СПЛАЙНЫ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ
(Вычислительные системы)
1986 год Выпуск 115

УДК 519.65

# ЯВНЫЕ ФОРМУЛЫ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

А. Имамов

Настоящая работа является продолжением статьи [I]. Здесь мы построим новые явные формулы интерполирования функций многих переменных, обобщающие известные формулы Лагранжа, Шепарда и Лебедева [2-4], и изучим некоторые их свойства. Кроме того, рассматриваются локальные интерполяционные формулы, и оценивается точность интерполяции.

I. Обобщенная формула интерполирования Лагранжа. Основная задача формулируется так. Пусть $R^n$ – $n$-мерное евклидово пространство точек $t=[t_1,\dots,t_n]$ с обычной нормой $|t|=\sqrt{t_1^2+\dots+t_n^2}$ и $\omega = \{a_i \in \Omega,\ i=0,1,\dots,N\}$ – произвольная сетка узлов, заданных в ограниченной области $\Omega \subset R^n$, $a_i \neq a_k$. Требуется найти функцию $I_N(x;t)$ такую, что $I_N(x;a_i)=x(a_i)$, $i=0,1,\dots,N$, где $x(a_i)$, $i=0,1,\dots,N$, значения некоторой функции.

Пусть $\psi(t)$ – достаточно гладкая функция такая, что $\psi(a_i) \neq \psi(a_k)$ для $i \neq k$.

В [I] введены разделенные разности $k$-го порядка функции $x(t)$ относительно функции $\psi(t)$ по точкам $a_0, a_1, \dots, a_k$

$$x_\psi(a_0;a_1;\dots;a_k) = \sum_{j=0}^{k} x(a_j) \prod_{i\neq j}^{k} [\psi(a_j)-\psi(a_i)]^{-1}, \tag{1}$$

и показано, что функцию $I_N(x;t)$ можно представить в форме Ньютона

$$I_N(x;t) = x(a_0) + [\phi(t)-\phi(a_0)]\cdot x_\phi(a_0;a_1)+ \ldots$$
$$\ldots + \prod_{k=0}^{N-1}[\phi(t) - \phi(a_k)]\cdot x_\phi(a_0;a_1;\ldots;a_N). \quad (2)$$

Кроме того, доказан следующий результат об остаточном члене.

ТЕОРЕМА I. Справедливо равенство

$$x(t) - I_N(x;t) = \prod_{i=0}^{N}[\phi(t)-\phi(a_i)]\cdot x_\phi(t;a_0;\ldots;a_N). \quad (3)$$

Интерполяционная формула $I_N(x;t)$ восстанавливает степени $(\phi(t))^p, p = 0,1,\ldots$ $\ldots, N$ т.е.

$$I_N((\phi(t))^p;t) = (\phi(t))^p,\ p=0,1,\ldots,N. \quad (4)$$

Из сформулированной теоремы вытекает следующий вывод. Если для функции $x(t)$ существует константа $M=M(N,\phi,\Omega)$ такая, что

$$|x_\phi(t;a_0;\ldots;a_N)| \le M < \infty, \quad (5)$$

то справедлива оценка

$$|x(t) - I_N(x;t)| \le M \prod_{i=0}^{N} |\phi(t) - \phi(a_i)|. \quad (6)$$

Отметим, что формулы (I)-(6) в одномерном случае для $\phi(t)=t$ превращаются в известные соотношения для интерполяции Лагранжа.

Уточним оценку (6) на треугольнике $T_i \subset R^2$ с вершинами $a_i$, $a_{i+1}, a_{i+2}$ для вспомогательной функции $\phi(t) = |t|$. Обозначим интерполяционную функцию через $u_i(x;t)$. Пусть $S_i$ – окружность радиуса $r_i$, проходящая через точки $a_i, a_{i+1}, a_{i+2}$.

