СПЛАЙНЫ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ
(Вычислительные системы)

1986 год Выпуск 115

УДК 519.651

О КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ ПРИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ПАРАБОЛИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ НА НЕРАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ

Б.И. Квасов

В работе [1] был рассмотрен вопрос о выборе краевых условий для параболического сплайна, интерполирующего достаточно гладкую функцию на равномерной сетке. Такой выбор осуществлялся исходя из условия минимума погрешности приближения в равномерной метрике. В данной заметке полученные в [1] результаты распространяются на случай произвольной неравномерной сетки. Используемая методика развивает применявшуюся в [2,3] для кубических сплайнов. Найденные краевые условия формулируются также в терминах коэффициентов при B-сплайнах. Рассмотрен вопрос об однозначном определении сплайна на основе метода наименьших квадратов.

1. Постановка задачи. Определяющие соотношения

Пусть в узлах сетки Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ известны значения некоторой функции $f_i = f(x_i)$, $i=0,1,\ldots,N$. Сопоставим Δ-разбиение $\bar{\Delta} = \{\bar{x}_i \mid i = 0,1,\ldots,N+1\}$, полагая $\bar{x}_i = (x_{i-1}+x_i)/2$, $i = 1, 2,\ldots,N$; $\bar{x}_0 \le a$, $\bar{x}_{N+1} \ge b$. Интерполяционным параболическим сплайном называется функция $S(x) \in C^1[a,b]$, которая на каждом промежутке между узлами сетки $\bar{\Delta}$ совпадает с некоторым квадратным многочленом и принимает на Δ заданные значения: $S(x_i) = f_i$, $i = 0, 1,\ldots,N$.

Если ввести обозначение $M_i = S''(x_i)$, $i = 0,1,\ldots,N$, то для $x \in [x_i, \bar{x}_{i+1}]$ получим

$$S(x) = (1-t)f_i + tf_{i+1} - th_i^2[(3-4t)M_i+M_{i+1}]/8, \tag{1}$$

где $h_i = x_{i+1}-x_i$, $t = (x-x_i)/h_i$, с переменой мест индексов i и $i+1$ для $x \in [\bar{x}_{i+1}, x_{i+1}]$.

Условие непрерывности $S'(x)$ в узлах сетки $\bar{\Delta}$ дает следующую систему для определения величин M_i:

$$\mu_i M_{i-1} + 3M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i, \ i = 1,2,\dots,N-1, \tag{2}$$

где $\lambda_i = 1 - \mu_i = h_i/(h_{i-1}+h_i)$,

$$d_i = 8f[x_{i-1},x_i,x_{i+1}] = \frac{8}{h_{i-1}+h_i}\left(\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i} - \frac{f_i-f_{i-1}}{h_{i-1}}\right).$$

Для однозначного определения $S(x)$ требуется наложить на сплайн два дополнительных условия, которые обычно задаются в виде ограничений на значения сплайна и его производных на концах отрезка $[a,b]$. В качестве таких краевых условий рассмотрим замыкающие систему (2) соотношения вида

$$\alpha_0 M_0 + M_1 = d_0^*, \quad M_{N-1} + \beta_0 M_N = d_N^*, \tag{3}$$

где

$$d_0^* = (\alpha_1 f_0+\alpha_2 f_1+\alpha_3 f_2)/h_0^2, \quad d_N^* = (\beta_1 f_N+\beta_2 f_{N-1}+\beta_3 f_{N-2})/h_{N-1}^2.$$

В предположении, что интерполируемая функция $f(x) \in W_\infty^4[a,b]$, постараемся определить параметры α_i, β_i, $i=0,1,2,3$, таким образом, чтобы сплайн $S(x)$ определялся однозначно и выполнялись соотношения

$$\|S^{(r)}(x)-f^{(r)}(x)\|_\infty = O(h^{3-r}), \ r=0,1,2. \tag{4}$$

Здесь $\|\cdot\|_\infty$ – норма в пространстве $L_\infty[a,b]$ и $h = \max\limits_i h_i$.

