,N$
$2k$ $(k=1,\dots,r-1)$	$\bar{x}_i,\ i = 1,\dots,N;$ $x_i,\ i = 0,\dots,N$
$2k+1$ $(k=0,\dots,r-1)$	$\bar{x}_0 + ht_{2r-2k,2}$, $\bar{x}_i + ht_{2r-2k,m}$, $m=1,2;\ i = 1,\dots,N-1;$ $\bar{x}_N + ht_{2r-2k,1}$

Вид главного члена погрешности в разложении (35) позволяет найти все точки, в которых повышается порядок приближения (точки суперсходимости). Легко видеть, что если $t^* \in [0,1]$ является нулем полинома $B_{2r+1-p}(t)$, то точки $x^*=\bar{x}_i+ht^*$, $i=0,\dots,N$, являются точками суперсходимости для $S^{(p)}(x)$. Следовательно, расположение точек суперсходимости и их количество зависят от расположения и числа нулей полиномов Бернулли. Известно (см., например, [15]), что полином Бернулли $B_{2k}(t)$ четной степени имеет два нуля $t_{2k,m}$, $m=1,2$; $t_{2k,1} < t_{2k,2}$, $t_{2k,2} = 1 - t_{2k,1}$, расположенные симметрично относительно точки $t=1/2$. Полином Бернулли нечетной степени имеет нули $t = 0,1/2,1$ (исключение составляет полином Бернулли первой степени, имеющий только один нуль $t=1/2$). Точки суперсходимости $x^* \in [a,b]$ для $S^{(p)}(x)$, $p=0,\dots,2r$, приведены в таблице.

Отметим, что точки суперсходимости независимо получены в [2] и [3].

ЗАМЕЧАНИЕ. Явные выражения для $t_{2,m}$, $t_{4,m}$ легко найти, вычисляя нули полиномов $B_2(t)=t^2-t+\frac{1}{6}$, $B_4(t) = t^4-2t^3+t^2 - \frac{1}{30}$. Имеем

$$t_{2,m} = \frac{1}{2} + (-1)^m \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad t_{4,m} = \frac{1}{2} + (-1)^m \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{30}}}.$$

Для вычисления остальных $t_{2k,m}$ можно использовать асимптотическую формулу [15] для нулей полиномов Бернулли

$$t_{2k,1} = 1/4 - (4^{-k}-16^{-k}+4\cdot 36^{-k})/(2\pi) + O(64^{-k}).$$

Используя неравенство [15] $1/4 - 2^{-2k-1}/\pi < t_{2k,1} < 1/4$, получаем оценку для точек суперсходимости в случае, когда $p = 2k + 1$ $(k = 0,\dots,r-1)$:

$$\bar{\bar{x}}_i + (1/4-2^{2k-2r-1}/\pi)h < \bar{\bar{x}}_i + t_{2r-2k,1}\, h < \bar{\bar{x}}_i + h/4, \ i=1,\dots,N;$$

$$\bar{\bar{x}}_i + 3h/4 < \bar{\bar{x}}_i + t_{2r-2k,2}\, h < \bar{\bar{x}}_i + (3/4+2^{2k-2r-1}/\pi)h, \ i=0,\dots,N-1.$$

В дальнейшем нам понадобятся некоторые свойства полиномов Бернулли (см., например, [6,15]):

$$|B_{2k}(t)| \le |B_{2k}|, \quad t\in[0,1], \quad k=0,1,\dots ;$$

$$\max_{t\in[0,1]} |B_{2k+1}(t)| = |B_{2k+1}(t_{2k,1})| = |B_{2k+1}(t_{2k,2})|, \quad k > 0;$$

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{|B_n|}{n!}, & n \text{ четное} \\ \max\limits_{t\in[0,1]} \dfrac{|B_n(t)|}{n!}, & n \text{ нечетное} \end{array}\right\} < \frac{2}{(2\pi)^n(1-2^{-n+1})}. \tag{38}$$

