СПЛАЙНЫ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ
(Вычислительные системы)
1986 год Выпуск 115

УДК 519.65

ДИСКРЕТНЫЕ КУБИЧЕСКИЕ B-СПЛАЙНЫ

А.В. Белоусов

В данной работе рассматриваются вопросы, связанные с построением финитного базиса в пространстве дискретных кубических сплайнов.

Пусть на отрезке $[a,b]$ введена сетка Δ: $a = x_0 < \ldots < x_N = b$. Тогда, согласно [I,с.198], дискретным кубическим сплайном называется функция $S_D(x)$, которая:

I) на каждом из промежутков $[x_i, x_{i+1}]$ является кубическим многочленом

$$S_D(x) \equiv P^i(x) = \sum_{j=0}^{3} a_{ij}(x-x_i)^j, \qquad x \in [x_i, x_{i+1}];$$

2) $S_D(x) \in C[a,b]$;

3) при заданных $\varepsilon_i \geq 0$, $i = 1,\ldots,N-1$,

$$\frac{P^i(x_i+\varepsilon_i) - P^i(x_i-\varepsilon_i)}{2\varepsilon_i} = \frac{P^{i-1}(x_i+\varepsilon_i) - P^{i-1}(x_i-\varepsilon_i)}{2\varepsilon_i}, \tag{1}$$

$$\frac{P^i(x_i+\varepsilon_i) - 2P^i(x_i) + P^i(x_i-\varepsilon_i)}{\varepsilon_i^2} = \frac{P^{i-1}(x_i+\varepsilon_i) - 2P^{i-1}(x_i) + P^{i-1}(x_i-\varepsilon_i)}{\varepsilon_i^2}. \tag{2}$$

В [I] рассмотрена задача о построении дискретного кубического интерполяционного сплайна, удовлетворяющего условиям $S_D(x_i) = f_i$, $i=0,\ldots,N$, и показано, что для наиболее употребительных краевых условий задача интерполяции разрешима на произвольной сетке Δ при любых значениях $\varepsilon_i \geq 0$. При $x \in [x_i, x_{i+1}]$ интерполяционный дискретный кубический сплайн записывается в виде

$$S_D(x) = f_i(1-t) + tf_{i+1} - \frac{h_i^2}{6} t(1-t)[(2-t)M_i + (1+t)M_{i+1}], \qquad (3)$$

где $h_i = x_{i+1} - x_i$, $t = (x - x_i)/h_i$,

$$M_i = (P^i(x_i+\varepsilon_i) - 2P^i(x_i) + P^i(x_i-\varepsilon_i))/\varepsilon_i^2.$$

Для классических полиномиальных сплайнов произвольной степени и любого дефекта построена теория базисов из B-сплайнов [I,2]. Такие базисы существуют на произвольном разбиении Δ. Однако для дискретных сплайнов все известные результаты были получены только в случае, когда $\varepsilon_i=\varepsilon$, $i = 1,\ldots,N-1$. В тоже время, как показано в [I], в практических задачах эффективны сплайны, для которых ε_i различны между собой.

Кубический B-сплайн $B_i(x)$ - это кубический сплайн класса C^2, отличный от нуля только при $x \in (x_{i-2},x_{i+2})$, где $B_i(x) > 0$. Функции $B_i(x)$, $i=-1,\ldots,N+1$, образуют базис в пространстве кубических сплайнов класса C^2 (для построения всех базисных функций нужно произвольным образом расширить сетку Δ до разбиения $\tilde{\Delta}$: $x_{-3} \le x_{-2} \le \le x_{-1} \le x_0 < \ldots < x_N \le x_{N+1} \le x_{N+2} \le x_{N+3}$). Для приложений удобны нормализованные B-сплайны, удовлетворяющие условию $\sum_i B_i(x) \equiv 1$, $x \in [x_0,x_N]$.

Нашей целью является построение на сетке $\tilde{\Delta}$ совокупности линейно-независимых на $[a,b]$ дискретных кубических сплайнов $B_i^D(x)$, $i= -1,\ldots,N+1$, таких, что

1) $B_i^D(x) \equiv 0$, при $x \notin (x_{i-2},x_{i+2})$, $i= -1,\ldots,N+1$,

2) $\sum_{i=-1}^{N+1} B_i^D(x) \equiv 1$, $x \in [a,b]$.