2. Оценка погрешности приближения

Из (I), пользуясь разложением по формуле Тейлора, имеем

$$S(x) = f(x) + \frac{t(1-4t^2)}{24} h_i^3 f'''(x) + h_i^4 I - \frac{(3-4t)t}{8} h_i^2 (M_i - f_i'') -$$

$$- \frac{t}{8} h_i^2 (M_{i+1} - f''_{i+1}),$$

где

$$I = \int_0^t \left[(1-t)\frac{\tau^3}{6} - \frac{(3-4t)t}{8}\tau\right] f^{IV}(x_i+h_i\tau)d\tau +$$

$$+ t\int_t^1 \left[\frac{(1-\tau)^3}{6} - \frac{1}{8}(1-\tau)\right] f^{IV}(x_i+h_i\tau)d\tau.$$

Оценивая интегралы с помощью неравенства Гёльдера, нетрудно получить

$$\|S^{(r)}(x)-f^{(r)}(x)\|_\infty \le C_{0r}h^{3-r}\|f'''\|_C+C_{1r}h^{4-r}\|f^{IV}\|_\infty +$$

$$+ C_{2r}h^{2-r}\max_i |M_i-f_i''|, \quad r=0,1,2 , \qquad (5)$$

с постоянными $C_{00} = 3/216$, $C_{01} = 1/12$, $C_{02} = 1/2$, $C_{10} = 5/384$, $C_{11} = 5/192$, $C_{12} = C_{20} = 1/8$, $C_{21} = 1/2$, $C_{22} = 1$. Здесь $\|\cdot\|_C$ – норма в пространстве $C[a,b]$.

Далее будем предполагать, что $N \ge 3$. Обозначим $Q_i = M_i - f_i''$, $i=0,1,\ldots,N$, и перепишем систему (2)-(3) в виде:

$$\mu_1 Q_0 + 3Q_1 + \lambda_1 Q_2 = \tilde{d}_1, \qquad (6)$$

$$\left.\begin{aligned} c_1Q_1 + \delta_1 Q_2 &= \tilde{d}_1^*, \\ \mu_i Q_{i-1} + 3Q_i + \lambda_i Q_{i+1} &= \tilde{d}_i, \quad i=2,\ldots,N-2, \\ \delta_{N-1}Q_{N-2} + c_{N-1}Q_{N-1} &= \tilde{d}_{N-1}^*, \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

$$\mu_{N-1}Q_{N-2} + 3Q_{N-1} + \lambda_{N-1}Q_N = \tilde{d}_{N-1}, \qquad (8)$$

где

$$\left.\begin{aligned} & c_1=3\alpha_0-\mu_1, \quad \delta_1=\alpha_0\lambda_1, \quad \tilde{d}_1^*=\alpha_0\tilde{d}_1-\mu_1\tilde{d}_0^*, \\ & \delta_{N-2}=\beta_0\mu_{N-1}, \quad c_{N-1}=3\beta_0-\lambda_{N-1}, \quad \tilde{d}_{N-1}^*=\beta_0\tilde{d}_{N-1}-\lambda_{N-1}\tilde{d}_N^*, \\ & \tilde{d}_0^*=d_0^*-\alpha_0 f_0''-f_1'', \quad \tilde{d}_N^*= d_N^*-\beta_0 f_N''-f_{N-1}'', \\ & \tilde{d}_i=d_i-\mu_i f_{i-1}''-3f_i''-\lambda_i f_{i+1}'', \quad i=1,2,\ldots,N-1. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Матрица системы (7) будет иметь диагональное преобладание, если выполняются неравенства $|c_1| > |\delta_1|$, $|c_{N-1}| > |\delta_{N-1}|$.

Используя (9), эти соотношения нетрудно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned} & \alpha_0 < \frac{\mu_1}{3+\lambda_1} \quad \text{или} \quad \alpha_0 > \frac{\mu_1}{2+\mu_1}, \\ & \beta_0 < \frac{\lambda_{N-1}}{3+\mu_{N-1}} \quad \text{или} \quad \beta_0 > \frac{\lambda_{N-1}}{2+\lambda_{N-1}}. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Таким образом, при выполнении этих неравенств согласно критерию Адамара матрица системы (7) невырождена, и, следовательно, сплайн существует и единствен. Отметим, что в частном случае равномерной сетки Δ неравенства (10) совпадают с приведенными в [1] ограничениями $\alpha < 1/7$ или $\alpha > 1/5$ $(\alpha=\alpha_0=\beta_0)$.