Учитывая приведенные неравенства, из теоремы 2 получаем два утверждения, касающихся асимптотических оценок погрешности приближения.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f(x) \in \tilde{C}^{2r+2}$. Тогда для $x \in [\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}] \cap [a,b]$, $i = 0,\dots,N$, имеем

$$|S^{(p)}(x) - f^{(p)}(x)| \le K_p h^{2r+1-p} \|f^{(2r+1)}\|_{C[\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}]} + O(h^{2r+2-p}),$$

$$p = 0,\dots,2r,$$

где

$$K_p = \begin{cases} \dfrac{|B_{2r+1-p}|}{(2r+1-p)!}, & p = 2k+1,\ k \ge 0, \\ \dfrac{\max\limits_{0\le t\le 1} |B_{2r+1-p}(t)|}{(2r+1-p)!}, & p=2k,\ k \ge 0, \end{cases} < \frac{2}{(2\pi)^{2r+1-p}(1-2^{-2r+p})}.$$

ТЕОРЕМА 4. I) Пусть $f(x) \in \tilde{C}^{2r+4}$. Тогда

а) $$\max_{1\le i\le N} |S^{(p)}(\bar{x}_i) - f^{(p)}(\bar{x}_i)| = |\varphi_{p,1}(0)| h^{2r+2-p} \max_{1\le i\le N} |f^{(2r+2)}(\bar{x}_i)| +$$

$$+ O(h^{2r+4-p}), \quad p=2k,\ k=0,\dots,r-1,$$

где

$$\varphi_{p,1}(0) = \begin{cases} \dfrac{2(2r+1)(1-2^{-2r-2})B_{2r+2}}{(2r+2)!}, & p=0, \\ \dfrac{(2r+1-p)B_{2r+2-p}}{(2r+2-p)!}, & p\ne 0; \end{cases}$$

б)

$$\max_{0\le i\le N} |S^{(p)}(x_i) - f^{(p)}(x_i)| = |\varphi_{p,1}(\tfrac{1}{2})| h^{2r+2-p} \max_{0\le i\le N} |f^{(2r+2)}(x_i)| +$$

$$+ O(h^{2r+4-p}), \quad p=2k,\ k=1,\dots,r,$$

где

$$\varphi_{p,1}(\tfrac{1}{2}) = \frac{(2r+1-p)(2^{-2r-1+p} - 1)\, B_{2r+2-p}}{(2r+2-p)!}.$$

2) Пусть $f(x) \in \tilde{C}^{2r+3}$. Тогда

$$\max_{i\in I} |S^{(p)}(\bar{x}_i + t_{2r+1-p,m}h) - f^{(p)}(\bar{x}_i + t_{2r+1-p,m}h)| =$$

$$= |\varphi_{p,1}(t_{2r+1-p,m})| h^{2r+2-p} \max_{i\in I} |f^{(2r+2)}(\bar{x}_i + t_{2r+1-p,m}h)| + O(h^{2r+3-p}),$$

при $m=1,2$; $p=2k+1$, $k=0,\ldots,r-1$, где $I=\{i: i\in\{0,\ldots,N\},\ \bar{\bar{x}}_i+t_{2r+1-p,m}h\in[a,b]\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Дальнейшее увеличение гладкости $f(x)$ не приводит к улучшению оценок $O(h^{2r+4-p})$, $O(h^{2r+4-p})$ и $O(h^{2r+3-p})$. Это следует из вида функций $\varphi_{p,2}(t)$, $\varphi_{p,3}(t)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если учесть неравенство (38), то можно указать числовые оценки для констант $|\varphi_{p,1}(0)|$, $|\varphi_{p,1}(\frac{1}{2})|$, $|\varphi_{p,1}(t_{2r+1-p,m})|$.

Имеем

$$|\varphi_{p,1}(0)| < \begin{cases} \dfrac{4(2r+1)(1-2^{-2r-2})}{(2\pi)^{2r+2}(1-2^{-2r-1})}, & p=0; \\[2ex] \dfrac{2(2r+1-p)}{(2\pi)^{2r+2-p}(1-2^{-2r-1+p})}, & p=2k,\ k=1,\ldots,r-1; \end{cases}$$

$$|\varphi_{p,1}(\tfrac{1}{2})| < 2(2r+1-p)/(2\pi)^{2r+2-p}, \quad p=2k,\quad k=1,\ldots,r;$$

$$|\varphi_{p,1}(t_{2r+1-p,m})| < \frac{2(2r+1-p)}{(2\pi)^{2r+2-p}(1-2^{-2r-1+p})}, \quad p=2k+1,\ k=0,\ldots,r-1.$$

В случае $p=2r-3, 2r-1$ для констант $|\varphi_{p,1}(t_{2r+1-p,m})|$ можно получить числовые значения, исходя из явных выражений для $t_{2r+1-p,m}$.