Для упрощения выкладок введем величины ε_j, $j= -3,-2,-1,0,N,N+1,N+2,N+3$. На практике их можно полагать нулевыми. Если же $\varepsilon_i = \varepsilon$, $i = 1,\ldots,N-1$, то удобно считать $\varepsilon_j = \varepsilon$.

Построение базиса требует исследования трех основных вопросов: существование финитных функций с минимальным носителем, их линейной независимости и возможности нормализации полученного базиса.

Кубический сплайн класса C^2 является частным случаем дискретного кубического сплайна (при $\varepsilon_i \to 0$). Поэтому мы попытаемся воспользоваться методикой, описанной в [I,с.139] при построении базиса из кубических B-сплайнов класса C^2.

§1. Базис из дискретных кубических B-сплайнов

Будем строить дискретный кубический сплайн $B_p^D(x)$ с носителем $[x_{p-2},x_{p+2}]$ (в дальнейшем индекс D будем опускать и писать $B_p(x)$). Обозначим $y_j= B_p(x_j)$, $M_j= B_p''(x_j)$. Очевидно, $M_{j-2}= y_{j-2} = M_{j+2}= y_{j+2} = 0$. Далее, учитывая условия (I),(2), нетрудно получить систему

$$\left.\begin{aligned}
&(h_{p-2}+ h_{p-1})\alpha_p M_{p-1} + (h_{p-1}^2- \varepsilon_{p-1}^2)M_p = 6y_p,\\
&(h_{p-2}+ h_{p-1})(3 - \varepsilon^2(x_{p-2},x_{p-1},x_p))\, M_{p-1} +\\
&\quad + (h_{p-1}+ h_p)(3- \varepsilon^2(x_{p-1},x_p,x_{p+1}))\, M_p +\\
&\quad + (h_p+ h_{p+1})(3- \varepsilon^2(x_p,x_{p+1},x_{p+2}))\, M_{p+1} = 0,\\
&(h_p^2 - \varepsilon_{p+1}^2)M_p + (h_p+ h_{p+1})\beta_p M_{p+1} = 6y_p,
\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

где $\alpha_p = 2h_{p-1}+ h_{p-2}+ (\varepsilon_{p-1}^2- \varepsilon_{p-2}^2)/h_{p-2}$;

$$\beta_p = 2h_p + h_{p+1}- (\varepsilon_{p+2}^2- \varepsilon_{p+1}^2)/h_{p+1};$$

$$\varepsilon^2(x_p,x_{p+1},x_{p+2})=\frac{1}{h_p+h_{p+1}}\left(\frac{\varepsilon_{p+2}^2-\varepsilon_{p+1}^2}{h_{p+1}} - \frac{\varepsilon_{p+1}^2-\varepsilon_p^2}{h_p}\right).$$

Положим $\gamma_p = h_{p-1}-h_p+(\varepsilon_{p+1}^2- \varepsilon_{p-1}^2)/(h_{p-1}+h_p)$. Легко видеть, что при выполнении условий

$$R_p = \gamma_p^2 + (3-\varepsilon^2(x_{p-1},x_p,x_{p+1}))^2\geq 0, \qquad (5)$$

$$A_p= [3-\varepsilon^2(x_{p-2},x_{p-1},x_p)]\gamma_p- [3-\varepsilon^2(x_{p-1},x_p,x_{p+1})]\alpha_p \neq 0, \qquad (6)$$

$$D_p= [3-\varepsilon^2(x_p,x_{p+1},x_{p+2})]\gamma_p+ [3-\varepsilon^2(x_{p-1},x_p,x_{p+1})]\beta_p \neq 0 \qquad (7)$$

параметры y_j, M_j сплайна $B_p(x)$, удовлетворяющие системе (4), определяются следующими соотношениями:

$$y_{p-2} = y_{p+2} = 0, \quad M_{p-2} = M_{p+2} = 0,$$

$$y_{p-1}=\frac{h_{p-2}^2-\varepsilon_{p-2}^2}{6(h_{p-2}+h_{p-1})}D_p\tilde{M}_p\ ,$$

$$M_{p-1}=\frac{D_p}{h_{p-2}+h_{p-1}}\tilde{M}_p\ ,$$

$$y_p=\frac{\tilde{M}_p}{6(h_{p-1}+h_p)}\{\alpha_p(3-\varepsilon^2(x_p,x_{p+1},x_{p+2}))(\varepsilon_{p+1}^2-h_p^2)+$$