Если предположить, что $|c_1| - |\delta_1| = \gamma_1 > 0$, $|c_{N-1}|-|\delta_{N-1}| = \gamma_2 > 0$, то для матрицы A системы (7) согласно [4,с.334] имеет место оценка

$$\|A^{-1}\| \le \max(1/2,\gamma_1^{-1},\gamma_2^{-1}) = \gamma . \tag{11}$$

Для правых частей системы (7), пользуясь разложением по формуле Тейлора, находим оценку

$$|\tilde{d}_i| \le \frac{1}{3}|h_i-h_{i-1}|\,\|f'''\|_C + \frac{5}{24}h^2\|f^{IV}\|_\infty, \quad i=1,\dots,N-1. \tag{12}$$

Тогда из системы (7), учитывая неравенства (11),(12) имеем

$$\max_{1\le i\le N-1}|Q_i| \le p, \tag{13}$$

где

$$p = K\max_i|\tilde{d}_i| + \gamma\max(\mu_1|\tilde{d}_0^*|,\lambda_{N-1}|\tilde{d}_N^*|),\ K=\gamma\max(1,|\alpha_0|,|\beta_0|).$$

Теперь из (6), (8) получаем

$$\begin{aligned} |Q_0| &\le [|\tilde{d}_1| + (3+\lambda_1)p]/\mu_1, \\ |Q_N| &\le [|\tilde{d}_{N-1}| + (3+\mu_{N-1})p]/\lambda_{N-1}. \end{aligned} \tag{14}$$

В предположении ограниченности γ, μ_1^{-1}, λ_{N-1}^{-1} при $h\to 0$ из оценок (5), (12)-(14) следует, что соотношения (4) будут иметь место, если $\tilde{d}_i^*=O(h)$, $i = 0,N$. Для выполнения этого условия достаточно положить

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\alpha_2\mu_0h_1/h_0 = \alpha_3h_1/h_0 = 2\mu_0(1+\alpha_0), \\ \beta_1 &= -\beta_2\lambda_{N-1}h_{N-2}/h_{N-1} = \beta_3h_{N-2}/h_{N-1} = 2\lambda_{N-1}(1+\beta_0). \end{aligned} \tag{15}$$

Естественно предположить, что при $h\to 0$ ограничены и отношения h_0/h_1, h_{N-1}/h_{N-2}. В итоге вопрос о выборе граничных условий сводится к определению величин α_0, β_0.

Применяя формулу Тейлора, получаем

$$\tilde{d}_0^* = \frac{1}{3}[\alpha_0(2h_0+h_1) + h_1 - h_0]f_1''' + I_0,$$

$$\tilde{d}_N^* = \frac{1}{3}[\beta_0(2h_{N-1} + h_{N-2}) + h_{N-2} - h_{N-1}]f_{N-1}''' + I_N,$$

где

$$|I_0| \le \frac{1}{2}(|1+\alpha_0|+|\alpha_0|)h^2\|f^{IV}\|_\infty, \quad |I_N| \le \frac{1}{2}(|1+\beta_0|+|\beta_0|)h^2\|f^{IV}\|_\infty.$$

Если попытаться теперь выбирать параметры α_0, β_0, как это делалось в случае равномерной сетки в [I] из условия $\tilde{d}_i^* = O(h^2), i = 0, N$, т.е. положить

$$\alpha_0 = (h_0-h_1)/(2h_0+h_1), \quad \beta_0 = (h_{N-1}-h_{N-2})/(2h_{N-1}+h_{N-2}),$$

то неравенства (I0), гарантирующие существование и единственность сплайна, в общем случае не выполняются. Рассмотрим ряд конкретных вариантов выбора этих параметров с выполнением во всех случаях ограничений (I0).

3. Варианты выбора краевых условий. Оптимальные краевые условия

Пусть $P_i(x)$ - квадратный многочлен такой, что $P_i(x_j) = f_j$, $j=i, i+1, i+2$. Будем считать, что выполняются соотношения (I5). Тогда нетрудно показать, что краевые условия (3) можно переписать в виде

$$\alpha_0 M_0 + M_1 = (\alpha_0+1)P_0''(x), \quad M_{N-1} + \beta_0 M_N = (1+\beta_0)P_{N-2}''(x). \tag{16}$$

Отсюда следует, что при $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ имеем $M_1 = P_0''(x)$, $M_{N-1} = P_{N-2}''(x)$, а при $\alpha_0, \beta_0 \to \infty$ в пределе получаем $M_0 = P_0''(x)$, $M_N = P_{N-2}''(x)$.

