СПЛАЙНЫ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ
(Вычислительные системы)
1986 год Выпуск 115

УДК 519.652.3

О ПОГРЕШНОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ЛОКАЛЬНЫМИ КУБИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ

В.М.Гамидов

Для построения эрмитова кубического сплайна необходимо задать в узлах сетки Δ: $a=x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N = b$ значения интерполируемой функции f_i и ее производной f_i'. Как правило, на практике последние неизвестны. Наиболее простым выходом из этой ситуации является замена точных значений f_i' некоторыми разностными аппроксимациями $\tilde{f}_i'$. Следуя [I], положим:

$$\tilde{f}_i' = \lambda_i \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} + \mu_i \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{1}$$

$$\tilde{f}_0' = (1+\mu_1)(f_1 - f_0)/h_0 - \mu_1 (f_2 - f_1)/h_1, \tag{2}$$

$$\tilde{f}_N' = (1+\lambda_{N-1})(f_N - f_{N-1})/h_{N-1} - \lambda_N (f_{N-1} - f_{N-2})/h_{N-2}, \tag{3}$$

где $\mu_i = h_{i-1}/(h_i + h_{i-1})$, $\lambda_i = 1 - \mu_i$, $h_i = x_{i+1} - x_i$.

При такой аппроксимации производных в [I] получены оценки точности интерполяции для промежутка $[x_1, x_{N-1}]$ в зависимости от гладкости $f(x)$. Эти оценки точны по порядку, но в большинстве случаев константы в них не являются точными, кроме того, отсутствуют оценки для промежутков $[x_0, x_1]$ и $[x_{N-1}, x_N]$. В данной работе выводятся точные по константе оценки погрешности интерполяции как для промежутка $[x_1, x_{N-1}]$, так и для крайних отрезков $[x_0, x_1]$ и $[x_{N-1}, x_N]$, а также даны поточечные оценки погрешности. Наряду с общим случаем неравномерной сетки отдельно получены оценки для равномерной сетки.

В дальнейшем используются обозначения, принятые в [I]. Интерполяционный эрмитов кубический сплайн $\tilde{S}_3(x)$, построенный по значениям $f_i, \tilde{f}_i'$, записывается в виде:

$$\tilde{S}_3(x) = f_i\varphi_1+f_{i+1}\varphi_2+h_i\tilde{f}'_i\varphi_3+h_i f'_{i+1}\varphi_4, \quad x \in [x_i, x_{i+1}],$$

где

$$\varphi_1 = (1-t)^2(1+2t), \quad \varphi_2 = t^2(3-2t),$$

$$\varphi_3 = (1-t)u, \quad \varphi_4 = -tu, \quad u = t(1-t),$$

$$h_i = x_{i+1}-x_i, \quad t = (x-x_i)/h_i.$$

Обозначим: $\omega_i(f) = \max\limits_{x',x''\in[x_i,x_{i+1}]} |f(x'')-f(x')|,$

$$\omega(f) = \max_{0\le i\le N-1} \omega_i(f),$$

$$H = \max_i h_i, \quad \|f\|_\infty = \|f\|_{L_\infty[a,b]}.$$

Рассмотрим погрешность интерполяции $R(x) = \tilde{S}_3(x) - f(x)$. В случае аппроксимации производных по формуле (I) имеем:

$$R(x) = f_i(\varphi_1-\mu_i\varphi_3+\lambda_i\frac{h_i}{h_{i-1}}\varphi_3-\lambda_{i+1}\varphi_4) + f_{i+1}(\varphi_2+\mu_i\varphi_3 -$$

$$-\mu_{i+1}\frac{h_i}{h_{i+1}}\varphi_4+\lambda_{i+1}\varphi_4)-f_{i-1}\lambda_i\frac{h_i}{h_{i-1}}\varphi_3+f_{i+2}\mu_{i+1}\frac{h_i}{h_{i+1}}\varphi_4 - f(x),$$

$$x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 1,\dots,N-2. \tag{4}$$

Для промежутка $[x_0, x_1]$ получаем:

$$R(x) = R_0(x) = f_0[\varphi_1-(1+\mu_1)\varphi_3-\lambda_1\varphi_4]+f_1[\varphi_2+(1+\mu_1)\varphi_3+\lambda_1\varphi_4 +$$

$$+ \mu_1\frac{h_0}{h_1}(\varphi_3-\varphi_4)] + f_2\mu_1\frac{h_0}{h_1}(\varphi_4-\varphi_3)-f(x), \quad x\in[x_0,x_1]. \tag{5}$$

Естественно, для $x\in[x_{N-1},x_N]$ оценка будет такой же, как и для $x\in[x_0, x_1]$, поэтому можно ограничиться рассмотрением промежутка $[x_0,x_1]$.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Если $f(x) \in C^n[a,b]$, $n = 1,2$, то

$$|\tilde{S}_3^{(r)}(x)-f^{(r)}(x)| \le K_{n,r}\,\omega(f^{(n)}), \quad r \le n;$$

если $f(x) \in W^n_\infty[a,b]$, $n=1,2,3$; то

$$|\tilde{S}_3^{(r)}(x) - f^{(r)}(x)| \le \tilde{K}_{n,r} H^{n-r} \| f^{(n)} \|_\infty , \quad r < n,$$

где постоянные $\overline{K}_{n,r}$ и $\tilde{K}_{n,r}$ для неравномерной и равномерной сеток при $x \in [x_1, x_{N-1}]$ даны в таблицах I и 3 соответственно, а при $x \in [x_0, x_1] \cup [x_{N-1}, x_N]$ соответственно в таблицах 2 и 4 ($A = (14\sqrt{7} - 20)/27 \approx 0.63113$, $B = (13\sqrt{13} - 35)/27 \approx 0.43971$, $D = 1 - 3/4 \cos^{-2}(\pi/9) \approx 0.15064$)). Все постоянные $K_{n,r}$ и $\tilde{K}_{n,r}$ точные.