$$+\beta_p(3-\varepsilon^2(x_{p-2},x_{p-1},x_p))(\varepsilon_{p-1}^2-h_{p-1}^2)+$$

$$+\alpha_p\beta_p(3-\varepsilon^2(x_{p-1},x_p,x_{p+1}))(h_{p-1}+h_p)\},$$

$$M_p=-\frac{\tilde{M}_p}{h_{p-1}+h_p}\{\alpha_p(3-\varepsilon^2(x_p,x_{p+1},x_{p+2}))+\beta_p(3-\varepsilon^2(x_{p-2},x_{p-1},x_p))\},$$

$$y_{p+1}=-\frac{h_{p+1}^2-\varepsilon_{p+2}^2}{6(h_p+h_{p+1})}A_p\tilde{M}_p\ ,$$

$$M_{p+1}=-\frac{A_p}{h_p+h_{p+1}}\tilde{M}_p\ ;$$

где $\tilde{M}_p$ - произвольное число, отличное от нуля.

Теперь, используя формулу (3), имеем выражение для сплайна $B_p(x)$.

Отметим, что сплайн $B_p(x)\not\equiv 0$ можно выписать и при нарушении условий (5)-(7). Но при этом совокупность сплайнов $B_j(x)$, $j = -1,\dots,N+1$, вообще говоря, не образует базиса.

В самом деле, пусть, например, $h_0=\dots=h_{k-1}=h$, $h_k=\dots=h_{N-1}=3h$, $\varepsilon_j^2=(h_{j-1}^2-h_{j-1}h_j+h_j^2)/2$, $j=1,\dots,N-1$. Дополним сетку Δ так, что $h_{-3}=h_{-2}=h_{-1}=h$ и $h_N=h_{N+1}=h_{N+2}=3h$. При таких значениях h_i и ε_i нарушается условие $A_{k-1}\neq 0$ и сплайн $B_{k-1}(x)$ отличен от нуля только при $x\in(x_{k-3},x_k)$, а все $B_j(x)$, $j\neq k-1$, имеют носитель (x_{j-2},x_{j+2}). Покажем, что полученная система B-сплайнов не является линейно-независимой.

Рассмотрим на введенной сетке задачу интерполяции

$$S_D(x_0)=1,\quad S_D(x_j)=0,\quad j=1,\dots,N,$$
$$S_D''(x_0)=0,\quad S_D''(x_N)=0. \qquad (8)$$

Согласно [I], эта задача имеет единственное решение.

Предположим, что построенная выше система B-сплайнов образует базис. Тогда s_D можно представить в виде

$$s_D(x) = \sum_{p=-1}^{N+1} a_p B_p(x),$$

где коэффициенты a_p, $p=-1,\dots,N+1$, определяются из системы

$$\left.\begin{array}{ll} a_{-1}B_{-1}(x_0) + a_0B_0(x_0) + a_1B_1(x_0) & = 1, \\ a_{-1}B''_{-1}(x_0) + a_0B''_0(x_0) + a_1B''_1(x_0) & = 0, \\ a_0B_0(x_1) + a_1B_1(x_1) + a_2B_2(x_1) & = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{k-2}B_{k-2}(x_{k-1}) + a_{k-1}B_{k-1}(x_{k-1}) + a_kB_k(x_{k-1}) & = 0, \end{array}\right\} \qquad (9')$$

$$\left.\begin{array}{ll} a_kB_k(x_k) + a_{k+1}B_{k+1}(x_k) & = 0, \\ a_kB_k(x_{k+1}) + a_{k+1}B_{k+1}(x_{k+1}) + a_{k+2}B_{k+2}(x_{k+1}) & = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{N-1}B_{N-1}(x_N) + a_NB_N(x_N) + a_{N+1}B_{N+1}(x_N) & = 0, \\ a_{N-1}B''_{N-1}(x_N) + a_NB''_N(x_N) + a_{N+1}B''_{N+1}(x_N) & = 0, \end{array}\right\} \qquad (9'')$$

Ясно,что подсистема (9") может быть решена независимо от (9').Поскольку сплайн s_D существует и единствен, то определитель всей системы,а следовательно,и определители подсистем (9'),(9") отличны от нуля. Так как система (9") однородная, то она имеет только тривиальное решение $a_i = 0$, $i = k,\dots,N+1$. Далее, рассматривая все уравнения из (9'),кроме первого,получаем $a_j = 0$, $j=-1,\dots,k-1$. Таким образом, $s_D(x) \equiv 0$, что противоречит (8) и, следовательно, построенная система функций $B_p(x)$, $p=-1,\dots,N+1$, не образует базиса.