Выражая величины M_i через $m_i = S'(x_i)$ посредством формулы (I), соотношения (I6) можно также представить в виде

$$(1-3\alpha_0)m_0 + (3-\alpha_0)m_1 = (1-3\alpha_0)P_0'(x_0) + (3-\alpha_0)P_0'(x_1),$$

$$(3-\beta_0)m_{N-1} + (1-3\beta_0)m_N = (3-\beta_0)P_{N-2}'(x_{N-1}) + (1-3\beta_0)P_{N-2}'(x_N).$$

Если положить здесь $\alpha_0 = \beta_0 = 3$, то получим $m_0 = P_0'(x_0)$, $m_N = P_{N-2}'(x_N)$. Аналогично при $\alpha_0 = \beta_0 = 1/3$ имеем $m_1 = P_0'(x_1)$, $m_{N-1} = P_{N-2}'(x_{N-1})$.

Наконец, краевые условия (I6) с учетом соотношений (2) можно записать в виде

$$[(3+\lambda_0)\alpha_0-\mu_1](M_1-M_0)+\lambda_0(1+\alpha_0)(M_2-M_1)=0,$$
$$[(3+\mu_{N-1})\beta_0-\lambda_{N-1}](M_N-M_{N-1})+\lambda_{N-1}(1+\beta_0)(M_{N-1}-M_{N-2})=0, \tag{17}$$

или

$$\frac{h_1^2(1+\alpha_0)}{h_0+h_1}\left(\frac{M_2-M_1}{h_1}-\frac{M_1-M_0}{h_0}\right)+[(3h_0+h_1)\alpha_0+h_1-h_0]\frac{M_1-M_0}{h_0}=0,$$
$$\frac{h_{N-1}^2(1+\beta_0)}{h_{N-2}+h_{N-1}}\left(\frac{M_N-M_{N-1}}{h_{N-1}}-\frac{M_{N-1}-M_{N-2}}{h_{N-2}}\right)+[(h_{N-2}+3h_{N-1})\beta_0+h_{N-2}-h_{N-1}]\frac{M_N-M_{N-1}}{h_{N-1}}=0. \tag{18}$$

Из соотношений (17) следует, что при $\alpha_0=\beta_0=-1$ имеем $M_i=M_{i+1}$, $i=\overline{0,N-1}$, т.е. известные краевые условия [5]. При $\alpha_0=\beta_0=0$ находим $h_{i-1}(M_{i+1}-M_i)=h_i(M_i-M_{i-1})$, $i=\overline{1,N-1}$. Полагая $\alpha_0=h_0/(3h_0+4h_1)$, $\beta_0=h_{N-1}/(4h_{N-2}+3h_{N-1})$, получаем $M_i=M_{i+1}$, $i=\overline{1,N-2}$. Очевидно, что в этом случае для однозначного определения сплайна необходимо предполагать $N\geq 4$. В силу (18) случай $\alpha_0=(h_0-h_1)/(3h_0+5h_1)$, $\beta_0=(h_{N-1}-h_{N-2})/(5h_{N-2}+3h_{N-1})$ отвечает краевым условиям $M_i-M_{i-1}=M_{i+1}-M_i$, $i=\overline{1,N-1}$. Наконец, при $\alpha_0=(h_0-h_1)/(3h_0+h_1)$, $\beta_0=(h_{N-1}-h_{N-2})/(h_{N-2}+3h_{N-1})$ из (18) имеем
$$(M_{i+1}-M_i)/h_i=(M_i-M_{i-1})/h_{i-1},\quad i=\overline{1,N-1}. \tag{19}$$

Согласно [4, с.334] неравенство (13) можно уточнить, а именно:

$$\max_{1\leq i\leq N-1}|Q_i|\leq\max\left\{\gamma_1^{-1}|\tilde{d}_1^*|,\frac{1}{2}\max_{2\leq i\leq N-2}|\tilde{d}_i|,\ \gamma_2^{-1}|\tilde{d}_{N-1}^*|\right\}. \tag{20}$$

