СПЛАЙНЫ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ
(Вычислительные системы)
1986 год Выпуск 115

УДК 519.65

О ПОЛУЧЕНИИ ТОЧНЫХ ОЦЕНОК ПОГРЕШНОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ФУНКЦИЙ СПЛАЙНАМИ ПЯТОЙ СТЕПЕНИ ДЕФЕКТА I НА РАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ

П.У. Калиев

Получение точных постоянных в оценках погрешности приближения функций является одной из актуальных задач современной теории сплайн-функций. Для локальных интерполяционных сплайнов методы получения таких оценок разработаны (см., например, [I]). Что касается нелокальных сплайнов, то в настоящее время в этом направлении получены только отдельные окончательные результаты. Сравнительно простая техника, позволяющая в некоторых случаях получать точные оценки для нелокальных сплайнов невысоких степеней (до третьей включительно), разработана в монографии [I]. Известны также точные оценки погрешности приближения функций и их первых производных периодическими сплайнами произвольной степени на равномерной сетке. Методика получения этих оценок приведена в [2]. Однако она достаточно сложна и рассматривается только для периодических сплайнов наименьшего дефекта, притом на классах функций, согласованных со степенью сплайна. Нерешенным остается вопрос о применимости этого метода для получения оценок приближения производных более высокого порядка и для классов функций, несогласованных со степенью сплайна.

В настоящей статье представлены результаты исследований о возможности применения разработанного в [I] метода получения оценок для нахождения точных оценок в случае сплайнов пятой степени дефекта I на равномерной сетке. В первых двух параграфах рассматриваются вспомогательные оценки. В §I приводятся точные поточечные оценки погрешности приближения функций и ее производных эрмитовыми сплайнами пятой степени класса C^2, которые представляют также самостоятельный интерес; в §2 получены оценки приближения функций эрмитовыми сплайнами пятой степени класса C^1. В §3 оценивается погрешность приближения функции и ее производных сплайнами пятой степени дефекта I, с помощью найденных в §I,2 оценок для эрмитовых сплайнов класса C^1 и C^2. Отметим, что такие оценки были получены ранее в [3], однако постоянные в них сильно завышены.

На основании изложенных в данной статье результатов можно сделать следующие выводы. Метод получения оценок погрешности интерполяции кубическими сплайнами дефекта I, рассматриваемый в [I], можно использовать и для сплайнов более высоких степеней. Однако в этом случае указанный метод, вообще говоря, не приводит к точным оценкам, о чем свидетельствуют результаты для сплайна пятой степени. Поэтому в настоящее время актуальной задачей является разработка нового метода, позволяющего получать точные оценки погрешности интерполяции функции и ее производных сплайнами произвольной степени.

§I. Оценки погрешности интерполяции эрмитовыми сплайнами пятой степени класса C^2

Пусть в узлах сетки Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ заданы значения функции $f(x)$ и ее производных $f'(x)$ и $f''(x)$:

$$f_i = f(x_i),\ f'_i = f'(x_i),\ f''_i = f''(x_i), \qquad i = 0,1,\ldots,N.$$

По этой информации строится единственный интерполяционный эрмитов сплайн пятой степени дефекта 3 $S_{5,3}(x) \equiv H(x)$, удовлетворяющий условиям $H^{(r)}(x_i) = f_i^{(r)}$, $r = 0,1,2$, $i = 0,1,\ldots,N$. В дальнейшем сетка Δ предполагается равномерной с шагом $h = x_{i+1} - x_i$. Тогда эрмитовый сплайн $H(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ записывается в виде [I]:

$$H(x) = \varphi_1(t)f_i + \varphi_2(t)f_{i+1} + \varphi_3(t)hf'_i + \varphi_4(t)hf'_{i+1} +$$

$$+ \varphi_5(t)h^2f''_i + \varphi_6(t)h^2f''_{i+1}, \qquad (1)$$

где

$$\varphi_1(t) = (1-t)^3(1+3t+6t^2), \qquad \varphi_2(t) = t^3(10-15t+6t^2),$$

$$\varphi_3(t) = u(1-t)^2(1+3t), \qquad \varphi_4(t) = -ut^2(4-3t),$$

$$\varphi_5(t) = u^2(1-t)/2, \qquad \varphi_6(t) = u^2t/2,$$

$$t = (x-x_i)/h, \quad u = t(1-t).$$

В [4] приведены поточечные оценки величин $|H^{(r)}(x)-f^{(r)}(x)|$, $r=0,1,\dots,5$, $f(x)\in C^6[a,b]$ и вытекающие из них точные по норме оценки

$$\|H^{(r)}(x)-f^{(r)}(x)\|_C\le K_r h^{(6-r)}\|f^{VI}\|_\infty,\quad r=0,1,\dots,5, \tag{2}$$

где $K_0=\frac{1}{720\cdot 64}$, $K_1=\frac{\sqrt{5}}{30000}$, $K_2=\frac{1}{1920}$, $K_3=\frac{1}{120}$, $K_4=\frac{1}{1}$, $K_5=\frac{1}{2}$.
При их получении аналитические преобразования выполнялись на ЭВМ, и поэтому все промежуточные результаты в статье не приводятся. Заметим, что в приведенных выражениях для поточечных оценок имеются ошибки, которые хотя и не повлияли на значения постоянных K_r в (2), но препятствуют использованию поточечных оценок.