Таблица I

n	r: Неравномерная сетка			Равномерная сетка		
	0	I	2	0	I	2
I	5/8	2	-	7/I6	3/2	-
2	I7/I28	I/2	5	I7/I28	I/2	I9/6

Таблица 2

n	r: Неравномерная сетка			Равномерная сетка		
	0	I	2	0	I	2
I	A	3	-	B	2	-
2	D	7/I2	2	D	7/I2	3/2

Таблица 3

n	r: Неравномерная сетка			Равномерная сетка		
	0	I	2	0	I	2
I	3/4	-	-	5/8	-	-
2	9/64	I/2	-	9/64	I/2	-
3	9/I92	I/6	I	9/I92	I/6	I

Таблица 4

n	r					
	Неравномерная сетка			Равномерная сетка		
	0	I	2	0	I	2
I	$4\sqrt{3}/9$	-	-	A	-	-
2	D	2/3	-	D	2/3	-
3	$\sqrt{3}/27$	I/3	I	$\sqrt{3}/27$	I/3	I

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим методику получения оценок для локальных сплайнов, описанную в [I,гл.2]. Мы дадим подробное доказательство только для функций из классов $W^2_\infty[a,b]$ и $C^2[a,b]$. В других классах техника доказательства аналогичная, поэтому для них приводятся только итоговые выражения, максимум которых дает искомые константы.

Вначале рассмотрим случай, когда $f(x)\in W^2_\infty[a,b]$, $x\in[x_1,x_{N-1}]$. Получим интегральное представление остаточного члена $R(x)$. Для этого в формуле (4) величины $f_i, f_{i+1}, f_{i-1}, f_{i+2}$ разложим по формуле Тейлора в точке $x = x_i + th_i$ с остаточным членом в интегральном виде. В результате при $x\in[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1,2,\dots,N-2$, получаем

$$R(x)=\int_{x_i}^{x}\{(t-1)[1+\lambda_i t-t^2(\lambda_i+\mu_{i+1})](x_i-v)-h_i\lambda_i u(1-t)\}f''(v)dv +$$

$$+\int_{x}^{x_{i+1}}\{[1+(t-1)(1+\lambda_i t)-t^2(\lambda_i+\mu_{i+1})](x_{i+1}-v)-h_i\mu_{i+1}tu\}\, f''(v)dv +$$

$$+\int_{x_{i-1}}^{x_i}\lambda_i\frac{h_i}{h_{i-1}}u(1-t)(x_{i-1}-v)f''(v)dv-\int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}}\mu_{i+1}\frac{h_i}{h_{i+1}}tu(x_{i+2}-v)f''(v)dv.$$

В первом и втором интегралах сделаем замену переменной интегрирования $v-x_i = \tau h_i$, а в третьем и четвертом интегралах $v-x_{i-1} = \tau h_{i-1}$ и $v-x_{i+1}=\tau h_{i+1}$ соответственно. Тогда, учитывая, что $t'_x = 1/h_i$, получаем:

$$R^{(n)}(x) = h_i^{2-n}\Big[\int_0^t \psi_1^{(n)}(t,\tau) f''(x_i+\tau h_i)\,d\tau + \int_t^1 \psi_2^{(n)}(t,\tau) f''(x_i+\tau h_i)\,d\tau +$$

$$+ \int_0^1 \psi_3^{(n)}(t,\tau) f''(x_{i-1}+\tau h_{i-1})\,d\tau + \int_0^1 \psi_4^{(n)}(t,\tau) f''(x_{i+1}+\tau h_{i+1})\,d\tau\Big],$$

$$n = 0,1, \tag{6}$$

где

$$\psi_1(t,\tau) = (1-t)[\tau(1-t^2\mu_{i+1}) - (1-\tau)u\lambda_i],$$

$$\psi_2(t,\tau) = t[(1-(1-t)^2\lambda_i(1-\tau) - \tau u\mu_{i+1}],$$

$$\psi_3(t,\tau) = -u(1-t)\mu_i\tau,$$

$$\psi_4(t,\tau) = tu.\,\lambda_{i+1}(\tau-1),$$

$$\psi_i^{(n)}(t,\tau) = \frac{\partial^n \psi_i}{\partial t^n}, \quad i=1,2,3,4; \quad n=0,1.$$

Применяя неравенство Гёльдера, имеем:

$$|R^{(n)}(x)| \le h_i^{2-n}\|f''\|_\infty\Big[\int_0^t |\psi_1^{(n)}(t,\tau)|\,d\tau + \int_t^1 |\psi_2^{(n)}(t,\tau)|\,d\tau +$$

$$+ \int_0^1 |\psi_3^{(n)}(t,\tau)|\,d\tau + \int_0^1 |\psi_4^{(n)}(t,\tau)|\,d\tau\Big], \quad n=0,1. \tag{7}$$

Так как функции $\psi_3(t,\tau)$ и $\psi_4(t,\tau)$ знакопостоянны при $\tau \in [0,1]$, то

$$\int_0^1 |\psi_3(t,\tau)|\,d\tau = u(1-t)\mu_i/2, \quad \int_0^1 |\psi_4(t,\tau)|\,d\tau = tu\lambda_{i+1}/2.$$

Функция $\psi_1(t,\tau)$ меняет знак в точке $\tau = \tau_1^* = \lambda_i u/(1+u\lambda_i - t^2\mu_{i+1})$, причем $\tau_1^* \in [0,t]$. Следовательно,

$$\int |\psi_1| d\tau = -\int_0^{\tau_1^*} \psi_1 d\tau + \int_{\tau_1^*}^{t} \psi_1 d\tau = u\left\{ \frac{u(1-t)\lambda_i^2}{1+u\lambda_i - t^2\mu_{i+1}} + \right.$$

$$\left. + [t(1-t^2\mu_{i+1}) - u(2-t)\lambda_i]/2 \right\}.$$

Функция $\psi_2(t,\tau)$ меняет знак в точке $\tau = \tau_2^* = [1-(1-t)^2\lambda_i]/[1 + u\mu_{i+1} - (1-t)^2\lambda_i]$. Поэтому

$$\int_0^1 |\psi_2| d\tau = \frac{t[1-(1-t)^2\lambda_i]^2}{1-(1-t)^2\lambda_i + u\mu_{i+1}} + t[(1-(1-t)^2\lambda_i)(t^2-2t-1) +$$

$$+ u(1+t^2)\mu_{i+1}]/2.$$

В итоге из (7) находим

$$|R(x)| \le h_i^2 \|f''\|_\infty u[1-(1-t)\lambda_i - t\mu_{i+1} + \frac{ut\mu_{i+1}^2}{1+u\mu_{i+1}-(1-t)^2\lambda_i} +$$