В силу разложения по формуле Тейлора здесь

$$\gamma_1^{-1}|\tilde{d}_1^*|=\varphi_1(\alpha_0,h_0,h_1)|f_1'''|+O(h^2),$$
$$\gamma_2^{-1}|\tilde{d}_{N-1}^*|=\varphi_2(\beta_0,h_{N-2},h_{N-1})|f_{N-1}'''|+O(h^2),$$

где

$$\varphi_1(\alpha_0,h_0,h_1)=\frac{1}{3}\,\frac{|\alpha_0(h_1-2h_0-\mu_1h_0)-\mu_1(h_1-h_0)|}{|3\alpha_0-\mu_1|-\lambda_1|\alpha_0|},$$

$$\varphi_2(\beta_0,h_{N-2},h_{N-1})=\frac{1}{3}\,\frac{|\beta_0(h_{N-2}-2h_{N-1}-\lambda_{N-1}h_{N-1})-\lambda_{N-1}(h_{N-2}-h_{N-1})|}{|3\beta_0-\lambda_{N-1}|-\mu_{N-1}|\beta_0|}.$$

Таким образом, задача поиска "оптимальных" значений параметров α_0, β_0 может быть рассмотрена как задача минимизации функций $\varphi_1(\alpha_0, h_0, h_1)$ и $\varphi_2(\beta_0, h_{N-2}, h_{N-1})$.

Если искать эти параметры по правилу

$$\alpha_0 = \frac{h_0-h_1}{k_1h_0+l_1h_1}, \quad \beta_0 = \frac{h_{N-1}-h_{N-2}}{k_2h_{N-1}+l_2h_{N-2}},$$

то в области допустимых значений (при выполнении ограничений (I0)) функции $\varphi_1(\alpha_0, h_0, h_1)$, $\varphi_2(\beta_0, h_{N-2}, h_{N-1})$ будут достигать минимума при $k_1 = k_2 = 3$, $l_1 = l_2 = 1$, т.е. для краевых условий (I9).

Нетрудно показать также, что для рассмотренных нами выше вариантов выбора параметров α_0, β_0 оценка (20) принимает вид

$$\max_{1\le i\le N-1} |Q_i'| \le (C_1 \max_j |h_j-h_{j-1}| + C_2 h)\|f'''\|_C + O(h^2). \quad (21)$$

Присутствующие здесь постоянные C_1, C_2 приведены в табл. I, где цифрами I-8 занумерована следующая последовательность значений параметра α_0: $\{-1, 0, (h_0-h_1)/(3h_0+5h_1), (h_0-h_1)/(3h_0+h_1), h_0/(3h_0+4h_1), 1/3, 3, \infty\}$. Для получения соответствующих значений параметра β_0 достаточно заменить здесь индекс i на $N-1-i$, $i = 0, I$.

Таблица I

№	I	2	3	4	5	6	7	8
C_1	I/6	I/3	I/4	I/6	I/6	I/6	I/6	I/6
C_2	I/6	0	0	0	5/4	I/2	2/9	I/3

Как следует из табл.I, оценка (2I) является наилучшей для краевых условий (I9). При этом постоянные в ней не могут быть уменьшены. В этом смысле краевые условия (I9) можно считать "оптимальными".

Отметим, что для этих краевых условий оценка (2I) совпадает с соответствующими оценками для общеупотребительных краевых условий типов I,П,Ш из [I], когда на концах отрезка $[a,b]$ заданы значения первой, второй производных интерполируемой функции или последняя считается периодической с периодом $b-a$.

Оценку (I4) для краевых условий (I9) можно уточнить. Так как из (6)-(8) следует

$$|Q_0| \le \frac{1}{|\mu_1-3\alpha_0|}\left(\lambda_1|Q_2| + \left|2\frac{h_1-h_0}{3} + \alpha_0(2h_0+h_1)\right|\right)|f_1'''| + O(h^2),$$

$$|Q_N| \le \frac{1}{|\lambda_{N-1}-3\beta_0|}\left(\mu_{N-1}|Q_{N-2}| + \left|2\frac{h_{N-1}-h_{N-2}}{3}+\beta_0(2h_{N-1}+h_{N-2})\right|\right)|f_{N-1}'''|+$$
$$+ O(h^2),$$

