СПЛАЙНЫ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ
(Вычислительные системы)
1986 год Выпуск 115

УДК 517.968:519.651

СПЛАЙНЫ В ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВАХ И УСЛОВНАЯ КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

Н.Н. Павлов

Хорошо известно, что задачи, связанные с решением интегральных уравнений Вольтерра и Фредгольма первого рода, относятся к некорректным. Решения таких уравнений неустойчивы по отношению к возмущениям правых частей. В статье показывается,что для интегральных уравнений первого рода, преобразуемых путем дифференцирования к уравнениям второго рода с ограниченными обратными операторами, сплайны в выпуклых множествах образуют класс данных, на которых задача становится корректной.

Изложению основного результата (п.2) - доказательства устойчивости решений интегральных уравнений с данными из класса сплайнов в выпуклых множествах, предшествует получение оценок для погрешности аппроксимации производных функции сплайнами в выпуклых множествах (п.1). В третьем пункте обсуждаются результаты численного эксперимента.

1. Пусть Δ - есть некоторое разбиение отрезка $[a,b]$: $a = x_1 < \ldots < x_N = b$; z_i $(i=1,\ldots,N)$, $\varepsilon \geq 0$ - вещественные числа. Рассмотрим множество функций $G = \{\varphi \in \widetilde{W}_2^k[a,b]:\ z_i - \varepsilon \leq \varphi(x_i) \leq z_i + \varepsilon,\ i = 1,\ldots,N\}$, где $\widetilde{W}_2^k[a,b]$ - подмножество периодических функций из $W_2^k[a,b]$. Множество G непусто, если $|z_1 - z_N| \leq \varepsilon$.

Решением задачи о минимизации функционала

$$J(\varphi) = \int_a^b |\varphi^{(k)}(x)|^2 dx = \|\varphi^{(k)}\|_2^2 \qquad (1)$$

(здесь $\varphi^{(k)}(x) = \dfrac{d^k}{dx^k}\varphi(x)$, $\|\cdot\|_q = \|\cdot\|_{L_q[a,b]}$)

на выпуклом множестве G служит полиномиальный периодический сплайн S степени $2k-1$, дефекта I [I], т.е. такая функция, что

I) на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ она совпадает с многочленом степени $2k-1$;

2) $S \in C^{2(k-1)}[a,b]$;

3) $S^{(q)}(a) = S^{(q)}(b)$, $q = 0,\ldots,2(k-1)$.

Для того, чтобы сплайн S из множества G доставлял минимум функционалу J, необходимо и достаточно выполнение следующих условий, называемых условиями характеризации: пусть $D_i = S^{(2k+1)}(x_i+0) - S^{(2k-1)}(x_i-0)$, тогда

$$(-1)^k D_i \le 0 \quad \text{при} \quad S(x_i) = z_i + \varepsilon,$$

$$D_i = 0 \quad \text{при} \quad z_i - \varepsilon < S(x_i) < z_i + \varepsilon,$$

$$(-1)^k D_i \ge 0 \quad \text{при} \quad S(x_i) = z_i - \varepsilon.$$

Пусть z_i - приближенные значения некоторой периодической функции $f(x)$ в узлах сетки Δ такие, что

$$|z_i - f(x_i)| \le \varepsilon, \quad i = 1,\ldots,N. \tag{2}$$

Для погрешности аппроксимации сплайнами в выпуклых множествах производных f в [2,3] получены оценки:

I) при $k=1$ (сплайн первой степени) и $f \in C^2[a,b]$

$$\| f' - S' \|_2 \le \frac{\sqrt{2}}{4} (b-a)^{1/2} \bar{h} \| f'' \|_\infty + 2[\varepsilon (b-a) \| f'' \|_\infty]^{1/2}, \tag{3}$$

где $\bar{h} = \max_i h_i$, $h_i = x_{i+1} - x_i$;

2) при $k=2$ (кубический сплайн), $f \in C^4[a,b]$, $h_i = h$

$$\| f'' - S'' \|_2 \le \frac{1}{8} \left[\frac{5}{6} (b-a) \right]^{1/2} h^2 \| f^{(4)} \|_\infty + 2[3\varepsilon (b-a) \| f^{(4)} \|_\infty]^{1/2} = E_2, \tag{4}$$

$$\| f' - S' \|_\infty \le \frac{2}{b-a} E_0 + \frac{\sqrt{3}}{3} (b-a)^{1/2} E_2, \tag{5}$$

где

$$E_0 = 2\varepsilon + \frac{h^2}{8} \| f'' \|_\infty + \frac{\sqrt{3}}{8} h^{3/2} \| f'' \|_2$$

или

$$E_0 = \frac{1 + 3\sqrt{3}}{2} \varepsilon + \frac{5}{384} h^4 \| f^{(4)} \|_\infty ,$$