В [I] величины K_r в оценке (2) находятся численно. Однако предложенная в [I] методика позволяет в случае $f(x)\in W^6_\infty[a,b]$ получить и аналитические выражения для точных поточечных оценок. Справедлива

ТЕОРЕМА I. Если $H(x)$ интерполирует на сетке Δ функцию $f(x)\in W^6_\infty[a,b]$, то имеют место точные оценки

$$|H^{(r)}(x)-f^{(r)}(x)|\le K_r(t)h^{(6-r)}\|f^{VI}\|_\infty,\ x\in[x_i,x_{i+1}],\ r=0,1,\dots,5, \tag{3}$$

где

$K_r(t)=K_r(1-t)$,

$K_0(t)=u^3/720$,

$K_1(t)=A\equiv u^2(1-2t)/240,\quad t\in[0,2/5]$,

$K_1(t)=A+T_1^4(1-t)^2[(1-3t)(1+5t)T_1+5t(5t-2)]/360$,

$T_1=[(3t-1)(5t+1)+(t-1)\sqrt{1+6t-15t^2}]/(12t^2),\ t\in[2/5,1/2]$,

$K_2(t)=B\equiv u(1-5u)/120,\ t\in[0,t_0],\ t_0=(4-\sqrt{6})/10$,

$K_2(t)=B+T_2^4(1-t)\ [6t(5t-3)T_2-5(1-8t+10t^2)]/180$,

$T_2=[3t(3-5t)-(1-t)\sqrt{3t(4-5t)}]/[6t(1-2t)],\ t\in[t_0,t_1]$,

$t_1=(3-\sqrt{3})/6$,

$K_2(t)=-B+P_1^4t[6(1-t)(5t-2)P_1+5(3-12t+10t^2)]/180$,

$P_1=[3(1-t)(2-5t)-t\sqrt{3(1-t)(5t-1)}]/[6(1-t)(1-2t)],\ t\in[t_1,t_3]$,

$t_3=(6-\sqrt{6})/10$,

$K_2(t)=-B,\quad t\in[t_3,1/2]$,

$$K_3(t) = D + P_2^4[-2(2-14t+15t^2)P_2 + 5(1-8t+10t^2)]/60,$$
$$D \equiv (1-10u)(2t-1)/120,$$
$$P_2 = [(2-14t+15t^2) - t\sqrt{3t(4-5t)}]/[2(1-6u)], \quad t \in [0, t_0],$$
$$K_3(t) = D, \quad t \in [t_0, t_3],$$
$$K_3(t) = D + T_3^4[2(3-16t+15t^2)T_3 - 5(3-12t+10t^2)]/60,$$
$$T_3 = [(3-16t+15t^2) + (1-t)\sqrt{(1-t)(5t-1)}]/[2(1-6u)], \quad t \in [t_3, 1/2],$$
$$K_4(t) = E - P_3^4[(7-15t)P_3 + 5(5t-2)]/15, \quad E \equiv (5u-1)/10,$$
$$P_3 = [(7-15t) - \sqrt{1+6t-15t^2}]/[6(1-2t)], \quad t \in [0, 2/5],$$
$$K_4(t) = E, \quad t \in [2/5, 1/2],$$
$$K_5(t) = 1/2 - u - u^2 - 2u^3 \quad .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду симметрии поточечных оценок относительно $t=1/2$, достаточно рассмотреть случай $t \in [0, 1/2]$. Согласно (I) имеем

$$R(x) = \varphi_1(t) f_i + \varphi_2(t) f_{i+1} + \varphi_3(t) h f'_i + \varphi_4(t) h f'_{i+1} +$$
$$+ \varphi_5(t) h^2 f''_i + \varphi_6(t) h^2 f''_{i+1} - f(x).$$

Разложим в этой формуле величины f_i, f_{i+1}, f'_i, f'_{i+1}, f''_i, f''_{i+1} по формуле Тейлора в точке $x = x_i + th$ с остаточным членом в интегральной форме. После приведения подобных членов и замены переменной интегрирования $v - x_i = \tau h$ получаем

$$R^{(r)}(x) = \frac{h^{(6-r)}}{120}\left\{\int_0^t \phi_1^{(r)}(t,\tau) f^{VI}(x_i+\tau h)\,d\tau + \int_t^1 \phi_2^{(r)}(t,\tau) f^{VI}(x_i+\tau h)\,d\tau\right\}, \quad (4)$$
$$r = 0, 1, \ldots, 5,$$

где

$$\phi_1(t,\tau) = \tau^3(1-t)^3[(1+3t+6t^2)\tau^2 - 5t(1+3t)\tau + 10t^2],$$

$$\phi_2(t,\tau) = (1-\tau)^3 t^3[(10-15t+6t^2)(1-\tau)^2 - 5(1-t)(4-3t)(1-\tau) + 10(1-t)^2].$$