то при $\alpha_0 = (h_0-h_1)/(3h_0+h_1)$, $\beta_0 = (h_{N-1} - h_{N-2})/(3h_{N-1} + h_{N-2})$ имеем

$$\max(|Q_0|,|Q_N|) \le C \max_j \frac{|h_j-h_{j-1}|}{6}\| f''' \|_C + O(h^2),$$

где

$$C = \max\left(\frac{5h_0+h_1}{h_0+3h_1}, \frac{5h_{N-1}+h_{N-2}}{h_{N-1}+3h_{N-2}}\right) \le 5.$$

Если рассмотреть краевые условия:

$$\begin{aligned} &\alpha_0 M_0+M_1 = \alpha_0 Q_0''(x_0) + Q_0''(x_1), \\ &M_{N-1}+\beta_0 M_N=Q_{N-3}''(x_{N-1})+\beta_0 Q_{N-3}''(x_N), \end{aligned} \tag{22}$$

где $Q_i(x)$ – кубический многочлен Лагранжа $Q_i(x_j)=f_j$, $j = i, i+1, i+2, i+3$, то оценку (21) для краевых условий (19) получим при $\alpha_0 \le \mu_1/(5+\lambda_1)$ или $\alpha_0 \ge 1$, $\beta_0 \le \lambda_{N-1}/(5+\mu_{N-1})$ или $\beta_0 \ge 1$.

Заметим, что при $N = 3$ и равномерной сетке Δ краевые условия (22) совпадают с условиями (19). Эти же условия на равномерной сетке получим из (22) при $\alpha_0 = \beta_0 = 0$.

4. Краевые условия в терминах B-сплайнов

Предположим, что при интерполяции параболическим сплайном используется его представление через B-сплайны $S(x) = \sum_{i=-1}^{N+1} b_i B_i(x)$, где $B_i(x)$ – нормализованные базисные сплайны [5]. Естественно поставить вопрос о выборе краевых условий. Покажем, что если положить $b_i = \hat{b}_i$; $i=1,N-1$, где

$$\hat{b}_i = f_i - \frac{1}{4(h_{i-1}+h_i)}\left[h_{i-1}^2\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i} - h_i^2\frac{f_i-f_{i-1}}{h_{i-1}}\right]$$

– формулы локальной аппроксимации [6], то это отвечает краевым условиям (19).

Пусть $s_i = s(x_i)$. Так как сплайн $s(x)$ интерполяционный и согласно [6]

$$b_i = s_i + \frac{h_i - h_{i-1}}{4} m_i - \frac{h_{i-1} h_i}{8} M_i, \tag{23}$$

то, пользуясь разложением по формуле Тейлора, имеем

$$\hat{b}_i = s_i - \frac{1}{4(h_{i-1}+h_i)} \left[h^2_{i-1} \frac{s_{i+1}-s_i}{h_i} - h^2_i \frac{s_i - s_{i-1}}{h_{i-1}} \right] =$$

$$= b_i - \frac{h^2_{i-1} h^2_i}{32(h_{i-1}+h_i)} \left[\frac{M_{i+1}-M_i}{h_i} - \frac{M_i - M_{i-1}}{h_{i-1}} \right],$$

откуда и следует требуемый результат. Отметим, что аналогичные краевые условия для интерполяционных кубических сплайнов получены в [7].

Привлекая теперь формулу (23) для b_j, $j=i, i+1$, и используя (I), нетрудно получить соотношения

$$M_{i+1} - M_i = \frac{8}{h_i} \left[\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{4(b_{i+1} - b_i)}{h_{i-1} + 2h_i + h_{i+1}} \right], \quad i=0,1,\dots,N-1.$$

Это позволяет переписать и другие рассмотренные в п.3 краевые условия в терминах коэффициентов при B-сплайнах b_i.