а E_2 дается формулой (4). При $E_0/E_2 \le \sqrt{3}(b-a)^{3/2}/12$ оценка (5) может быть уточнена

$$\|f' - s'\|_\infty \le \frac{\sqrt[3]{36}}{2}(E_0)^{1/3}(E_2)^{2/3} . \qquad (6)$$

Рассмотрим теперь вместо множества G, задаваемого дискретными ограничениями, множество $D = \{\varphi \in \widetilde{W}_2^k[a,b]:\ z(x)-\varepsilon \le \varphi(x) \le \le z(x)+\varepsilon,\ x\in[a,b]\}$, где z из $W_2^k[a,b]$. Множество D непусто при $\varepsilon>0$, если $|z(a)-z(b)|\le \varepsilon$. В случае $\varepsilon=0$ множество $D=\{z\}$, если $z\in\widetilde{W}_2^k[a,b]$, и пусто в противном случае.

Задача минимизации функционала (I) на множестве D приводит нас к функции s, которую мы также будем называть сплайном следующей структуры [4]:

I) область определения s – $[a,b]$ распадается на отрезки, на каждом из которых s либо многочлен $(2k-1)$-й степени, либо совпадает с $z-\varepsilon$ или $z+\varepsilon$;

2) $s \in W_2^k[a,b]$.

Укажем на связь, существующую между решениями этих двух задач. Пусть $z_i = z(x_i)$. Рассмотрим последовательность равномерных сеток $\{\Delta_N\}$ с шагом h_N на отрезке $[a,b]$, таких, что $h_N \to 0$. Если предположить, что сплайн s_N в выпуклом множестве G_N с сеткой Δ_N единствен при любом N, что имеет место, если каждое G_N содержит не более одного многочлена нулевой степени, то, как показано в [4], последовательность $\{s_N\}$ сходится в норме пространства $W_2^k[a,b]$ к s – решению задачи о минимизации функционала J на множестве D.

Оценки аппроксимации производных функции f сплайном в выпуклом множестве D получаются из оценок (3)-(6) путем предельного перехода $h \to 0$.

Получим такие оценки для производных произвольного порядка. Начнем с оценок в $L_2[a,b]$. Пусть s – сплайн степени $2k-1$ в выпуклом множестве D и пусть f – периодическая функция из $C^{2k}[a,b]$. В силу того, что $\|s^{(k)}\|_2^2 \le \|f^{(k)}\|_2^2$, квадрат нормы разности $f^{(k)} - s^{(k)}$ может быть оценен следующим образом:

$$\|f^{(k)} - s^{(k)}\|_2^2 = \|s^{(k)}\|_2^2 - \|f^{(k)}\|_2^2 + 2\int_a^b f^{(k)}(f^{(k)} - s^{(k)})dx \le$$

$$\le 2\int_a^b f^{(k)}(f^{(k)}-S^{(k)})dx \ . \tag{10}$$

Интегрированием по частям с учетом периодичности функций f и S получаем

$$\int_a^b f^{(k)}(f^{(k)}-S^{(k)})dx = (-1)^k \int_a^b f^{(2k)}(f-S)dx \ .$$

Но $|f-S|\le 2\varepsilon$, отсюда

$$(-1)^k\int_a^b f^{(2k)}(f-S)dx \le 2\varepsilon\,(b-a)\,\| f^{(2k)}\|_\infty \ . \tag{11}$$

Из (10) и (11) имеем

$$\|f^{(k)}-S^{(k)}\|_2 \le 2[\varepsilon(b-a)\|f^{(2k)}\|_\infty]^{1/2}. \tag{12}$$

Получим теперь оценку для погрешности аппроксимации сплайном в выпуклом множестве $(k-1)$-й производной в равномерной норме. Для этого воспользуемся неравенством для норм промежуточных производных функций из $W_r^k[a,b]$, имеющим вид

$$\|\varphi^{(k-1)}\|_\infty \le A\gamma^{-k+1+\frac{1}{p}}\|\varphi\|_p+\gamma^{1-\frac{1}{r}}B\|\varphi^{(k)}\|_r \ , \tag{13}$$

где параметр γ такой, что $0<\gamma\le b-a$, $A=(k-1)!/\|Q_{k-1}\|_{L_p[0,1]}$, Q_{k-1} – многочлен, наименее уклоняющийся от нуля в метрике $L_p[0,1]$, $B\le 1$ (этот результат принадлежит В.В.Вершинину; для получения неравенства использовалась техника, развитая в [6]). Положим в (13) $p=\infty$, $\gamma=b-a$, $r=2$, $B=1$ и подставим $\varphi=f-S$. Учитывая, что $\|Q_{k-1}\|_{L_\infty[0,1]}=2^{-2k+3}$, $\|f-S\|_\infty\le 2\varepsilon$, и используя для $\|f^{(k)}-S^{(k)}\|_2$ оценку (12), после минимизации правой части (13) по γ получаем

$$\|f^{(k-1)}-S^{(k-1)}\|_\infty\le \frac{4^{k-1}(k-1)!\,\varepsilon}{(b-a)^{k-1}}+2(b-a)[\varepsilon\|f^{(2k)}\|_\infty]^{1/2}, \tag{14}$$