Имеем

$$|\varphi_{2r-3,1}(t_{4,m})| = \frac{(3+\sqrt{30})\sqrt{1-4/\sqrt{30}}}{5400}, \quad |\varphi_{2r-1,1}(t_{2,m})| = \frac{\sqrt{3}}{108}, \quad m=1,2.$$

Получим теперь асимптотическое разложение для скачка старшей производной сплайна. Определим числа $a_j(2r+1)$, $j=0,1,\ldots$, рекуррентными соотношениями

$$a_j(2r+1) = \gamma^{(2r+1)}_{4r+3+2j,2r+2} - \frac{1}{(2r)!}\{E(2r,0,2r+2+2j) + \\ + \sum_{\nu=0}^{j-1} a_\nu(2r+1)E(2r,0,2j-2\nu)\}, \tag{39}$$

где $E(2r,0,\cdot)$ и $\gamma^{(s)}_{v,u}$ имеют вид (9.I) и (9.2) соответственно. Если учесть (I0.2), (I0.3), (I0.5), то можно выразить $a_j(2r+1)$ через числа Бернулли. Так, например, имеем

$$a_0(2r+1) = \frac{(2^{2r+2}-2)B_{2r+2}}{2^{2r+2}(2r+2)(2r)!}.$$

$$a_1(2r+1) = \frac{(2^{2r+4}-2)B_{2r+4}}{6\cdot 2^{2r+4}(2r+4)(2r)!}.$$

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 5. Пусть $m \ge 0$ - любое фиксированное целое число. Тогда если $f(x) \in \in \tilde{C}^{4r+5+2m}$, то

$$\frac{S^{(2r)}(\bar{x}_i+0) - S^{(2r)}(\bar{x}_i-0)}{h} = f^{(2r+1)}(x_i) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{m} a_j(2r+1)h^{2r+2+2j} f^{(4r+3+2j)}(\bar{x}_i) + O(h^{2r+4+2m}),$$

$$i=1,2,\dots,N.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Схема доказательства такая же, как и в лемме. Положим

$$R_{i,m} = \frac{S^{(2r)}(\bar{x}_i+0)-S^{(2r)}(\bar{x}_i-0)}{h} - f^{(2r+1)}(\bar{x}_i) -$$

$$- \sum_{j=0}^{m} a_j(2r+1)h^{2r+2+2j} f^{(4r+3+2j)}(\bar{x}_i).$$

Покажем, что $\max_i |R_{i,m}| = O(h^{2r+4+2m})$. Подставляя $\bar{R}_m = (R_{1,m},\dots$ $\dots,R_{N,m})^T$ в систему (I4), получаем

$$A\bar{R}_m = \bar{D}_m, \tag{40}$$

где вектор $\bar{D}_m = (D_{1,m},\dots,D_{N,m})^T$ имеет компоненты

$$D_{i,m} = (2r)!h^{-2r-1}\sum_{k=0}^{2r+1} C(2r+1,2r+1,k)f_{i-1-r+k} - \sum_{k=0}^{2r} C(2r,0,k)\times$$

$$\times(f^{(2r+1)}(\bar{x}_{i-r+k}) + \sum_{j=0}^{m} a_j(2r+1)h^{2r+2+2j} f^{(4r+3+2j)}(\bar{x}_{i-r+k})). \tag{41}$$

В (4I) разложим $f_{i-1-r+k}, f^{(2r+1)}(\bar{x}_{i-r+k}), f^{(4r+3+2j)}(\bar{x}_{i-r+k})$ в точке $\bar{x}_i$ по формуле Тейлора. Тогда в обозначениях (9.I), (9.2), учитывая (I0.I), (I0.4), имеем

$$D_{i,m} = \sum_{k=0}^{r}((2r)!\,\gamma^{(2r+1)}_{2r+1+2k,2r+2} - B(2r,0,2k))h^{2k}f^{(2r+1+2k)}(\bar{x}_i) +$$

$$+\sum_{k=0}^{m}\Big((2r)!\,\gamma^{(2r+1)}_{4r+3+2k,\,2r+2}-E(2r,0,2r+2k+2)-$$

$$-\sum_{j=0}^{k}a_j(2r+1)E(2r,0,2k-2j)\Big)h^{2r+2k+2}f^{(4r+3+2k)}(\bar{x}_i)+O(h^{2r+4+2m}).\ (42)$$