5. Определение свободных параметров сплайна методом наименьших квадратов

Вместо задания краевых условий для определения свободных параметров сплайна в [8,9] был использован метод наименьших квадратов. Запишем интерполяционный параболический сплайн в виде

$$s(x) = c_1 s_1(x) + c_2 s_2(x) + s_3(x), \tag{24}$$

где сплайны $s_i(x)$, $i=1,2,3$, однозначно определяются условиями

$$s_i(x_j) = 0, \quad s_3(x_j) = f_j, \quad i = 1,2; \quad j = 0,1,\dots,N,$$

$$s''_1(x_0) = s''_2(x_N) = 1, \quad s''_2(x_0) = s''_3(x_0) = s''_1(x_N) = s''_3(x_N) = 0 .$$

Пусть

$$I(s) = \sum_{i=0}^{N-1} p_i (M_{i+1} - M_i)^2 , \tag{25}$$

где веса $p_i \geq 0$. Согласно методу наименьших квадратов необходи -

мые условия минимума суммы (25) $\partial I/\partial c_i=0$, $i=1,2$, дают систему двух уравнений

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{13} \\ -a_{23} \end{pmatrix}, \qquad (26)$$

где $a_{ij} = \sum\limits_k p_k(M_{jk+1}-M_{jk})(M_{ik+1}-M_{ik})$, $M_{jk} = S_j''(x_k)$, $j = 1,2,3$; $k = 0,1,\ldots,N$.

Почти дословно повторяя рассуждения, приведенные в [8], нетрудно показать, что при $N \geq 2$ определитель системы (26) отличен от нуля. Поэтому, вычислив из (26) постоянные c_1, c_2, согласно (24) находим окончательное выражение для сплайна. Однако объем работы по построению сплайна существенно возрос. К тому же при больших N будет происходить быстрое накопление ошибок округления при вычислении сумм, входящих в выражения для коэффициентов матрицы и правой части системы (26). Для устранения этого недостатка и уменьшения общего объема вычислений можно рассмотреть усеченную сумму (25). Как показывают результаты численных расчетов, это почти не влияет на точность получаемых приближений. Более того, если оставить в (25) только два слагаемых, например, с индексами $i=i_1$, i_2, то, решая систему (26), приходим к краевым условиям $M_i = M_{i+1}$, $i = i_1, i_2$.

Естественно вместо (25) можно рассмотреть и другие виды функционалов, например,

$$I(S) = \sum_{i=1}^{N-1} p_i[M_i-P''_{i-1}(x)]^2, \qquad (27)$$

$$I(S) = \sum_{i=1}^{N-1} p_i[h_i^k(M_{i+1}-M_i)-h_{i-1}^k(M_i-M_{i-1})]^2,\ k=-1,0,1, \qquad (28)$$

$$I(S) = \sum_{i=1}^{N-2} p_i[(M_{i+1}-M_i)/h_i-Q'''_{i-1}(x)]^2, \qquad (29)$$

где $p_i \geq 0$, а $P_i(x), Q_i(x)$ - использовавшиеся выше соответственно квадратный и кубический многочлены Лагранжа. Оставляя в этих суммах только первое и последнее слагаемые, из условия минимума функционалов получим равенство этих слагаемых нулю, т.е. приходим к ряду выписывавшихся в п.3 краевых условий. Таким образом, рассматривавшиеся выше краевые условия можно считать частными случаями применения метода наименьших квадратов к соответствующим функционалам.

6. Числовой пример

В качестве числового теста рассмотрим интерполяцию функции $f(x) = \exp(x)$ на сетке Δ: $x_0=0$, $x_i=(i-1/(i+1))/20$, $i = 1,2,\dots,19$; $x_{20} = 1$ параболическим сплайном $S(x)$ с краевыми условиями (I6) при различных вариантах выбора параметров α_0, β_0. В табл. 2 приведены значения величины $|S(x)-\exp(x)|\cdot 10^6$, вычисленные в различных точках между узлами сетки Δ. Используемая нумерация продолжает начатую в табл.I. Под номером 9 идут условия $S''(x_i)=f''(x_i)$, $i = 0,N$, а номером I0 обозначены "естественные" краевые условия $M_0=M_N=0$. Номера II,I2 соответствуют краевым условиям (22) при $\alpha_0 = \beta_0 =-1$ и $\alpha_0 = \beta_0 = \infty$. В столбцах I3-I8 помещены результаты, полученные по методу наименьших квадратов для функционалов (25), (27)-(29) с весами p_i = I для всех i. В табл.3 при той же нумерации приведены значения величин $R_2 = \max\limits_{x\in\Delta} R_2(x)\cdot 10^2$ и $R_0 = \max\limits_{x\in\Delta/10} R_0(x)\cdot 10^6$, где $R_r(x) = |S^{(r)}(x)-f^{(r)}(x)|$, а сетка