$$+ \frac{u(1-t)\lambda_i^2}{1+u\lambda_i - t^2\mu_{i+1}} \; . \tag{8}$$

Теперь для получения требуемой оценки нужно найти максимум правой части этого неравенства при условиях $0 \le h_j \le H$, $j = i-1, i, i+1$; $t \in [0,1]$. Сделаем замену $h_{i-1} = \alpha H$, $h_i = \beta H$, $h_{i+1} = \gamma H$, $0 \le \alpha, \beta, \gamma \le 1$. Тогда

$$|R(x)| \le H^2 \|f''\|_\infty \, \varphi(t, \alpha, \beta, \gamma), \tag{9}$$

где

$$\varphi(t,\alpha,\beta,\gamma) = \beta^2 u\left\{ 1-\beta\left[\frac{1-t}{\beta+\alpha} + \frac{t}{\beta+\gamma}\right] + \beta^2 u\left[\frac{t}{(\beta+\gamma)^2}\left(1 + \frac{u\beta}{\beta+\gamma} - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \frac{(1-t)^2\beta}{\beta+\alpha}\right)^{-1} + \frac{1-t}{(\beta+\alpha)^2}\left(1 + \frac{u\beta}{\beta+\alpha} - \frac{t^2\beta}{\beta+\gamma}\right)^{-1}\right]\right\}.$$

Имеем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = \frac{\beta^3 u}{(\beta+\alpha)^2 A\cdot B}\left[A(1-t)[(\beta+\alpha)(\beta+\gamma)-t^2\beta(\beta+\alpha)]^2+B\beta^2u^2(1-t)(\beta+\alpha)^2\right] \geq 0,$$

где

$$A = [(\beta+\alpha)(\beta+\gamma) + u\beta(\beta+\alpha) - (1-t)^2\beta(\beta+\gamma)]^2,$$

$$B = [(\beta+\alpha)(\beta+\gamma) + u\beta(\beta+\gamma) - t^2\beta(\beta+\alpha)]^2.$$

Кроме того,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma} = \frac{\beta^3 u}{(\beta+\gamma)^2 A\cdot B}\left[Bt((\beta+\gamma)(\beta+\alpha)-(1-t)^2\beta(\beta+\gamma))^2 + Au^2t\beta^2(\beta+\gamma)^2\right] \geq 0.$$

Поэтому $\varphi(t,\alpha,\beta,\gamma) \leq \varphi(t,1,\beta,1)$. Далее,

$$\varphi(t,1,\beta,1) - \varphi(t,1,1,1) =$$

$$= \frac{u(\beta-1)}{2(\beta+1)}\left[u\,\frac{t(1-2t)\beta[\beta(\beta+1)+\beta^2+\beta+1]+(2\beta+1)(2\beta^2+\beta+1)}{(1+\beta+t(1-2t)\beta)(2+t(1-2t))} + 2\beta+1\right] \leq 0.$$

Следовательно,

$$\varphi(t,\alpha,\beta,\gamma) \leq \varphi(t,1,1,1) = \frac{u(1+4u(1+u))}{2+u(7+4u)} \leq \varphi(\tfrac{1}{2},1,1,1) = \frac{9}{64},$$

что вместе с (9) дает нужную оценку. Так как условие $\alpha = \beta = \gamma = 1$ соответствует равномерной сетке, то найденная постоянная относится и к равномерной сетке.

Получим теперь оценку для $|R'(x)|$. Имеем

$$\psi_1' = (1-t)(3t-1)(1-\tau)\lambda_i + (3t-2)t\mu_{i+1}\tau - \tau, \quad \psi_2' = \psi_1' + 1,$$

$$\psi_3' = (t-1)(1-3t)(1-\lambda_i)\tau, \quad \psi_4' = t(2-3t)(1-\mu_{i+1})(\tau-1).$$

Пусть $t \in [0,1/3]$. Тогда $\psi_1'(t,\tau) \leq 0$, $\psi_3'(t,\tau) \leq 0$, $\psi_4'(t,\tau) \leq 0$, а функция $\psi_2'(t,\tau)$ меняет знак при $t = \tau_3^* = (1+(1-t)(3t-1)\lambda_i)/(1+(1-t)(3t-1)\lambda_i - (3t-2)t\mu_{i+1})$.

После вычисления интегралов в (7) и замены переменных, как в случае вычисления $|R(x)|$, имеем

$$|R'(x)| \leq H\|f''\|_\infty \varphi(t,\alpha,\beta,\gamma) \leq \frac{1}{2}H\|f''\|_\infty, \quad x \in [x_i, x_i+h_i/3], \qquad (10)$$

так как здесь

$$\varphi(t,\alpha,\beta,\gamma) = \frac{\beta\{(1-t)[1+(1-t)(3t-1)\beta/(\beta+\alpha)] + t^2(3t-2)\beta/(\beta+\gamma)\}^2}{1+(1-t)(3t-1)\beta/(\beta+\alpha)-t(3t-2)\beta/(\beta+\gamma)},$$

$$0 \le \alpha,\beta,\gamma = 1,$$

и легко видеть, что

$$\varphi(t,\alpha,\beta,\gamma) \le \varphi(t,1,1,1) = [1-3u(1+2t)/(1+6u)]/2 \le 1/2.$$

Пусть $t\in[1/3,\,2/3]$. Тогда $\psi_1'(t,\tau)$ меняет знак при $\tau=\tau_4^* = (1-t)(3t-1)\lambda_1/(1+(1-t)(3t-1)\lambda_1-(3t-2)t\mu_{1+1})$, а $\psi_2'(t,\tau)$ при $\tau=\tau_3^*$; $\psi_3'(t,\tau)\ge 0$, $\psi_4'(t,\tau)\le 0$, и после соответствующих вычислений из (7) получаем

$$|R'(x)| \le H\|f''\|_\infty \psi(t,\alpha,\beta,\gamma) < \frac{1}{2}H\|f''\|_\infty,\quad x\in[x_1+h_1/3,\,x_1+2h_1/3). \tag{11}$$

Здесь

$$\psi(t,\alpha,\beta,\gamma) = \beta[(1-t)^2(3t-1)\beta/(\beta+\alpha) + t^2(3t-2)\beta/(\beta+\gamma)-t]^2/C -$$

$$- \beta t(3t-2)[\gamma/(\beta+\gamma)+\gamma\beta(1-t)(3t-1)/((\beta+\alpha)(\beta+\gamma))-(3t-2)t\beta/(\beta+\gamma)]/C,$$

$$C = 1+(1-t)(3t-1)\beta/(\beta+\alpha)-(3t-2)t\beta/(\beta+\gamma),$$

и легко видеть, что $\psi(t,\alpha,\beta,\gamma) \le \psi(t,1,1,1) < 1/2$. Так как случай $t\in[2/3,\,1]$ симметричен случаю $t\in[0,\,1/3]$, то из (10),(11) вытекает искомая оценка.