Исследуем вопрос о линейной независимости B-сплайнов в случае, когда условия (5)-(7) выполнены.

ЛЕММА I. Пусть $s_D(x) \equiv 0$ при $x \notin (x_{p-1}, x_{p+2})$. Если

$$G_p = \gamma_p\gamma_{p+1} + \alpha_{p+1}\beta_p \neq 0, \qquad (10)$$

то $s_D(x) \equiv 0$ при $x \in [a,b]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем строить сплайн на интервале (x_{p-1}, x_{p+2}). Используя (I),(3), получаем систему относительно неизвестных M_p, M_{p+1}

$$\left.\begin{aligned} -(h_p+h_{p-1})\gamma_p M_p + (h_p+h_{p+1})\beta_p M_{p+1} &= 0, \\ (h_p+h_{p-1})\alpha_{p+1} M_p + (h_p+h_{p+1})\gamma_{p+1} M_{p+1} &= 0, \end{aligned}\right\}$$

определитель которой равен $-(h_{p-1}+h_p)(h_p+h_{p+1})(\gamma_p\gamma_{p+1}+\alpha_{p+1}\beta_p)$ и отличен от нуля в силу (I0). Следовательно, $M_p = M_{p+1} = 0$, и, таким образом, $S_D(x) \equiv 0$, $x \in [a,b]$.

ТЕОРЕМА I. *Пусть выполнены условия*

$$R_p > 0, \quad A_p \neq 0, \quad D_p \neq 0, \quad p = -1,\ldots,N+1,$$
$$G_p \neq 0, \quad p = -2,\ldots,N+1.$$

Тогда функции $B_p(x)$, $p=-1,\ldots,N+1$, *линейно-независимы и образуют базис в пространстве дискретных кубических сплайнов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО опирается на лемму I и полностью аналогично доказательству теоремы I.2 из [I,с.2I].

Как отмечалось выше, в практических приложениях удобны нормализованные B-сплайны. Очевидно, для нормализации базиса $\{B_p(x)\}$ нужно найти такие b_p, чтобы сплайны $\tilde{B}_p(x) = b_p B_p(x)$, $p=-1,\ldots$ $\ldots, N+1$, удовлетворяли соотношению

$$\sum_{p=-1}^{N+1} \tilde{B}_p(x) \equiv 1, \quad x \in [a,b].$$

Если дискретный сплайн удовлетворяет условиям $S''_D(x_0) = 0$, $S_D(x_j) = 1$, $j = 0,\ldots,N$, $S''_D(x_N) = 0$, то, в силу единственности интерполяции, $S_D(x) \equiv 1$, $x \in [a,b]$. Поэтому если коэффициенты b_p вычислить из системы

$$\left.\begin{aligned} &b_{-1}B''_{-1}(x_0) + b_0B''_0(x_0) + b_1B''_1(x_0) = 0, \\ &b_{i-1}B_{i-1}(x_i) + b_iB_i(x_i) + b_{i+1}B_{i+1}(x_i) = 1, \quad i = 0,\ldots,N, \\ &b_{N-1}B''_{N-1}(x_N) + b_NB''_N(x_N) + b_{N+1}B''_{N+1}(x_N) = 0, \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

которая имеет единственное решение, легко определяемое методом прогонки, то сплайны $\tilde{B}_p(x) = b_pB_p(x)$ образуют нормализованный базис.

Целью наших дальнейших исследований является получение достаточных условий существования базиса, более простых, чем (5)-(7), (10). Эти условия будем искать для некоторых наиболее важных в практических приложениях частных случаев сетки Δ и параметров ε_i.