Применяя неравенство Гёльдера, из (4) приходим к оценке

$$|R^{(r)}(x)| \le \frac{h^{(6-r)}}{120}\left\{\int_0^t |\phi_1^{(r)}(t,\tau)|\,d\tau + \int_t^1 |\phi_2^{(r)}(t,\tau)|\,d\tau\right\} \|f^{VI}\|_\infty . \quad (5)$$

Для вычисления интегралов от модуля непрерывных функций в правой части (5) необходимо определить точки, в которых они меняют знак, и затем, вычислив интегралы по промежуткам знакопостоянства данных функций, просуммировать полученные величины. В данном случае функции $\psi_1^{(r)}(t,\tau)$ и $\psi_2^{(r)}(t,\tau)$, $r = 0,1,\dots,5$, представляют собой произведение выражений τ^3 или $(1-\tau)^3$ на квадратный трехчлен по переменной τ (с коэффициентами, зависящими от параметра t), и, значит, всегда можно найти точки, в которых они меняют знак, если они существуют.

Функции ψ_1 и ψ_2 на всем отрезке $t\in[0,1/2]$ знакопостоянны и положительны. После несложных вычислений получаем

$$|R(x)| \le \frac{t^3(1-t)^3}{720} h^6 \|f^{VI}\|_\infty ,$$

что доказывает теорему при $r=0$. При $r=1$ анализ подынтегральных функций показывает, что ψ_2' положительна и не меняет знака при $t\in[0,1/2]$, а функция ψ_1' обладает этим свойством только при $t\in[0,2/5]$. Для $t\in[2/5,1/2]$ функция ψ_1' меняет знак при $\tau=T_1$, а именно при $0\le\tau\le T_1$, $\psi_1'\le 0$, а при $T_1\le\tau\le t$, $\psi_1'\ge 0$. Разбивая отрезок $[0,1/2]$ на отрезки знакопостоянства подынтегральных функций и вычисляя интегралы, получаем:

для $t\in[0,2/5]$

$$|R'(x)| \le \frac{h^5}{120}\left\{\int_0^t \psi_1' d\tau + \int_t^1 \psi_2' d\tau\right\}\|f^{VI}\|_\infty = Ah^5\|f^{VI}\|_\infty ,$$

для $t\in[2/5,1/2]$

$$|R'(x)| \le \frac{h^5}{120}\left\{-\int_0^{T_1} \psi_1' d\tau + \int_{T_1}^t \psi_1' d\tau + \int_t^1 \psi_2' d\tau\right\}\|f^{VI}\|_\infty = K_1(t)h^5\|f^{VI}\|_\infty ,$$

что приводит к соответствующей оценке для $|R'(x)|$.

В случае $r=2$ функции ψ_1'' и ψ_2'' положительны для $t\in[0,t_0]$ и отрицательны для $t\in[t_3,1/2]$. Для $t\in[t_0,t_1]$, $\psi_2''\ge 0$, а ψ_1'' меняет знак в точке $\tau=T_2$, причем $\psi_1''\le 0$ при $0\le\tau\le T_2$ и $\psi_1''\ge 0$ при $T_2\le\tau\le t$. Для $t\in[t_1,t_3]$ $\psi_1''\le 0$, а ψ_2'' меняет знак в точке $\tau = 1-P_1$, причем $\psi_2''\le 0$ при $t\le\tau\le 1-P_1$ и $\psi_2''\ge 0$ при $1-P_1\le\tau\le 1$.

Аналогично получаем, что $\psi_1'''\le 0$, а ψ_2''' меняет знак с минуса на плюс при $\tau=1-P_2$ для $t\in[0,t_0]$; $\psi_1'''\le 0$, $\psi_2'''\le 0$ для $t\in[t_0,t_3]$. На оставшейся части отрезка $[0,1/2]$ получаем $\psi_2'''\le 0$, а $\psi_1'''\ge 0$ при $0\le\tau\le T_3$, и $\psi_1'''\le 0$ при $T_3\le\tau\le t$. Далее, для

$t\in[0,2/5]$ $\psi_1^{IV}\ge 0$, а $\psi_2^{IV}\ge 0$ при $t\le\tau\le 1-P_3$ и $\psi_2^{IV}\le 0$ при $1-P_3\le\tau\le 1$. Для $t\in[2/5,1/2]$ эти функции положительны. Наконец, функция ψ_1^{V} отрицательна, а ψ_2^{V} положительна на всем отрезке $t\in[0,1/2]$. Вычисление интегралов в (5) с учетом знаков подынтегральных функций приводит к требуемым оценкам для $|R^{(r)}(x)|$, $r = 2,3,4,5$.