Перейдем к получению оценки для промежутка $[x_0,\,x_1]$. Повторяя проделанные выше рассуждения (разложение по формуле Тейлора, замена переменных) применительно к формуле (5), получаем:

$$R_0^{(n)}(x) = h_0^{2-n}\left\{\int_0^t \psi_5^{(n)}(t,\tau)f''(x_0+\tau h_0)\,d\tau+\int_t^1\psi_6^{(n)}(t,\tau)f''(x_0+\tau h_0)\,d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_0^1\psi_7^{(n)}(t,\tau)f''(x_1+\tau h_1)\,d\tau\right\},\quad n = 0,1, \tag{12}$$

где

$$\psi_5 = (1-t)(1-\mu_1 t)\tau,$$

$$\psi_6 = t(1+(1-t)\mu_1)(1-\tau)-\mu_1 u,$$

$$\psi_7 = u\lambda_1(1-\tau).$$

Следовательно,

$$|R_0^{(n)}(x)| \le h_0^{2-n}\|f''\|_\infty \left\{ \int_0^t |\phi_5^{(n)}|d\tau + \int_t^1 |\phi_6^{(n)}|d\tau + \int_0^1 |\phi_7^{(n)}|d\tau \right\},\ n=0,1. \quad (13)$$

Учитывая, что $\phi_5^{\,\prime} \ge 0$, $\phi_7 \le 0$, и тот факт, что $\phi_6(t,\tau)$ меняет знак при $\tau = \tau_5^* = 1/(1+(1-t)\mu_1)$, $\tau_5^* \in [t,1]$, из (13) находим

$$|R_0(x)| \le h_0^2 \|f''\|_\infty \left\{ \int_0^t |\phi_5|d\tau + \int_t^{\tau_5^*} |\phi_6|d\tau + \int_{\tau_5^*}^1 |\phi_6|d\tau + \int_0^1 |\phi_7|d\tau \right\} =$$

$$= h_0^2 \|f''\|_\infty \frac{u(1-t\mu_1)}{1+(1-t)\mu_1} \le H^2 \|f''\|_\infty \frac{(2-t)u}{3-t}. \quad (14)$$

Максимум правой части достигается при $t = 4\sin^2(\pi/9) \approx 0{,}46805$ и равен $1-3/4\cos^{-2}(\pi/9) \approx 0{,}15065$.

Получим оценку для $|R_0'(x)|$. Имеем

$$\phi_5' = -\tau(1+\mu_1(1-2t)), \quad \phi_6' = 1-\phi_5', \quad \phi_7' = \lambda_1(1-\tau)(2t-1).$$

При $t \in [0,1/2]$ $\phi_5' \le 0$, $\phi_7' \le 0$; ϕ_6' меняет знак при $\tau = \tau_6^* = [1+\mu_1(1-2t)]^{-1}$. При $t \in [1/2, 1]$ функции ϕ_5', ϕ_6', ϕ_7' знакопостоянные. Вычисляя интегралы в (13), имеем

$$|R_0'(x)| \le \|f''\|_\infty h_0 [1-t(1+\mu_1(1-2t))]^2 [1+\mu_1(1-2t)]^{-1},$$

$$x \in [x_0, x_0+h_0/2]; \quad (15)$$

$$|R_0'(x)| \le \|f''\|_\infty h_0 t^2 (1+\mu_1(1-2t)),\ x \in [x_0+h_0/2, x_1]. \quad (16)$$

В обоих случаях максимум достигается при $h_0 = h_1 = H$, и, следовательно,

$$|R_0'(x)| \le \frac{1}{2} H \|f''\|_\infty \frac{[2-t(3-2t)]^2}{3-2t} \le \frac{2}{3} H \|f''\|_\infty, \quad x \in [x_0, x_0+h_0/2],$$

$$|R_0'(x)| \le \frac{1}{2} H \|f''\|_\infty t^2(3-2t) \le \frac{1}{2} H \|f''\|_\infty, \quad x \in [x_0+h_0/2, x_1].$$

Объединяя эти результаты, получаем требуемую оценку. Тем самым закончено рассмотрение случая $f(x) \in W_\infty^2[a,b]$.

Выведем оценки величин $|R^{(n)}(x)|$, $n=0,1,2$, когда $f(x)\in C^2[a,b]$. Пусть $x\in[x_1, x_{N-1}]$. Тогда, учитывая свойства функций $\psi_i(t,\tau)$, $i=1,2,3,4$, и применяя теорему о среднем для интегралов, из (6) получаем

$$R(x) = h_i^2\{-f''(\xi)J_1 + f''(\eta)\tilde{J}_1 + f''(\xi_1)J_2 - f''(\eta_1)\tilde{J}_2 - f''(\nu)J_3 - f''(\theta)J_4\}, \tag{17}$$

где

$$J_1 = -\int_0^{\tau_1^*}\psi_1 d\tau,\quad \tilde{J}_1 = \int_{\tau_1^*}^{t}\psi_1 d\tau,\quad J_2 = \int_t^{\tau_2^*}\psi_2 d\tau,$$

$$\tilde{J}_2 = -\int_{\tau_2^*}^{1}\psi_2 d\tau,\quad J_3 = -\int_0^1\psi_3 d\tau,\quad J_4 = -\int_0^1\psi_4 d\tau,$$

$$\xi,\eta,\xi_1,\eta_1\in[x_i,x_{i+1}],\ \nu\in[x_{i-1},x_i],\ \theta\in[x_{i+1},x_{i+2}],$$

$$J_j \ge 0,\quad j=1,2,3,4,\quad \tilde{J}_k \ge 0,\quad k=1,2.$$

По теореме о среднем для непрерывных функций [I] имеем

$$f''(\eta)\tilde{J}_1 + f''(\xi_1)J_2 = (\tilde{J}_1+J_2)f''(\tilde{\eta}),$$

$$-f''(\xi)J_1 - f''(\eta_1)\tilde{J}_2 = -(J_1+\tilde{J}_2)f''(\tilde{\xi}),\quad \tilde{\eta},\tilde{\xi}\in[x_i,x_{i+1}].$$