§2. Дискретные B-сплайны в случае $\varepsilon_i = \varepsilon$

Пусть $\varepsilon_i = \varepsilon$, $i = -3, \ldots, N+3$. Проверим выполнение условий теоремы I. Имеем:

$$R_p = 9 + (h_{p-1} - h_p)^2 > 0 ,$$

$$A_p = -3(h_{p-2} + h_{p-1} + h_p) \neq 0,$$

$$D_p = 3(h_{p-1} + h_p + h_{p+1}) \neq 0, \quad p = -1, \ldots, N+1,$$

$$G_p = 3h_p(h_{p-1} + h_p + h_{p+1}) \neq 0, \quad p = -2, \ldots, N+1.$$

Итак, достаточные условия существования и линейной независимости базисных функций выполнены. Следовательно, при $\varepsilon_i = \varepsilon$, $i = -3, \ldots, N+3$, базис в пространстве дискретных кубических сплайнов можно построить на произвольной сетке. Положим

$$\tilde{M}_p = \frac{2}{(h_{p-2} + h_{p-1} + h_p)(h_{p-1} + h_p + h_{p+1})} .$$

Тогда

$$B_p(x_{p-2}) = B_p(x_{p+2}) = 0, \qquad M_{p-2} = M_{p+2} = 0 ,$$

$$B_p(x_{p-1}) = \frac{h_{p-2}^2 - \varepsilon^2}{(h_{p-2} + h_{p-1})(h_{p-2} + h_{p-1} + h_p)},$$

$$M_{p-1} = \frac{6}{(h_{p-2} + h_{p-1})(h_{p-2} + h_{p-1} + h_p)},$$

$$B_p(x_p) = \frac{(2h_p + h_{p+1})(h_{p-1}^2 + h_{p-1}h_p + \varepsilon^2) + (2h_{p-1} + h_{p-2})(h_p^2 + h_p h_{p+1} + \varepsilon^2)}{(h_{p-1} + h_p)(h_{p-2} + h_{p-1} + h_p)(h_{p-1} + h_p + h_{p+1})},$$

$$M_p = -\frac{6}{h_{p-1} + h_p}\left(\frac{1}{h_{p-2} + h_{p-1} + h_p} + \frac{1}{h_{p-1} + h_p + h_{p+1}}\right),$$

$$B_p(x_{p+1}) = \frac{h_{p+1}^2 - \varepsilon^2}{(h_p + h_{p+1})(h_{p-1} + h_p + h_{p+1})},$$

$$M_{p+1} = \frac{6}{(h_{p+1} + h_p)(h_{p-1} + h_p + h_{p+1})}$$

и полученные B-сплайны образуют нормализованный базис. В самом деле, легко проверить, что

$$\sum_{p=-1}^{N+1} B_p(x_i) = B_{i-1}(x_i) + B_i(x_i) + B_{i+1}(x_i) = 1, \quad i = 0,\dots,N,$$

$$B''_{j-1}(x_j) + B''_j(x_j) + B''_{j+1}(x_j) = 0, \quad j = 0, N,$$

и поэтому $\sum_p B_p(x) \equiv 1, \quad x \in [a,b]$.

Итак, в рассматриваемом случае удалось получить нормализованный базис в явном виде, не прибегая к решению системы (II).

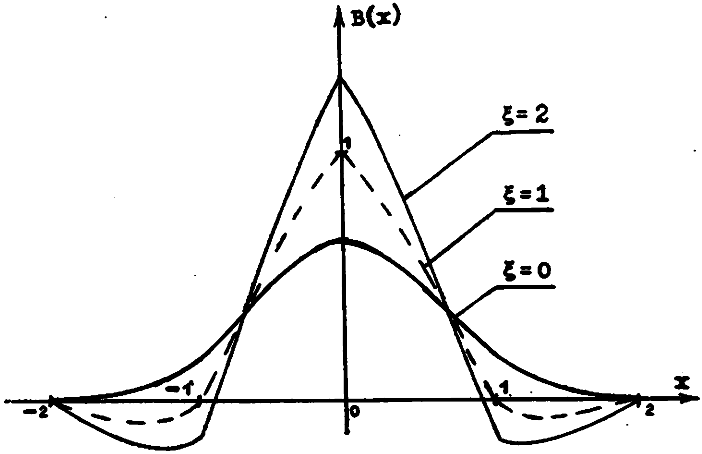
§3. Дискретные кубические B-сплайны на равномерной сетке

Будем рассматривать дискретные кубические сплайны на сетке $\Delta : x_i = a + ih,\ i = -3,\dots,N+3,\ x_0 = a,\ x_N = b$. При $\varepsilon_i = \varepsilon,\ i = -3,\dots,N+3$, мы имеем случай, рассмотренный в §2. Пусть $\varepsilon^2 = \xi h^2$, тогда узловые значения сплайна $B_k(x)$ и его моменты записываются в виде:

$$
\begin{aligned}
&B_k(x_{k-2}) = 0, && M_{k-2} = 0,\\
&B_k(x_{k-1}) = (1-\xi)/6, && M_{k-1} = 1/h,\\
&B_k(x_k) = (2+\xi)/3, && M_k = -2/h,\\
&B_k(x_{k+1}) = (1-\xi)/6, && M_{k+1} = 1/h,\\
&B_k(x_{k+2}) = 0, && M_{k+2} = 0.
\end{aligned}
$$