СЛЕДСТВИЕ I. Если $H(x)$ интерполирует на сетке Δ функцию $f(x)\in W_\infty^6[a,b]$, то имеют место точные оценки (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам необходимо найти наибольшие значения функций $K_r(t)$ из (3). Очевидно, $\max\limits_{t\in[0,1/2]} K_0(t)=K_0(1/2)=K_0$. Далее, $K_1(t)\le K_1$ при $t\in[0,2/5]$, а при $t\in[2/5,1/2]$, учитывая, что $0\le T_1\le t$, имеем

$$K_1(t)\le A(t)+t^4(1-t)^2[5t(5t-2)]/360\le u^2(2+t)/7200<K_1.$$

Для $r=2$ наибольшее значение $K_2(t)$ достигается при $t=1/2$. В самом деле, при $t\in[t_3,1/2]$ функция $K_2(t)=-B(t)$ возрастает, и, следовательно, на этом промежутке $\max K_2(t)=K_2(1/2)=K_2$. При $t\in[0,t_0]$ имеем $K_2(t)\le 1/2400<K_2$. Далее, при $t\in[t_0,t_1]$, учитывая, что $0\le T_2\le t$, получаем

$$K_2(t)\le B(t)-t^4(1-t)(1-8t+10t^2)/36\le K_2.$$

Рассмотрим промежуток $[t_1,t_3]$. Записывая выражение для P_1 в виде $P_1=\tilde P_1-\bar P_1$, где

$$\tilde P_1=\frac{2-5t}{2(1-2t)},\qquad \bar P_1=\frac{t}{2(1-2t)}\sqrt{\frac{5t-1}{3(1-t)}},$$

нетрудно видеть, что $P_1(t)$ монотонно убывает на $[t_1,t_3]$, так как $\tilde P_1(t)$ монотонно убывает, а $\bar P_1(t)$ монотонно возрастает на этом отрезке. Учитывая, что

$$P_1(t)=2(3-12t+10t^2)[3(1-t)(2-5t)+t\sqrt{3(1-t)(5t-1)}]^{-1},$$

преобразуем $K_2(t)$ к виду

$$K_2(t)=-B(t)+tP_1^5\,\eta(t),$$

где $\eta(t)=[3(1-t)(2-5t)+5t\sqrt{3(1-t)(5t-1)}]/360$.

Разобьем отрезок $[t_1, t_3]$ на два промежутка $[t_1, t_2]$ и $[t_2, t_3]$, $t_2 = (5-\sqrt{5})/10$. При $t \in [t_1, t_2]$ имеем $-B(t) \le 0$, $tP_1^4(t) \le \le t(1-t)^4 \le t_1(1-t_1)^4$, и, кроме того, выражение $(1-t)\eta(t)$ убывает. В итоге

$$K_2(t) \le (1-t_1)^5 t_1 \eta(t_1) \approx 0{,}000469 < K_2 .$$

Для $t \in [t_2, t_3]$ выражения $tP_1(t)$ и $(1-t)\eta(t)$ убывают, а функция $-B(t)$ возрастает. Поэтому

$$K_2(t) \le -B(t_3) + t_2 P_1^4(t_2)(1-t_2)\eta(t_2) \approx 0{,}000419 < K_2 .$$

При $r=3$, как и в предыдущем случае, преобразуем функцию $K_3(t)$ для $t \in [0, t_0]$ к виду $K_3(t) = D(t) + P_2^5(t)\eta(t)$, где

$$\eta(t) = [(2-14t+15t^2) + 5t\sqrt{3t(4-5t)}]/120 .$$

Учитывая, что $0 \le P_2 \le 1-t$, получаем

$$K_3(t) \le D(t) + \eta(t) = (20t^3 - 15t^2 - 2t + 1) + 5t\sqrt{3t(4-5t)} .$$

Функция в правой части неравенства является убывающей, поэтому

$$K_3(t) \le D(0) + \eta(0) = K_3(0) = K_3 .$$

Далее, при $t \in [t_0, t_3]$ имеем $K_3(t) \le \max D(t) = D(t_2) = 1/(120\sqrt{5}) < K_3$, а при $t \in [t_3, 1/2]$, учитывая, что $0 \le T_3 \le t$, получаем

$$K_3(t) \le D(t) + t^4(-3+12t-10t^2)/12 \le 0{,}003119 < K_3 .$$

При $r=4$ функцию $K_4(t)$ для $t \in [0, 2/5]$ преобразуем к виду

$$K_4(t) = E(t) + P_3^5[(7-15t) + 5\sqrt{1+6t-15t^2}]/60$$

и далее, учитывая, что $0 \le P_3 \le 1-t$ и $1+6t-15t^2 \ge 1$, получаем

$$K_4(t) \le E(t) + (1-t)^5[(7-15t) + 5(1+6t-15t^2)] =$$

$$= E(t) + (1-t)^5(4+5t-25t^2) \le 1/120 = K_4(0) = K_4 .$$

При $t \in [2/5, 1/2]$ имеем

$$K_4(t) \le \max E(t) = E(1/2) = 1/40 < K_4 .$$

При $r=5$, очевидно, $\max\limits_{t \in [0, 1/2]} K_5(t) = K_5(0) = K_5$. Следствие доказано.