Учитывая, что $\tilde{J}_1 + J_2 - J_1 - \tilde{J}_2 = J_3+J_4$, из (I7) находим

$$R(x) = h_i^2\{(J_1+\tilde{J}_2)(f''(\tilde{\eta})-f''(\tilde{\xi}))+J_3(f''(\tilde{\eta})-f''(\nu))+J_4(f''(\tilde{\eta})-f''(\theta))\}.$$

Отсюда

$$|R(x)| \le h_i^2(J_1+\tilde{J}_2+2J_3+2J_4)\omega(f'') =$$

$$= u\left[\frac{u(1-t)\lambda_i^2}{1+u\lambda_i-t^2\mu_{i+1}} + \frac{ut\mu_{i+1}^2}{1+u\mu_{i+1}-(1-t)^2\lambda_i} + 2(1-(1-t)\lambda_i-t\mu_{i+1})\right]h_i^2\omega(f'')/2. \tag{18}$$

Нетрудно проверить, что максимум каждого из слагаемых в правой части (18) достигается при $h_{i-1} = h_i = h_{i+1} = H$. Поэтому

$$|R(x)| \le \frac{H^2}{4}\omega(f'')u\left[2 + \frac{u(1+4u)}{2+u(7+4u)}\right].$$

Здесь максимум правой части достигается при $t=1/2$. В итоге $|R(x)| \le \frac{17}{128}H^2\omega(f'')$, $x \in [x_1, x_{N-1}]$, что и требовалось показать.

Из (6) при $t \in [0, 1/3]$ получаем

$$R'(x) = h_i\{-f''(\xi)I_1+f''(\xi_1)I_2-f''(\eta_1)\tilde{I}_2-f''(\nu)I_3-f''(\theta)I_4\}, \qquad (19)$$

где

$$I_1 = -\int_0^1 \psi_1' d\tau, \qquad I_2 = \int_t^{\tau_3^*} \psi_2' d\tau \qquad \tilde{I}_2 = -\int_{\tau_3^*}^1 \psi_2' d\tau,$$

$$I_3 = -\int_0^1 \psi_3' d\tau, \qquad I_4 = -\int_0^1 \psi_4' d\tau, \quad \xi, \xi_1, \eta_1 \in [x_i, x_{i+1}],$$

$$\nu \in [x_{i-1}, x_i], \quad \theta \in [x_{i+1}, x_{i+2}], \quad I_j \ge 0, \quad j=1,2,3,4; \quad \tilde{I}_2 \ge 0.$$

Так как $-f''(\xi)I_1 - f''(\eta_1)\tilde{I}_2 = -(I_1+\tilde{I}_2)f''(\tilde{\xi})$, $\tilde{\xi} \in [x_i, x_{i+1}]$ и $I_2 = I_3 + I_4 + I_1 + \tilde{I}_2$, то из (19) вытекает

$$R'(x)=h_i\{(I_1+\tilde{I}_2)[f''(\xi_1)-f''(\tilde{\xi})]+I_3[f''(\xi_1)-f''(\nu)]+I_4[f''(\xi_1)-f''(\theta)]\}.$$

Отсюда

$$|R'(x)| \le h_i(I_1+\tilde{I}_2+2I_3+2I_4)\omega(f'') =$$

$$= h_i\{t^2g/2 + (1-t)(1-3t)(\mu_i+t\lambda_i) + t(2-3t)\lambda_{i+1} +$$

$$+ [t(3t-2)\mu_{i+1}]^2/(2g)\}\omega(f''), \qquad (20)$$

где $g = 1+(1-t)(3t-1)\lambda_i - (3t-2)t\mu_{i+1}$.

Максимальное значение правой части в (20) достигается при $h_{i-1} = h_i = h_{i+1} = H$. Поэтому

$$|R'(x)| \le \left\{2-u(1+6u) - \frac{t[1+t(4+3t(6-7t))]}{1+6u}\right\} H\omega(f'')/4 \le \frac{H}{2}\omega(f''),$$

$$x \in [x_i, x_i+h_i/3]. \qquad (21)$$

При $t \in [1/3, 2/3]$ имеем

$$R'(x) = h_i\{f''(\xi)J_1 - f''(\eta)\tilde{J}_1 + f''(\xi_1)I_2 - f''(\eta_1)\tilde{I}_2 + f''(\nu)J_3 - f''(\theta)I_4\},$$

где

$$J_1 = \int_0^{\tau_4^*} \phi_1' d\tau, \quad \tilde{J}_1 = -\int_{\tau_4^*}^{t} \phi_1' d\tau, \quad J_3 = \int_0^1 \phi_3' d\tau,$$

$$J_1, \tilde{J}_1, J_3 \geq 0, \quad \eta \in [x_i, x_{i+1}].$$

Остальные величины совпадают с соответствующими величинами из (I9). Так как

$$f''(\xi)J_1 + f''(\xi_1)I_2 = (J_1 + I_2)f''(\tilde{\xi}), \ \tilde{\xi} \in [x_i, x_{i+1}],$$

$$-f''(\eta)\tilde{J}_1 - f''(\eta_1)\tilde{I}_2 = -(\tilde{J}_1 + \tilde{I}_2)f''(\tilde{\eta}), \ \tilde{\eta} \in [x_i, x_{i+1}],$$

$$J_1 + I_2 - I_4 = \tilde{J}_1 + \tilde{I}_2 + J_3,$$

то

$$R'(x) = h_i\{(J_1 + I_2 - I_4)[f''(\tilde{\xi}) - f''(\tilde{\eta})] + J_3[f''(\nu) - f''(\tilde{\eta})] + I_4[f''(\tilde{\xi}) - f''(\theta)]\}$$

и, следовательно,

$$|R'(x)| \leq h_i(J_1 + I_2 + I_4 + 2J_3)\omega(f'') =$$

$$= h_i\{[(1 + (1-t)(3t-1)\lambda_i)^2 + ((1-t)(3t-1)\lambda_i)^2]/g + t^2 g +$$

$$+ (2-3t)t\lambda_{i+1} + 2(1-t)(3t-1)(\mu_i - t\lambda_i) - 2t\}\omega(f'')/2.$$