Вид B-сплайна определяется величиной $\xi = \varepsilon^2/h^2$. Эту зависимость иллюстрирует рисунок, где изображены B-сплайны на сетке с шагом $h=1$ для нескольких значений ξ. При $\xi = 0$ имеем классический кубический B-сплайн класса C^2. Интересен случай $\xi = 1$, когда дискретный B-сплайн совпадает с дискретным фундаментальным сплайном. Очевидно, что $B_k(x_k) \to \infty$, $B_k(x_{k-1}) \to -\infty$ при $\xi \to \infty$.

Теперь предположим, что набор $\varepsilon_i,\ i = 1,\dots,N-1$, произвольный Рассмотрим систему (4), которая в случае равномерной сетки может быть исследована более полно, чем это сделано в §1.



Имеем:

$$\left.\begin{aligned}
&2h\left(3h+\frac{\varepsilon^2_{p-1}-\varepsilon^2_{p-2}}{h}\right)M_{p-1}+(h^2-\varepsilon^2_{p-1})M_p-6y_p=0,\\
&\left(3-\frac{\varepsilon^2_{p-2}-2\varepsilon^2_{p-1}+\varepsilon^2_p}{2h^2}\right)M_{p-1}+\left(3-\frac{\varepsilon^2_{p-1}-2\varepsilon^2_p+\varepsilon^2_{p+1}}{2h^2}\right)M_p+\\
&\qquad+\left(3-\frac{\varepsilon^2_p-2\varepsilon^2_{p+1}+\varepsilon^2_{p+2}}{2h^2}\right)M_{p+1}=0,\\
&(h^2-\varepsilon^2_{p+1})M_p+2h\left(3h-\frac{\varepsilon^2_{p+2}-\varepsilon^2_{p+1}}{h}\right)M_{p+1}-6y_p=0.
\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

Будем искать однопараметрическое решение системы (I2), которое, вообще говоря, существует не всегда.

ЛЕММА 2. Пусть выполнено одно из условий:

$$|\varepsilon^2_k-\varepsilon^2_{k+1}|<3h^2,\ k=1,\ldots,N-2, \tag{13}$$

$$|\varepsilon^2_k-\varepsilon^2_{k+1}|>3h^2,\ \mathrm{sgn}(\varepsilon^2_k-\varepsilon^2_{k+1})=-\mathrm{sgn}(\varepsilon^2_{k+1}-\varepsilon^2_{k+2}),\ k=1,\ldots,N-3. \tag{14}$$

Тогда система (I2) имеет нетривиальное решение относительно неизвестных M_{p-1}, y_p, M_{p+1}, однозначно определяемое параметром M_p.

Утверждение леммы становится очевидным при рассмотрении определителя системы (I2).

Для набора ε_i, $i=1,\dots,N-1$, удовлетворяющего (I3) или (I4), можно выписать значения сплайна $B_p(x)$ и его моментов в узлах сетки:

$$B_p(x_{p-2}) = B_p(x_{p+2}) = 0, \quad M_{p-2} = M_{p+2} = 0,$$

$$B_p(x_{p-1}) = -\frac{h^2-\varepsilon_{p-2}^2}{6\Delta_p} D_p M_p,$$

$$M_{p-1} = -\frac{D_p}{\Delta_p} M_p,$$

$$B_p(x_p) = -\frac{M_p}{12}\Big\{\frac{2h}{\Delta_p}(\gamma_p(\alpha_p(3-\varepsilon^2(x_p,x_{p+1},x_{p+2})) -$$

$$-\beta_p(3-\varepsilon^2(x_{p-2},x_{p-1},x_p)))+2\alpha_p\beta_p(3-\varepsilon^2(x_{p-1},x_p,x_{p+1}))) -$$

$$-(2h^2-\varepsilon_{p-1}^2-\varepsilon_{p+1}^2)\Big\},$$

$$B_p(x_{p+1}) = \frac{h^2-\varepsilon_{p+2}^2}{6\Delta_p} A_p M_p,$$

$$M_{p+1} = \frac{A_p}{\Delta_p} M_p,$$

где

$$\Delta_p=\alpha_p(3-\varepsilon^2(x_p,x_{p+1},x_{p+2}))+\beta_p(3-\varepsilon^2(x_{p-2},x_{p-1},x_p)).$$

Для практики более интересен случай, когда ε_i удовлетворяют условиям (I3). В дальнейшем мы будем рассматривать только такие дискретные сплайны.