§2. Оценки погрешности интерполяции эрмитовыми сплайнами пятой степени класса C^1

Пусть в узлах сетки Δ заданы значения функции $f(x)$ и ее производной $f'(x)$: $f_i = f(x_i)$, $f'_i = f'(x_i)$, $i = 0,1,\ldots,N$. Заменим в формуле (I) значения f''_i и f''_{i+1} их аппроксимациями

$$\tilde f''_i=[3f'_{i-1}-33f'_i-29f'_{i+1}-f'_{i+2}+5(3f_{i-1}-17f_i+13f_{i+1}+f_{i+2})/h]/(16h),$$

$$\tilde f''_{i+1}=[f'_{i-1}+29f'_i+33f'_{i+1}-3f'_{i+2}+5(f_{i-1}+13f_i-17f_{i+1}+3f_{i+2})/h]/(16h).$$

Полученный таким образом эрмитов сплайн обозначим через $L(x)$, т.е.

$$L(x)= \varphi_1(t)f_i+\varphi_2(t)f_{i+1}+\varphi_3(t)hf'_i+\varphi_4(t)hf'_{i+1}+\varphi_5(t)h^2\tilde f''_i +$$

$$+ \varphi_6(t)h^2\tilde f''_{i+1}=\tilde\varphi_1(t)f_{i-1}+\tilde\varphi_2(t)f_i+\tilde\varphi_3(t)f_{i+1}+\tilde\varphi_4(t)f_{i+2} +$$

$$+ \tilde\varphi_5(t)hf'_{i-1}+\tilde\varphi_6(t)hf'_i+\tilde\varphi_7(t)hf'_{i+1}+\tilde\varphi_8(t)hf'_{i+2},$$

$$x\in [x_i,x_{i+1}] ,$$

где

$$\tilde\varphi_1(t) = 5u^2(3-2t)/32, \quad \tilde\varphi_2(t)=(1-t)^3(1+3t+6t^2)-5u^2(17-30t)/32,$$

$$\tilde\varphi_4(t) = 5u^2(1+2t)/32, \quad \tilde\varphi_3(t)=t^3(10-15t+6t^2)+5u^2(13-30t)/32,$$

$$\tilde\varphi_5(t) = u^2(3-2t)/32, \quad \tilde\varphi_6(t)=u(1-t)^2(1+3t)-u^2(33-62t)/32,$$

$$\tilde\varphi_8(t) = -u^2(1+2t)/32, \quad \tilde\varphi_7(t)=-ut^2(4-3t)-u^2(29-62t)/32,$$

Очевидно, $L(x)\in C^1[a,b]$, $L(x_j)=f_j$, $L'(x_j)=f'_j$, $j = i,i+1$.

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. Если $L(x)$ интерполирует на сетке Δ функцию $f(x)\in W^6_\infty[a,b]$, то имеет место точная оценка

$$|L(x)-f(x)|\le \frac{u^2}{2880}(3+4u)h^6\|f^{VI}\|_\infty,\ x\in [x_i,x_{i+1}].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в предыдущем параграфе, рассмотрим разность $L(x)-f(x)$. Разложим в полученной формуле величины f_j, f'_j, $j=i-1,i,i+1,i+2$, по формуле Тейлора в точке $x=x_i+th$ с остаточным членом в интегральной форме. После приведения подобных членов, замены переменной интегрирования $v-x_i=\tau h$ и применения неравенства Гёльдера, получаем

$$|L(x)-f(x)| \le \frac{h^6}{120}\left\{ \int_0^1 |\tilde{\Phi}_1(t,\tau)|d\tau + \int_0^t |\tilde{\Phi}_2(t,\tau)|d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_t^1 |\tilde{\Phi}_3(t,\tau)|d\tau + \int_0^1 |\tilde{\Phi}_4(t,\tau)|d\tau \right\} \|f^{VI}\|_\infty \quad , \qquad (5)$$

где $\tilde{\Phi}_1(t,\tau) = \tilde{\varphi}_1\tau^5 - 5\tilde{\varphi}_5\tau^4$,

$\tilde{\Phi}_2(t,\tau) = \tilde{\varphi}_1(1+\tau)^5 - 5\tilde{\varphi}_5(1+\tau)^4 + \tilde{\varphi}_2\tau^5 - 5\tilde{\varphi}_6\tau^4$,

$\tilde{\Phi}_3(t,\tau) = \tilde{\varphi}_3(1-\tau)^5 + 5\tilde{\varphi}_7(1-\tau)^4 + \tilde{\varphi}_2(2-\tau)^5 + 5\tilde{\varphi}_8(2-\tau)^4$,

$\tilde{\Phi}_4(t,\tau) = \tilde{\varphi}_4(1-\tau)^5 + 5\tilde{\varphi}_7(1-\tau)^4$.

Заметим, что в силу симметрии относительно точки $t = 1/2$ справедливы соотношения $\tilde{\Phi}_1(t,\tau) = \tilde{\Phi}_4(1-t,1-\tau)$ при $0 \le \tau \le 1$ и $\tilde{\Phi}_2(t,\tau) = \tilde{\Phi}_3(1-t,1-\tau)$ при $0 \le \tau \le t$. Поэтому для вычисления интегралов в (5) достаточно исследовать поведение функций $\tilde{\Phi}_1$ и $\tilde{\Phi}_2$. Легко видеть, что $\tilde{\Phi}_1 \le 0$ и

$$32\tilde{\Phi}_2(t,\tau) = (1-t)^2\tau[5t^2(3-2t)+20t^2(3-2t)\tau+30t^2(3-2t)\tau^2 +$$