Максимальное значение правой части здесь достигается при $h_{i-1} = h_i = h_{i+1} = H$. Таким образом,

$$|R'(x)| \leq \frac{u[9u(2-u)-1]}{1+6u} H\omega(f''), \quad t \in [1/3, 2/3].$$

Максимум правой части достигается при $t = 1/2$, откуда

$$|R'(x)| \leq \frac{47}{160} H\omega(f''), \quad x \in [x_i + h_i/3, x_i + 2h_i/3]. \qquad (22)$$

Очевидно, оценка при $t\in[2/3, 1]$ будет такой же, как при $t\in[0, 1/3]$. Поэтому из (21), (22) вытекает искомый результат. Получим наконец оценку для $R''(x)$. Из (6) имеем

$$R''(x) = \int_0^1 \psi_1'' f''(x_i+\tau h_i)d\tau + \int_0^1 \psi_3'' f''(x_{i-1}+\tau h_{i-1})d\tau +$$

$$+ \int_0^1 \psi_4'' f''(x_{i+1} + \tau h_{i+1})d\tau - f''(x), \qquad (23)$$

где

$$\psi_1'' = (4-6t)(1-\tau)\lambda_i + (6t-2)\tau\mu_{i+1},$$

$$\psi_3'' = (4-6t)\tau\mu_i, \quad \psi_4'' = (2-6t)(\tau-1)\lambda_{i+1}.$$

При $t\in[0, 1/3]$ $\psi_3''(t,\tau) \geq 0$, $\psi_4''(t,\tau)\leq 0$. Функция $\psi_1''(t,\tau)$ меняет знак при $\tau = \tau_7^* = (2-3t)\lambda_i/((2-3t)\lambda_i - (3t - 1)\mu_{i+1})$. После применения теорем о среднем для интегралов и непрерывных функций из (23) получаем

$$|R''(x)| \leq \left\{(2-3t)\left[2-2\lambda_i + \frac{(2-3t)\lambda_i^2}{(2-3t)\lambda_i+(1-3t)\mu_{i+1}}\right] + \right.$$

$$\left. + (1-3t)\lambda_{i+1}\right\}\omega(f'') \leq 5\omega(f''), \ x\in[x_i, x_i+h_i/3]. \qquad (24)$$

При $t\in[1/3, 2/3]$ $\psi_1''(t,\tau) \geq 0$, $\psi_3''(t,\tau) \geq 0$, $\psi_4''(t,\tau) \geq 0$. Тогда

$$R''(x) = [(2-3t)\lambda_i+(3t-1)\mu_{i+1}][f''(\xi) - f''(x)] +$$

$$+ [(2-3t)\mu_i+(3t-1)\lambda_{i+1}][f''(\tilde\nu)-f''(x)],$$

где $\xi, x\in[x_i, x_{i+1}]$, $\tilde\nu\in[x_{i-1}, x_{i+2}]$.
Отсюда

$$|R''(x)| \leq [2-(2-3t)\lambda_i - (3t-1)\mu_{i+1}]\omega(f'') \leq 2\omega(f''),$$

$$x\in[x_i+h_i/3, x_i+2h_i/3]. \qquad (25)$$

Случай $t\in[2/3, 1]$ симметричен случаю $t\in[0, 1/3]$, следовательно, из (24), (25) находим искомую оценку. Эту оценку можно несколько улучшить для равномерной сетки. Действительно, из (23) в этом случае имеем

$$|R''(x)| \le [3(1-t)+(3t-1)^2/(1-2t)/6]\omega(f'') \le 19/6\omega(f''),$$
$$x\in[x_i, x_i+h_i/3].$$

Аналогичным образом выводятся оценки для промежутка $[x_0, x_1]$. Из (I2) получаем

$$R_0(x) = h_0^2\{f''(\xi)(J_1+J_2) - f''(\eta)(J_3+J_4)\},$$

где

$$J_1 = \int_0^t \phi_5 d\tau, \quad J_2 = \int_t^{\tau_5^*} \phi_6 d\tau, \quad J_3 = -\int_{\tau_5^*}^1 \phi_6 d\tau,$$

$$J_4 = -\int_0^1 \phi_7 d\tau, \quad \xi \in [x_0, x_1], \quad \eta \in [x_0, x_2].$$

Отсюда, учитывая, что $J_1+J_2 = J_3 + J_4$, находим

$$|R_0(x)| \le (J_1+J_2)h_0^2|f''(\xi) - f''(\eta)| \le h_0^2 \frac{u(1-\mu_1 t)}{1+\mu_1(1-t)}\omega(f'').$$

Максимум правой части находится так же, как в (I4).

Далее, при $t\in[0, 1/2]$ имеем

$$R_0'(x) = h_0\{(J_1+J_3)[f''(\eta)-f''(\xi)]+J_4[f''(\eta)-f''(\theta)]\}, \tag{26}$$

где

$$J_1 = -\int_0^t \phi_5' d\tau, \quad J_3 = -\int_{\tau_6^*}^1 \phi_6' d\tau, \quad J_4 = -\int_0^1 \phi_7' d\tau, \quad J_i \ge 0,$$

$$\eta, \xi\in [x_0, x_1], \quad \theta\in[x_1, x_2], \quad x\in[x_0, x_0+h_0/2], \quad i=1, 3, 4.$$

Отсюда

$$|R_0'(x)| \le h_0(J_1+J_3+2J_4)\,\omega(f'') =$$
$$= h_0\left\{\frac{t^2[1+\mu_1(1-2t)]^2 + \mu_1^2(1-2t)^2}{2[1+\mu_1(1-2t)]} + (1-2t)\lambda_1\right\}\omega(f'').$$

Максимум правой части достигается при $h_0 = h_1 = H$. Следовательно,

$$|R_0'(x)| \le H\left\{2-t(4-3t+2t^2) + \frac{(1-2t)^2}{3-2t}\right\}\omega(f'')/4 \le \frac{7}{12}H\omega(f''). \tag{27}$$

Для $t\in[1/2,1]$, $x\in[x_0+h_0/2,x_1]$ нетрудно получить

$$|R_0'(x)| \le t^2[1+\mu_1(1-2t)]h_0\,\omega(f'') \le H\omega(f'')/2,$$

что вместе с (27) дает требуемый результат.