Выясним условия линейной независимости для построенной системы функций $B_p(x)$, $p=-1,\dots,N+1$. В рассматриваемом случае (I0) принимает вид: $4h^2G_p \doteq (6h^2+2(\varepsilon_p^2-\varepsilon_{p-1}^2))(6h^2-2(\varepsilon_{p+2}^2-\varepsilon_{p+1}^2)) +$

$+ (\varepsilon^2_{p+1}-\varepsilon^2_{p-1})(\varepsilon^2_{p+2}-\varepsilon^2_p) \neq 0$. Пусть $\varepsilon^2_p \le \varkappa h^2$, $p = -3,\dots,N+3$, тогда имеем неравенство $4h^2G_p \ge 3h^4(\varkappa^2-8\varkappa+12) > 0$, которое выполняется при $\varkappa < 2$ и $\varkappa > 6$. Объединяя эти условия с (I3), получаем $\varepsilon^2_p < 2h^2$ и $rh^2 < \varepsilon^2_p < (r+3)h^2$, $r \ge 6$, $p = -3,\dots,N+3$.

В результате доказана

ЛЕММА 3. Пусть выполнено одно из условий

$$0 \le \varepsilon^2_p < 2h^2, \quad p = -3,\dots,N+3, \tag{15}$$

$$rh^2 < \varepsilon^2_p < (r+3)h^2, \quad r \ge 6,\ p = -3,\dots,N+3. \tag{16}$$

Тогда носитель $B_p(x)$ совпадает с интервалом (x_{p-2},x_{p+2}).

Из приведенных лемм вытекает следующая

ТЕОРЕМА 2. Если выполнено одно из условий (I5),(I6), то на равномерной сетке система $B_p(x), p=-1,\dots,N+1$, линейно-независима и образует базис.

Для нормализации полученного базиса нужно решить систему (II). В §2 удалось получить нормирующие множители в явном виде, не решая системы, причем каждый из них зависит только от соотношения длин интервалов, составляющих носитель соответствующего B-сплайна. Такую нормировку будем называть локальной. Однако в общем случае выписать решение системы (II) в явном виде нельзя.

В самом деле, пусть на равномерной сетке с шагом h, $\varepsilon_{i-1} = \varepsilon$ и $\varepsilon_{i+2} = E \neq h$ удовлетворяют (I5), а остальные ε_j, $j \neq i-1, i+2$, равны нулю. Тогда от параметров ε и E будут зависеть только сплайны $B_p(x)$, $p = i-3,\dots,i+4$. Предположим, что существует локальная нормализация, т.е. $B_p(x)$, $p \notin \{i-3,\dots,i+4\}$, являются кубическими нормализованными B-сплайнами класса C^2. Из уравнений системы (II), соответствующим узлам интерполяции $x_{i-4},\dots,x_{i-1}$, получаем

$$b_i = -\frac{1}{h^2}\cdot\frac{(6h^2-\varepsilon^2)(4h^2-E^2)}{12h^4-4h^2(\varepsilon^2+E^2)+\varepsilon^2E^2}.$$

Кроме того, из уравнений, соответствующим узлам интерполяции $x_{i+1},\dots,x_{i+5}$, получаем

$$b_i = -\frac{3}{2h^2}\cdot\frac{4h^2-E^2}{6h^2-\varepsilon^2}\left\{\frac{10h^2}{h^2-E^2} - \frac{2h^2(6h^2-E^2)(8h^2-3\varepsilon^2)}{(h^2-E^2)(12h^4-4h^2(\varepsilon^2+E^2)+\varepsilon^2E^2)}\right\}.$$

Естественно, оба найденных значения для b_i должны совпадать, т.е. должно выполняться условие $10h^2(12h^4 - 4h^2(\varepsilon^2 + E^2) + \varepsilon^2E^2) - 3h^2(6h^2 - E^2)(8h^2 - 3\varepsilon^2) \equiv (6h^2 - \varepsilon^2)^2(h^2 - E^2)$. Но тождественное равенство невозможно, поскольку в правой части есть член ε^4, а в левой части он отсутствует.