$$+ (-160t-95t^2+130t^3)\tau^3+(32+64t+26t^2-52t^3)\tau^4] \ge$$

$$\ge 5(1-t)^2t(1-t+26t^2)\tau^4 \ge 0 \ .$$

Из (5) имеем

$$|L(x)-f(x)| \le \frac{h^6}{720}\left\{\tilde{\varphi}_1[(1+t)^6-2]-6\tilde{\varphi}_5[(1+t)^5-2]+\tilde{\varphi}_2t^2-6\tilde{\varphi}_6t^5 + \right.$$

$$\left. + \tilde{\varphi}_4[(2-t)^6-2]+6\tilde{\varphi}_8[(2-t)^5-2]+ \tilde{\varphi}_3(1-t)^6+6\tilde{\varphi}_7(1-t)^5\right\}\|f^{VI}\|_\infty =$$

$$= \frac{u^2}{2880}(3+4u)h^6\|f^{VI}\|_\infty \ .$$

Теорема доказана. Очевидно, что правая часть в последнем неравенстве достигает своего максимума при $t = 1/2$. В результате получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $L(x)$ интерполирует на сетке Δ функцию $f(x) \in W^6_\infty[a,b]$, то имеет м е с т о   о ц е н к а

$$\|L(x) - f(x)\|_C \le \frac{h^6}{720\cdot 16}\|f^{VI}\|_\infty .$$

§3. Оценки погрешности интерполяции сплайнами пятой степени дефекта I

Пусть на отрезке $[a,b]$ в узлах равномерной сетки Δ заданы значения f_i $(b-a)$-периодической функции $f(x)$. Обозначим через $S(x)$ периодический сплайн пятой степени дефекта I, удовлетворяющий условиям $S(x_i)=f_i$, $i=0,1,\dots,N$. На отрезке $[x_i,x_{i+1}]$ такой сплайн записывается в виде

$$S(x) = \varphi_1(t)f_i+\varphi_2(t)f_{i+1}+\varphi_3(t)hm_i+\varphi_4(t)hm_{i+1}+ \\ + \varphi_5(t)h^2M_i+\varphi_6(t)h^2M_{i+1}, \qquad (6)$$

где $m_i=S'(x_i)$, $M_i=S''(x_i)$ и функции $\varphi_i(t)$ такие же, как в формуле (I). Известно [5], что величины m_i и M_i определяются соответственно из следующих систем уравнений:

$$\tilde{A}m = F, \quad \tilde{A}M = G , \qquad (7)$$

где

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 66 & 26 & 1 & & \dots & & 1 & 26 \\ 26 & 66 & 26 & 1 & & \dots & & 1 \\ 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & & \dots & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \dots & & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 \\ 1 & & \dots & & 1 & 26 & 66 & 26 \\ 26 & 1 & & \dots & & 1 & 26 & 66 \end{bmatrix} -$$

пятидиагональная матрица порядка $N\times N$, а m, M, F и G – вектор-столбцы соответственно с элементами $m_i, M_i, F_i = 5(f_{i+2}+10f_{i+1}-10f_{i-1}-f_{i-2})/h$, $G_i=20(f_{i+2}+2f_{i+1}-6f_i+2f_{i-1}+f_{i-2})/h^2$. Кроме представления (6), для $S(x)$ мы будем использовать также формулу

$$S(x) = \tilde{\varphi}_1(t)f_{i-1}+\tilde{\varphi}_2(t)f_i+\tilde{\varphi}_3(t)f_{i+1}+\tilde{\varphi}_4(t)f_{i+2} +$$
$$+\tilde{\varphi}_5(t)hm_{i-1}+\tilde{\varphi}_6(t)hm_i+\tilde{\varphi}_7(t)hm_{i+1}+\tilde{\varphi}_8(t)hm_{i+2}, \qquad (8)$$

которая получается из (6), если учесть соотношения

$$16hM_i=3m_{i-1}-33m_i-29m_{i+1}-m_{i+2}+5(3f_{i-1}-17f_i+13f_{i+1}+f_{i+2})/h ,$$
$$16hM_{i+1}=m_{i-1}+29m_i+33m_{i+1}-3m_{i+2}+5(f_{i-1}+13f_i-17f_{i+1}+3f_{i+2})/h ,$$

вытекающие из условий непрерывности $S'''(x)$ и $S^{IV}(x)$ в узлах сетки Δ . Из (7) получаем $\tilde{A}d=\tilde{F}$, $\tilde{A}g=\tilde{G}$, где $d=m-f'$, $g=M-f''$, $\tilde{F} = F-\tilde{A}f'$, $\tilde{G}=G-\tilde{A}f''$, f',f'' – вектор-столбцы с элементами f'_i и f''_i. Полученные системы позволяют получить оценки погрешности интерполяции первой и второй производной функции в узлах сетки. А именно $\|d\| \le \|\tilde{A}^{-1}\|\cdot\|\tilde{F}\|$, $\|g\| \le \|\tilde{A}^{-1}\|\cdot\|\tilde{G}\|$. Здесь мы обозначаем $\|\alpha\| = \|\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_N\}^T\| = \max\limits_i|\alpha_i|$ и $\|\tilde{A}\| = \|[a_{ij}]_{i,j=1,N}\| = \max\limits_i \sum\limits_j |a_{ij}|$.