В силу (10.5) и (10.2) имеем

$$(2r)!\,\gamma^{(2r+1)}_{2r+1+2k,\,2r+2}=E(2r,0,2k),\ \ k=0,\dots,r.$$

Поэтому первая сумма в (42) равна нулю. Так как $a_j(2r+1)$ выбраны согласно (39) и из (10.2) следует $E(2r,0,0)=(2r)!$, то коэффициенты при $h^{2r+2k+2}$, $k=0,\dots,m$, равны нулю. Следовательно, $\max\limits_i|D_{i,m}|=$ $=O(h^{2r+4+2m})$. Теперь из (40), учитывая оценку (16), получаем $\|R_m\|=O(h^{2r+4+2m})$. Теорема доказана.

Отметим, что сходимость $(S^{(2r)}(\bar{x}_i+0)-S^{(2r)}(\bar{x}_i-0))/h$ к $f^{(2r+1)}(\bar{x}_i)$ доказана в [16]. Теорема 5 для достаточно гладких $f(x)$ позволяет, в частности, указать максимально возможный порядок приближения.

Литература

1. СТЕЧКИН С.Б., СУББОТИН Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. -М.: Наука, 1976. - 248 с.

2. KINDALEV B.S. Asymptotics of error for interpolating splines of even degree.-In: Constructive theory of functions.Publishing House of the Bulgarian Academy of sciences.Sofia,1984,p.445-450.

3. BINEV P.G. Superconvergence in the Spline-Interpolation.-In: Constructive theory of functions.Publishing House of the Bulgarian Academy of sciences.Sofia,1984,p.164-170.

4. КВАСОВ Б.И. Численное дифференцирование и интегрирование на основе интерполяционных параболических сплайнов. - В кн.: Численные методы механики сплошной среды. - Новосибирск, 1983, т. 14, № 2, с.68-80.

5. HOSKINS W.D.,MEEK D.S. Linear dependence relations for polynomial splines at midknots.-BIT,1975,v.15,p.272-276.

6. АБРАМОВИЦ М., СТИГАН И. Справочник по специальным функциям. - М.: Наука, 1979. - 832 с.

7. SAKAI M. On consistency relations for polynomial splines at mesh and mid points.-Proc.Japan Acad.,1983,v.59,Ser.A,p.63-65.

8. ALBASINY E.L., HOSKINS W.D. Explicit error bounds for periodic splines of odd order on a uniform mesh.-J.Inst.Math.Appl., 1973,v.12, N 3,p.303-318.

9. МАРКУС М., МИНК Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. - М.: Наука, 1972. - 232 с.

I0. МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Некоторые свойства трехдиагональных матриц и их применение к теории кубической сплайн-интерполяции. – В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып.65). Новосибирск, 1975, с.29-49.

II. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. –М.: Наука, 1980. – 352 с.

I2. KERSHAW D. A bound on the inverse of a band matrix which occurs in interpolation by periodic odd order splines.–J.Inst. Math.Appl.,1977,v.20,p.227-228.

I3. СУББОТИН Ю.Н. О связи между конечными разностями и соответствующими производными. –В кн.: Труды МИАН СССР, 1965, т. 78, с. 24-42.

I4. ЖЕЛУДЕВ В.А. Локальные квазиинтерполяционные сплайны и преобразования Фурье. –ДАН, 1985, т.282, №6, с.1293-1298.

I5. LEHMER D.H. On the maxima and minima of Bernoulli polynomials.–Amer.Math.Montly,1940,v.47,p.533-538.

I6. СУББОТИН Ю.Н. Экстремальные задачи функциональной интерполяции и интерполяционные в среднем сплайны. –В кн.: Труды МИАН СССР, 1975, т.138, с.118-173.

Поступила в ред.-изд.отд.
9 июня 1986 года