ТЕОРЕМА 2. Если для функции $x(t)$ имеет место оценка $x_\phi(t;a_i;\ldots;a_{i+2}) \le M(3,|t|,T_i)$, $t \in T_i$, то справедливо неравенство

$$|x(t) - u_i(x;t)| \le M(3,|t|,T_i)\cdot r_i^3,\ t \in T_i. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (6) имеем

$$|x(t) - u_i(x;t)| \le M_i\cdot\left|\prod_{j=0}^{2}[|t| - |a_j|]\right| \le M_i\cdot \prod_{j=0}^{2}|t-a_j| \le M_i r_i^3,$$
$$M_i = M(3,|t|,T_i).$$

СЛЕДСТВИЕ I. Пусть функция $S_N(x;t)$ такова, что ее сужение на $T_i$ совпадает с $u_i(x;t)$. Тогда справедлива оценка

$$|x(t) - S_N(x;t)| \le Mh^3, \quad t \in \bigcup_i T_i, \tag{8}$$

где $M = \max_i M_i$, $h = \max_i r_i$.

2. Обобщение формул интерполирования Шепарда и Лебедева. Пусть $\phi_k(t)$ – достаточно гладкая функция такая, что $\phi_k(a_k) = 0$, $\phi_k(a_j) \ne 0$, $k \ne j$, и даны числа $A_i > 0$, $i=0,1,\dots,N$. Положим

$$w_i(t) = \prod_{k\ne i}^{N} \phi_k(t), \quad \varphi_i(t) = A_i w_i(t) \cdot \Big(\sum_{i=0}^{N} A_i w_i(t)\Big)^{-1}. \tag{9}$$

Тогда формула

$$I_N(x;t) = \sum_{i=0}^{N} x(a_i)\varphi_i(t) = \sum_{i=0}^{N} A_i x(a_i)\, w_i(t)\Big(\sum_{i=0}^{N} A_i w_i(t)\Big)^{-1}, \tag{10}$$

является интерполяционной, т.е. $I_N(x;a_k) = x(a_k)$, $k = 0,1,\dots,N$.

В самом деле, $w_i(a_i) \ne 0$, $w_i(a_j) = 0$, при $i \ne j$. Поэтому $\varphi_i(a_i) = 1$ и $\varphi_i(a_j) = 0$ при $i \ne j$, и, следовательно, $I_N(x;t)$ является интерполяционной формулой. Формула (10) обобщает формулу Шепарда (см., например, [2]), в которой $\phi_k(t) = |t - a_k|^\alpha$.

Пусть теперь функция $u_i(t)$ имеет в окрестности точки $a_i$ касание p-го порядка с функцией $x(t)$, т.е.

$$|x(t) - u_i(t)| \le C|t-a_i|^p, \quad C > 0,$$

а $\{\varphi_i(t)\}$ – разложение единицы в области $\Omega$: $\sum_{i=0}^{N} \varphi_i(t) = 1$, $t \in \Omega$.

В частности, в качестве $u_i(t)$ можно брать интерполяционные формулы или конечные суммы формулы Тейлора, а в качестве разложения единицы функции

$$\varphi_i(t) = \frac{A_i \prod_{k\ne i}^{N} |t - a_k|^\alpha}{\sum_{i=0}^{N} A_i \prod_{j\ne i}^{N} |t-a_j|^\alpha}, \quad i = 0,1,\dots,N. \tag{11}$$

Тогда формула

$$I_N(x;t) = \sum_{i=0}^{N} A_i u_i(t) \cdot w_i(t)\Big(\sum_{i=0}^{N} A_i \cdot w_i(t)\Big)^{-1} \tag{12}$$

обобщает формулу Лебедева [3]. Формула (12) превращается в (9), если принять $u_i(t) = x(a_i)$, $i=0,1,\dots,N$.