ЛЕММА I. Если $S(x)$ интерполирует функцию $f(x)\in W^6_\infty$, то справедливы оценки

$$|m_i - f'_i| \le \frac{h^5}{240}\|f^{VI}\|_\infty , \quad i=0,1,\dots,N, \qquad (9)$$

$$|M_i - f''_i| \le \frac{h^4}{72}\|f^{VI}\|_\infty , \quad i=0,1,\dots,N. \qquad (10)$$

Постоянную $\frac{1}{240}$ в оценке (9) уменьшить нельзя.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для нахождения требуемых оценок достаточно оценить $|\tilde{F}_i|$ и $|\tilde{G}_i|$. В результате разложения $\tilde{F}_i$ по формуле Тейлора имеем

$$\tilde{F}_i = \frac{1}{24}\left\{\int\limits_{x_{i-2}}^{x_{i-1}} [(x_{i-2}-v)^5/h + (x_{i-2}-v)^4]f^{VI}(v)dv + \right.$$

$$+\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} [(x_{i-2}-v)^5/h+(x_{i-2}-v)^4+10(x_{i-1}-v)^5/h+26(x_{i-1}-v)^4]f^{VI}(v)dv +$$

$$+\int_{x_i}^{x_{i+1}} [10(x_{i+1}-v)^5/h-26(x_{i+1}-v)^4+(x_{i+2}-v)^5/h-(x_{i+2}-v)^4]f^{VI}(v)dv+$$

$$\left.+\int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}} [(x_{i+2}-v)^5/h - (x_{i+2}-v)^4]f^{VI}(v)dv \right\} .$$

Выполняя несложные преобразования, находим

$$|\tilde F_i|\le \frac{h^5}{12}\left[\int_0^1 |-\tau^5+\tau^4|d\tau+\int_0^1 |10\tau^5-26\tau^4+(1+\tau)^5-(1+\tau)^4|d\tau\right]\|f^{VI}\|_\infty .$$

Отсюда

$$|\tilde F_i| \le \frac{h^5}{15}\|f^{VI}\|_\infty .$$

Учитывая, что $\|\tilde A^{-1}\| \le 1/16$ [6], получаем

$$|m_i-f_i'| \le \frac{h^5}{240}\|f^{VI}\|_\infty .$$

Из результатов, приведенных в [2, с.213], легко вытекает неулучшаемость оценки (9). Аналогичным образом из системы для величин $\tilde G_i$ имеем

$$|\tilde G_i|\le \frac{h^4}{3}\left\{\int_0^1 |\tau^5-\tau^3|d\tau+\int_0^1 |(1+\tau)^5-(1+\tau)^3+2\tau^5-26\tau^3|d\tau\right\}\|f^{VI}\|_\infty \le$$

$$\le \frac{2}{9} h^4\|f^{VI}\|_\infty .$$

Откуда $|M_i- f_i''| \le \frac{h^4}{72}\|f^{VI}\|_\infty$.

ТЕОРЕМА 3. Если $S(x)$ интерполирует функцию $f(x)\in W^6_\infty[a,b]$, то имеют место следующие оценки

$$\|S^{(r)}(x)-f^{(r)}(x)\|_\infty \le \tilde K_r h^{(6-r)}\|f^{VI}\|_\infty ,\ r = 0,1,\dots, 5,$$

где $\tilde K_0=\frac{81}{720\cdot 64}$, $\tilde K_1 \approx 0{,}005024$, $\tilde K_2 \approx 0{,}030211$, $\tilde K_3 =\frac{51}{120}$, $\tilde K_4= \frac{73}{30}$, $\tilde K_5 = \frac{31}{6}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем тождество

$$\tilde{R}(x) \equiv S(x)-f(x)=[S(x)-H(x)]+[H(x)-f(x)] \quad . \tag{11}$$

Оценки величины $|H(x)-f(x)|$ и ее производных приведены в предыдущем параграфе. Кроме того,

$$|S(x)-H(x)| \le hu(1+u)\max_i |m_i-f_i'|+\frac{h^2}{2} u^2\max_i |M_i-f_i''| \ .$$

Следовательно,

$$|\tilde{R}(x)| \le \frac{h^6}{720}[u^3+3u(1+u)+5u^2]\,\|f^{VI}\|_\infty \le \tilde{K}_0 h^6\|f^{VI}\|_\infty \ . \tag{12}$$

Величина $\tilde{K}_0$ в (12) несколько превышает известную [2] постоянную в точной оценке, которая равна $\dfrac{61}{720\cdot 64}$. Анализ правой части неравенства (12) показывает, что такую постоянную можно иметь только в том случае, если $\|M-f''\| = 0$. Это означает, что даже при известной точной оценке величины $\|M-f''\|$, константа в которой, конечно, отлична от нуля, мы не смогли бы получить точную оценку для $\tilde{R}(x)$ с помощью рассмотренного метода. Дифференцируя (11), получаем

$$|R'(x)| \le |H'(x)-f'(x)|+[(1-t)^2(1+5t)\,|1-3t|+$$
$$+\ t^2(6-5t)\,|2-3t|\,]\max_i|m_i-f_i'| +$$
$$+\frac{h}{2}\,[u(1-t)\,|2-5t|+ ut|3-5t|\,]\ \max_i|M_i-f_i''| \ .$$