Наконец, из (I2) находим

$$|R_0''(x)| = f''(\xi)\int_0^1 \psi_5''d\tau + f''(\eta)\int_0^1 \psi_7''d\tau - f''(x) =$$

$$= \mu_1 f''(\xi)+\lambda_1 f''(\eta)-f''(x) = f''(\theta)-f''(x),$$

где $\xi,\eta,\theta \in [x_0, x_2]$. Отсюда $|R_0''(x)| \le 2\omega(f'')$, что и требовалось показать. Для равномерной сетки, учитывая расположение точек ξ,η, вместо этой оценки получаем $|R_0''(x)| \le 3\omega(f'')/2$.

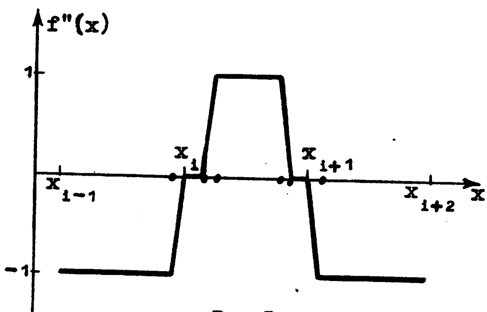

Рис.I

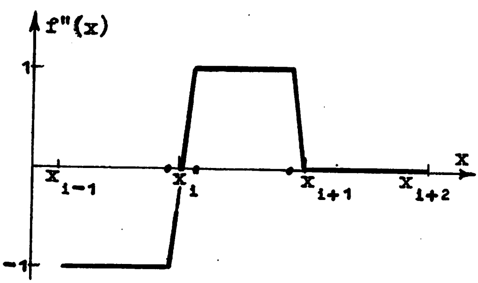

Рис.2

Нетрудно видеть, что точность постоянных в оценках для класса W^2_∞ гарантируется самой техникой их получения. Что касается класса C^2, то неулучшаемость соответствующих постоянных можно показать с помощью построения квазиэкстремальных функций [I,с.47]. Пусть сетка Δ равномерна с шагом h и $[x_i,x_{i+1}]$ – один из внутренних промежутков, т.е. $1\le i\le N-2$, а $f(x)$ такова, что ее вторая производная $f''(x)$ имеет вид, изображенный на рис.I (знаком "." помечены соответственно слева направо точки $x_i-h\varepsilon/2$, $x_i+h/8$, $x_i+h(1+\varepsilon/2)/8$, $x_i+7h(1-\varepsilon/2)/8$, $x_i+7h/8$, $x_{i+1}+h\varepsilon/2$). Тогда погрешность интерполяции для $f(x)$ в точке $x_i+h/2$ сог-

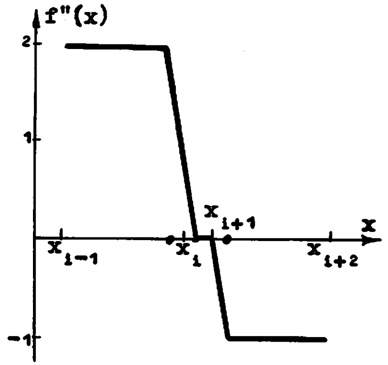

Рис.3

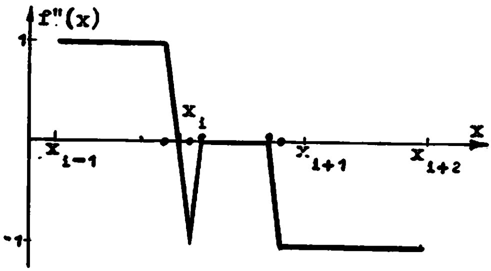

Рис.4

ласно формуле (6) равна $R(x_i+h/2) = 17/128 - \varepsilon(1+2\varepsilon)/16$, что доказывает неулучшаемость постоянной I7/I28, так как в данном случае $\omega(f") = 1$. Аналогично строятся квазиэкстремальные функции и для других оценок. На рис.2, 3, 4 изображены графики вторых производных квазиэкстремальных функций соответственно для $R'(x)$ и $R"(x)$ на неравномерной и равномерной сетках. На рис.2 $h_{i-1} = h_i = h_{i+1}$ и отмечены точки $x_i-h\varepsilon/2$, $x_i+\varepsilon h/2$, $x_i+h(1-\varepsilon/2\ )$. Для доказательства неулучшаемости нужно вычислить $R'(x_i\ )$. На рис.3 $h_{i-1}=h_{i+1} = h$, $h_i = \varepsilon$. Отмечены точки $x_i-\varepsilon h/2$, $x_i+\varepsilon/2$, $x_{i+1}+\varepsilon h/2$; вычисляется $R"(x_i + \varepsilon/2)$. На рис.4 отмечены точки $x_i-\varepsilon h/4$, $x_i + \varepsilon h/4$, $x_i+\varepsilon h/2$, $x_i+2h/3$, $x_i+(2/3 + \varepsilon/2)h$, вычисляется значение $R"(x_i + \varepsilon h/4)$. Построение квазиэкстремальных функций для оценок на промежутке $[x_0, x_1]$ затруднений не вызывает.

В заключение приведем поточечные оценки для других классов функций. После каждой оценки приводятся значения шагов сетки и значения переменной $t = t^*$, при которых достигается ее максимум.