Ясно, что если $A_i > 0$, $w_i(t)>0$, $i=0,1,\dots,N$, то $L_N(x;t)$ является выпуклой комбинацией функций $u_i(t)$, $i=0,1,\dots,N$. Это свойство позволяет доказать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $A_i$, $w_i(t)>0$, $i=0,1,\dots,N$, и в качестве $u_i(t)$ выбраны $u_i(x;t)$ из теоремы 2. Тогда справедливо неравенство

$$|x(t) - L_N(x;t)| \le Mh^3, \quad t \in \bigcup_i T_i, \tag{13}$$

где число $M$ определено в теореме 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Система функций $\{\varphi_i(t)\}$ из (9) является разложением единицы. Поэтому

$$x(t) - L_N(x;t) = \sum_{i=0}^{N} x(t)\varphi_i(t) - \sum_{i=0}^{N} u_i(x;t)\varphi_i(t) =$$

$$= \sum_{i=0}^{N} [x(t) - u_i(x;t)]\varphi_i(t),$$

и $x(t) - L_N(x;t)$ является выпуклой комбинацией функций $x(t) - u_i(x;t)$. Следовательно, величина $|x(t)-L_N(x;t)|$ не превосходит максимума $|x(t)-u_i(x;t)|$. Остальное следует из теоремы 2.

3. Локальные формулы интерполирования. В.И.Лебедев [3] отметил, что если $u_i(t)$ - финитные функции, то в числителе формулы (12) отличны от нуля только часть слагаемых. Р.Франк [4] также предлагает в качестве $w_i(t)$ брать финитные функции. Тогда в формуле (12) количество ненулевых слагаемых и в числителе, и в знаменателе мало по сравнению с $N$.

Пусть $\omega(s)$ одна из функций одной переменной

$$\omega(s) = \begin{cases} 1 - |s|, & |s| \le 1, \\ 0, & |s| > 1; \end{cases}$$

$$\omega(s) = \begin{cases} 1 - 3s^2 + 2|s|^3, & |s| \le 1, \\ 0, & |s| > 1. \end{cases}$$

Тогда функции

$$w_k(t) = \omega(|t-a_k|/r_k),$$

$$w_k(t) = \prod_{i=1}^{n} \omega((t_i-a_{ik})/r_k),$$

где $r_k$ - некоторые числа, $a_{ik}$ - $i$-я компонента $a_k \in R^n$, являются финитными функциями. В частности, $r_k$ могут быть радиусами окружностей $S_k$.

Рассмотрим интерполяционную формулу

$$F_N(x;t) = \sum_{i=0}^{N} u_i(x;t)\omega(|t-a_i|/r_i)(\sum_{i=0}^{N} \omega(|t-a_i|/r_i)^{-1}. \qquad (14)$$

Ясно, что

$$F_N(x;t) = \sum_{i\in I} u_i(x;t)\omega(|t-a_i|/r_i)(\sum_{i=0}^{N} \omega(|t-a_i|/r_i)^{-1}, \qquad (15)$$

где множество I содержит максимум два индекса.

ТЕОРЕМА 4. Справедливо неравенство

$$|x(t) - F_N(x;t) \le Mh^3, \quad t \in \bigcup_i T_i,$$

где числа $M,h$ определены в теореме 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы очевидно.

Автор выражает благодарность В.Л.Мирошниченко за ценные замечания, высказанные по существу затронутого вопроса.

## Литература

1. ИМАМОВ А. Формула интерполирования функций многих переменных. -В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып. 75). Новосибирск, 1978, с. 50-55.

2. GORDON W.J.,WIXOM J.A. Shepard's method of "metric interpolation" to bivariate and "multivariate interpolation".- Math. Computation,1978,v.32,N 141,p.253-264.

3. ЛЕБЕДЕВ В.И. Об одном способе интерполяции в n-мерном пространстве по произвольным узлам и некоторых квадратурных формулах. -Новосибирск, 1975. -12 с. (Препринт/ВЦ СО АН СССР: №10).

4. FRANKE R. Locally determined smooth interpolation at irregularly spaced points in several variables.-J.Inst.Math.Applics, 1977,v.19,p.471-482.

Поступила в ред.-изд.отд.
21 марта 1986 года