Отсюда при $t\in[0,1/3]$ имеем

$$|R'(x)| \le \frac{h^5}{720}(1-2t)(3u^2+16u+3)\,\|f^{VI}\|_\infty \le \tilde{K}_1 h^5\|f^{VI}\|_\infty \ .$$

Максимум достигается при $t = (3 -\sqrt{63 - 6\sqrt{93}})/6$. На отрезке $t\in[1/3,2/5]$ имеем

$$|R'(x)| < \|H'(x)-f'(x)\|_\infty+ |S'(x)-H'(x)| = [K_1+\eta(t)]h^5\|f^{VI}\|_\infty \ ,$$

где $\eta(t)= [90u^2+10u(1-2t)-3]/720$. В силу возрастания функции $\eta(t)$ на отрезке $t\in[1/3,2/5]$ имеем

$$K_1+ \eta(t) \le K_1+ \eta(2/5) \approx 0{,}003775 < \tilde{K}_1 .$$

При $t \in [2/5, 1/2]$ получаем

$$|R'(x)| < \|H'(x)-f'(x)\|_C + |S'(x)-H'(x)| = [K_1 + \xi(t)]h^5 \|f^{V\,I}\|_\infty ,$$

где $\xi(t) = [90u^2 - 10u(1-5u) - 3]/720$.

В силу убывания функции $\xi(t)$ на отрезке $t \in [2/5, 1/2]$ имеем $K_1 + \xi(t) \le K_1 + \xi(2/5) \approx 0{,}003745 < \tilde{K}_1$, что и доказывает теорему при $r = 1$. Для остальных $r = 2,3,4,5$ оценки находятся аналогично. Опуская ввиду громоздкости формулы поточечной оценки, запишем только точки, в которых достигаются $\tilde{K}_r$. При $r = 2$ $t = (7-\sqrt{14})/14$, при $r = 3,4,5$ $t = 0$. Теорема доказана.

Полученные оценки не являются точными. Одной из причин этого является то, что при их выводе мы использовали оценки для $|M_i - f''_i|$. Этот недостаток устраняется, если воспользоваться эрмитовыми сплайнами класса C^1 вместо сплайна $H(x)$.

ТЕОРЕМА 4. Если $S(x)$ интерполирует функцию $f(x) \in W^6_\infty[a,b]$, то имеет место следующая оценка

$$\|S(x)-f(x)\|_C \le \frac{h^6}{720} \|f^{V\,I}\|_\infty .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем тождество $S(x) - f(x) = [S(x) - L(x)] + [L(x) - f(x)]$. Оценка величины $[L(x) - f(x)]$ получена в §2. Учитывая (8), имеем

$$|S(x)-L(x)| \le h[\,|\tilde{\varphi}_5(t)|\cdot|m_{i-1}-f'_{i-1}| + |\tilde{\varphi}_6(t)|\cdot|m_i - f'_i| +$$

$$+ |\tilde{\varphi}_7(t)|\cdot|m_{i+1}-f'_{i+1}| + |\tilde{\varphi}_8(t)|\cdot|m_{i+2}-f'_{i+2}|] \le h[u^2(3-2t)/32 +$$

$$+ u(1-t)^2(1+3t) - u^2(33-62t)/32| + |-ut^2(4-3t) - u^2(29-62t)/32| +$$

$$+ u^2(1+2t)/32] \max_i |m_i - f'_i| \le \frac{h^6}{240} u(1+u) \|f^{V\,I}\|_\infty .$$

Максимум достигается в точке $t = 1/2$. Учитывая теперь следствие 2, получаем требуемый результат.

Как следует из теоремы 4, точная оценка и в этом случае не получается, хотя она лучше оценки из теоремы 3 и очень близка к точной. Отметим, что найденные нами постоянные $\tilde{K}_r$, $r = 2,3,4,5$, в теореме 3 существенно лучше известных в литературе. Так, в [3] приведены значения $\tilde{K}_2 = \frac{99}{4}, \tilde{K}_3 = 33,\ \tilde{K}_4 = \frac{99}{2},\ \tilde{K}_5{}' = \frac{33}{2}$.

В заключение автор выражает благодарность В.Л.Мирошниченко за руководство работой.

Литература

1. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. -М.: Наука, 1980. - 352 с.

2. КОРНЕЙЧУК Н.П. Сплайны в теории приближений. -М.: Наука, 1985. - 350 с.

3. ДУЙСЕКОВ А.К. Интерполирование сплайн-функциями пятой степени дефекта 1 с равноудаленными узлами. -Изв. АН Каз.ССР, серия физ.-мат., 1974, №5, с.28-33.

4. BIRKHOFF G., PRIVER A. Hermite interpolation error for derivatives.-J.Math.Physics,1967,v.46,N 4,p.440-447.

5. FYFE D.J. Linear dependence relations connecting equal interval N-th degree splines and their derivatives.-J.Inst.Math.Applys,1971,v.7,p.398-406.

6. ALBASINY E.L., HOSKINS W.D. Explicit error bounds for periodic splines of odd order on a uniform mesh. - J.Inst.Math.Applys,1973,v.12, N 3,p.303-318.

Поступила в ред.-изд.отд.
14 мая 1986 года