Таблица 2

№	x							
	0,0063	0,0188	0,1769	0,4702	0,6590	0,7720	0,9224	0,9869
1	0,94	0,69	1,36	0,07	1,87	0,11	2,88	15,3
2	2,77	0,84	1,37	0,07	1,87	0,12	0,48	1,20
3	0,86	0,06	1,37	0,07	1,87	0,12	0,38	1,86
4	0,12	0,35	1,36	0,07	1,87	0,12	0,28	2,55
5	17,1	6,73	1,44	0,07	1,87	0,19	13,9	100
6	3,20	1,62	1,35	0,07	1,87	0,09	6,42	39,8
7	1,48	0,91	1,35	0,07	1,87	0,10	3,47	19,4
8	1,33	0,85	1,35	0,07	1,87	0,10	3,30	18,2
9	0,04	0,28	1,36	0,07	1,87	0,12	1,19	3,21
I0	37,2	15,0	1,54	0,07	1,88	0,19	6,21	424
II	0,05	0,32	1,36	0,07	1,87	0,12	0,31	2,34
I2	0,10	0,26	1,36	0,07	1,87	0,12	0,33	2,23
I3	0,76	0,61	1,36	0,07	1,87	0,11	2,43	12,3
I4	2,67	0,80	1,37	0,07	1,87	0,12	0,45	1,37
I5	0,13	0,35	1,36	0,07	1,87	0,12	0,26	2,70
I6	0,83	0,04	1,37	0,07	1,87	0,12	0,36	2,02
I7	2,60	0,77	1,37	0,07	1,87	0,12	0,46	1,37
I8	1,72	1,01	1,35	0,07	1,87	0,12	0,12	3,69

Таблица 3

№	R_2	R_0
1	11,8	17,3
2	7,33	3,69
3	2,20	3,39
4	0,45	3,08
5	61,7	107
6	27,4	43,6
7	14,4	21,7
8	13,6	20,4
9	0,40	3,32
10	272	456
11	0,55	3,18
12	0,62	3,23
13	9,86	14
14	7,07	3,61
15	0,47	3,01
16	2,12	3,32
17	6,87	3,62
18	4,71	3,83

$\Delta/10$ получена делением каждого интервала сетки Δ на 10 равных частей. Во всех случаях, кроме номера 9, максимум величины $R_2(x)$ достигался на границе. Отметим, что задание на границе точных значений $f''(x)$ не гарантирует минимума величин $R_r(x)$. Укажем на соответствие полученных в табл. 3 результатов оценке (21).

Сравнение приведенных результатов показывает, что из рассмотренных здесь краевых условий наилучшими являются условия (19). При этом сплайн будет однозначно определен для $N \geq 3$.

Литература

1. КВАСОВ Б.И. О краевых условиях при интерполяции параболическими сплайнами. -В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып. 87), Новосибирск, 1981, с.11-17.

2. BEHFOROOZ G.H., PAPAMICHAEL N. End conditions for cubic spline interpolation.-J.Inst.Maths. Appl., 1979, v.23, p.355-366.

3. BEHFOROOZ G.H., PAPAMICHAEL N. End conditions for interpolatory cubic splines with unequally spaced knots.- J.Comput.Appl. Math., 1980, v.6, N 1, p.59-65.

4. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. -М.: Наука. 1980. - 352 с.

5. СТЕЧКИН С.Б., СУББОТИН Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. -М.: Наука, 1976. - 248 с.

6. КВАСОВ Б.И. Применение параболических B-сплайнов для решения задач интерполяции. -Журн. вычисл. математики и мат.физики, 1983, т.23, № 2, с.278-289.

7. ЖАНЛАВ Т. О краевых условиях для интерполяционных кубических сплайнов. -В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып. 106). Новосибирск, 1984, с. 25-28.

8. ПАВЛОВ Н.Н. О граничных условиях в задаче сглаживания кубическими сплайнами.-В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып. 87). Новосибирск, 1981, с.53-61.

9. СЛЕПЦОВ А.Г. Дополнительные условия для кубической интерполирующей сплайн-функции класса C_2. - Новосибирск, 1983. - 17 с. (Препринт/ИТПМ СО АН СССР: № 38-83).

Поступила в ред.-изд.отд.
11 февраля 1986 года