I) $f(x) \in W^1_\infty[a, b\ ]$. Для неравномерной сетки:

$$|R(x)| \le 2h_i u[1+u(\lambda_i + \mu_{i+1})]\|f'\|_\infty \le 3/4\, H\|f'\|_\infty,$$

$$h_i = H,\ h_{i-1} = h_{i+1} = 0,\ t^* = 1/2;$$

$$|R_0(x)| \le 2h_0\ u\ (1+\mu_1(1-t))\|f'\|_\infty \le\ 4\sqrt{3}/9\ H\|f'\|_\infty,$$

$$h_0 = H,\ \ h_1 = 0,\ \ t^* = 1-\sqrt{3}/3;$$

для равномерной сетки:

$$|R(x)| \le 2Hu(1+u)\|f'\|_\infty \le 5/8\,H\ \|f'\|_\infty,\quad t^* = 1/2,$$

$$|R_0(x)| \le H\ u\ (3-t)\|f'\|_\infty \ \le (14\sqrt{7}-20)/27\ H\|f'\|_\infty,$$

$$t^* = (4-\sqrt{7})/3.$$

2) $f(x) \in C^1[a,b]$. Для неравномерной сетки:

$$|R(x)| \le h_i u[1+\lambda_i+2\mu_{i+1}t - (\lambda_i+\mu_{i+1})t^2]\omega(f') \le 5H/8\omega(f'),$$

$$h_{i-1} = h_{i+1} = 0,\ \ h_i = H,\ t^* = 1/2;$$

$$|R_0(x)| \le h_0u[1+\mu_1(2-t)]\omega(f') \le (14\sqrt{7}-20)/27H\omega(f'),$$

$$h_0 = H,\ h_1 = 0,\ t^* = (4-\sqrt{7})/3;$$

$$|R'(x)| \le [1+\lambda_i+4t(\mu_{i+1}-\lambda_i)-3t^2(2\mu_{i+1}-\lambda_i)]\omega(f') \le 2\omega(f'),$$

$$t \in [0,1/3];$$

$$|R'(x)| \le [1+2\mu_{i+1}t(2-3t)+2\lambda_i(1-t)(3t-1)]\omega(f') \le 5/3\omega(f'),$$

$$h_i = H,\ h_{i-1} = h_{i+1} = 0,\ t^* = 0,\ \ t \in [1/3,2/3];$$

$$|R_0'(x)| \le [1+2\mu_1(1-2t)]\omega(f') \le 3\omega(f'),\ t \in [0,1/2],$$

$$h_0 = H,\ h_1 = 0,\ t^* = 0;$$

$$|R_0'(x)| \le [1+2\mu_1(2t-1)]\omega(f') \le 3\omega(f'),\ t \in [1/2,1],\ t^* = 1.$$

Для равномерной сетки оценки получаются из вышеприведенных при подстановке $\lambda_i = \mu_{i+1} = 1/2$.

3) $f(x) \in W^3_\infty[a,b]$. Для произвольной сетки:

$$|R_0(x)| \le \frac{1}{6}h_0^2u[h_0(1-t)+h_1]\|f'''\|_\infty \le \sqrt{3}/27H^3\|f'''\|_\infty,$$

$$h_0 = h_1 = H,\ \ t^* = 1-\sqrt{3}/3.$$

$$|R_0'(x)| \le \frac{1}{2} h_i^2 \Big\{(1-2t)\Big[1-t-2\xi-\frac{1}{3}(1-2\mu_1\xi^3 - \frac{\lambda_1}{\mu_1})\Big] +$$

$$+ [1-3u-2(1-\xi)^3]/3\Big\}\|f'''\|_\infty \le 1/3H^2\|f'''\|_\infty,$$

$$\xi = (1 - \sqrt{(1-2t)(1-2t\mu_1)})/(1+(1-2t)\mu_1), \quad t \in [0,1/2],$$

$$t^* = 0, \quad h_0 = h_1 = H;$$

$$|R_0'(x)| \le \frac{1}{6} h_0^2[(2t-1)/\mu_1+2t-3t^2]\|f'''\|_\infty \le \frac{1}{6} H^2\|f'''\|_\infty,$$

$$t \in [1/2,1], \; h_0=h_1=H, \quad t^*=1;$$

$$|R_0''(x)| \le \frac{1}{3} h_0[1+1/\mu_1-t(3-2\mu_1 t^2)]\|f'''\|_\infty \le H\|f'''\|_\infty,$$

$$h_0 = h_1 = H, \; t^* = 0;$$

$$|R(x)| \le \frac{1}{6} h_i^3 \{u[2(1-t)(3\xi+(1-\xi)^3\lambda_i)+t(\lambda_i+1/\mu_{i+1}) +$$

$$+ (1-t)\mu_i^2/\lambda_i-\lambda_i-1] - 2(1-t)(1-\mu_{i+1}t^2)\xi^3\}\|f'''\|_\infty \le 3/64H^3\|f'''\|_\infty,$$

$$t \in [1/2,1], \; h_i=h_{i-1}=h_{i+1}=H, \; t^*=1/2,$$

$$\xi = \{\lambda_i u + \sqrt{\lambda_i^2u^2+u\mu_i(1+\lambda_i u-\mu_{i+1}t^2)}\}/(1-\lambda_i u+\mu_{i+1}t^2);$$

$$|R''(x)| \le h_i\Big\{1-2t + \frac{1}{6}\Big[(4-6t)\frac{1-2\lambda_i}{\lambda_i} + (2-6t)\frac{1-2\mu_{i+1}}{\mu_{i+1}}\Big] +$$

$$+ (\xi-t)[(4-6t)\lambda_i-2+6t] - (\xi^2-t^2)(4-6t)\lambda_i +$$

$$+\frac{1}{3}(\xi^3-t^3)[(4-6t)\lambda_i+(2-6t)\mu_{i+1}]\Big\}\|f'''\|_\infty \le H\|f'''\|_\infty,$$

$$t \in [0,1/3], \quad h_i=h_{i-1}=h_{i+1}=H, \; t^* = 0,$$

здесь

$$\xi = \{(4-6t)\lambda_i-[(4-6t)(2-6t)\lambda_i\lambda_{i+1}+(2-6t)^2\mu_{i+1}]^{1/2}\}/[(4-6t)\lambda_i +$$

$$+ (2-6t)\mu_{i+1}].$$

$$|R''(x)| \le h_i\{(2-3t)[t(\mu_i+t\lambda_i) + \mu_i^2/(3\lambda_i) + \lambda_i((1-t)^3-t^3)/3] +$$

$$+(3t-1)[t(t\mu_{i+1}-\mu_{i+1}-1) + 1+\lambda_{i+1}^2/(3\mu_{i+1}) +$$

$$+ \mu_{i+1}(t^3-(1-t)^3)/3]\}\|f'''\|_\infty \le H\|f'''\|_\infty, \quad t \in [1/3, 2/3].$$

Мы не приводим результатов для $|R'(x)|$, так как полученная в [1] оценка является точной.

Выражаю признательность В.Л.Мирошниченко за большую помощь, оказанную при выполнении настоящей работы.

Литература

1. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций.-М.: Наука, 1980. - 352 с.

Поступила в ред.-изд.отд.
2 августа 1985 года