Таким образом, для нормализации дискретных B-сплайнов, в отличие от кубических B-сплайнов класса C^2, в общем случае нужно решать систему (II), и нормирующие множители, вообще говоря, зависят от всей совокупности величин h_i и ε_i.

§4. Дискретные кубические B-сплайны с оптимальными ε_i на кусочно-равномерной сетке

Параметры $\varepsilon_i^2=(h_{i-1}^2-h_{i-1}h_i+h_i^2)/2$ являются оптимальными при приближении дискретным сплайном второй производной интерполируемой функции [I,с.202]. Изучим вопрос о построении B-сплайнов при оптимальных значениях ε_i на кусочно-равномерной сетке. Не умаляя общности, рассмотрим сетку с шагами $h_i = h$, $i = -3,\dots,k-1$, $h_j = H$, $j = k,\dots,N+2$, где, для определенности, возьмем $H > h$.

Имеем

$$\varepsilon_i^2 = h^2/2, \quad i = -2,\dots,k-1,$$

$$\varepsilon_k^2 = (h^2 - hH + H^2)/2, \; \varepsilon_j^2 = H^2/2, \quad j = k+1,\dots,N+2.$$

Сплайны $B_p(x)$, $p\in\{-1,\dots,k-3,k+3,\dots,N+1\}$, существуют и образуют линейно-независимые системы на своих участках сетки. Для сплайнов $B_p(x)$, $p=k-2,\dots,k+2$, проверим условия (5)-(7),(I0) и в случае их нарушения будем искать соотношения шагов сетки, при которых возможно построение базиса.

Обозначим $\varkappa = H/h > 1$, тогда $R_{k-2} = 9 > 0$, $A_{k-2}D_{k-2}G_{k-2} = -\frac{81}{4}h^4(\varkappa-3)^2(\varkappa+2)^2 \neq 0$ при $\varkappa\neq 3$; $R_{k-1}=9/4>0$, $A_{k-1}D_{k-1}G_{k-1} = -\frac{3}{128}h^4\cdot\frac{1}{\varkappa^2}(\varkappa-3)(\varkappa+2)(\varkappa^4-2\varkappa^3-23\varkappa^2-36\varkappa-12)^2 \neq 0$ при $\varkappa\neq 3$ и $\varkappa\neq\varkappa^*$,

где $\varkappa^* \approx 6{,}466I$ – положительный корень уравнения $\varkappa^4-2\varkappa^3-23\varkappa^2-36\varkappa-12 = 0$. Далее $R_k = h^2 + 121/9 > 0$, $A_kD_kG_k = h^4/512\cdot\varkappa^{-4}\times(\varkappa^4-2\varkappa^3-23\varkappa^2-36\varkappa-12)(12\varkappa^4+36\varkappa^3+23\varkappa^2+2\varkappa-1)\neq 0$ при $\varkappa\neq\varkappa^*$,

$$R_{k+1} = \frac{h^2}{36} + \left(\frac{49}{18}\right)^2 > 0,$$

$$A_{k+1}D_{k+1}G_{k+1} = -\frac{81}{8}h^4\varkappa^{-3}\left(\varkappa-\frac{1}{3}\right)^2\left(\varkappa+\frac{1}{2}\right)^2(12\varkappa^4+36\varkappa^3+23\varkappa^2+2\varkappa-1) \neq 0.$$

Наконец, $R_{k+2} = 9 > 0$, $A_{k+2}D_{k+2}G_{k+2} = -729\,h^2H^2\left(\varkappa-\frac{1}{3}\right)\left(\varkappa+\frac{1}{2}\right) \neq 0.$

Таким образом, при $\varkappa = H/h \neq 3$ и $\varkappa \neq \varkappa^*$ условия (5)-(7),(10) выполняются, т.е. B-сплайны, определяемые формулами из §I, образуют базис в пространстве дискретных кубических сплайнов с оптимальными ε_i на кусочно-равномерной сетке. Нормализация базиса для рассматриваемого случая достигается путем решения системы (II).

В заключение автор выражает благодарность В.Л.Мирошниченко за постановку задачи и руководство работой.

Литература

I. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. -М.: Наука, 1980. - 352 с.

2. SCHUMAKER L.L. Spline function: basic theory.- New York a.o.: Wiley &Sons,1981.-553 p.

Поступила в ред.-изд.отд.
7 мая 1986 года