если

$$[(b-a)\|f^{(2k)}\|_\infty/\varepsilon]^{1/2}\le 2^{2(k-1)}(k-1)!(k-1)/\left[(b-a)^{\frac{2k-1}{2}}\right],$$

в противном случае

$$\|f^{(k-1)}-S^{(k-1)}\|_\infty \le (2k-1)\times$$

$$\times\{[2/(k-1)]^{2(k-1)}(k-1)!\,\varepsilon^k[(b-a)\|f^{(2k)}\|_\infty]^{k-1}\}^{\frac{1}{2k-1}}. \tag{15}$$

Оценки (12) и (14),(15) показывают, что сплайн в выпуклом множестве устойчиво аппроксимирует производные функции, заданной с погрешностью. Действительно, если вместо f известна z, такая, что $\|f-z\|_{\infty}\le \varepsilon$, то, решая задачу о построении сплайна в выпуклом множестве D и затем дифференцируя его, получаем аппроксимацию производных с оценками (12) и (14),(15).

На практике информация о функции, как правило, имеет дискретный характер, поэтому и задача дифференцирования такой функции связана с построением сплайнов в выпуклых множествах с дискретными ограничениями. Вопрос о численном решении такой задачи, являющейся задачей квадратичного программирования, рассматривался в [5], где для ее решения был применен метод штрафов.

Следует отметить, что рассматриваемый подход к получению устойчивых аппроксимаций производных является конструктивным, ибо для построения сплайна в выпуклом множестве достаточно иметь лишь величины: z_i, $i=1,\dots,N,\varepsilon$, или $z(x),\varepsilon$.

2. Рассмотрим интегральное уравнение (уравнение Вольтерра) первого рода

$$\int_a^x K(x,t)y(t)dt = f(x), \quad x\in[a,b]. \tag{16}$$

Кроме обычных предположений о функциях $K(x,t)$ и $f(x)$, будем считать, что $f(x)\in C^k[a,b]$ и что $K(x,t)$ дифференцируема по x k раз, при этом $K_x^{(i)}(x,x)\equiv 0$, $i\le k-2$, а $K_x^{(k-1)}(x,x)\equiv 1$. Тогда, дифференцируя (16) k раз, получаем интегральное уравнение

$$y(x) + \int_a^x K_x^{(k)}(x,t)y(t)dt = f^{(k)}(x), \quad x\in[a,b]. \tag{17}$$

Уравнение (17) является уравнением второго рода, и для его решения при определенных условиях возможны оценки вида [7]

$$\|y\|_p \le C\|f^{(k)}\|_p. \tag{18}$$

Например, если ядро $K_x^{(k)}(x,t)$ таково, что существуют $m,\alpha>0$, для которых справедливо

$$|K_x^{(k)}(x,t)|\le m(x-t)^{\alpha-1}, \quad a\le x,t\le b,$$

то имеет место оценка (18), где $2\le p\le\infty$.

Предположим, что f – периодическая и что $f\in C^{2k}[a,b]$. Пусть вместо f известна $\tilde f$ такая, что $\tilde f\in W_2^k[a,b]$ и $\|f-\tilde f\|_{\infty}\le\varepsilon$. Пусть S –

сплайн в выпуклом множестве D с $z=\tilde{f}$ и $\tilde{y}$ - решение уравнения (I7), в котором вместо $f^{(k)}$ в правой части стоит $S^{(k)}$. Тогда из (I8) следует $\|y-\tilde{y}\|_2 \le C\|f^{(k)}-S^{(k)}\|_2$, и если воспользоваться (I2), то получаем оценку устойчивости решения задачи

$$\|y - \tilde{y}\|_2 \le C\{ 2[\varepsilon(b-a)\|f^{(2k)}\|_\infty]^{1/2} \}. \qquad (19)$$

Таким образом, сплайны в выпуклых множествах образуют класс данных, на которых задача решения уравнения (I6) при сделанных предположениях о функциях $K(x,t)$ и $f(x)$ корректна. Действительно, в выпуклом множестве D, представляющем из себя окрестность функции $f \in C^{2k}[a,b]$, строится сплайн, аппроксимирующий f в $W_2^k[a,b]$. Но задача решения уравнения (I7), эквивалентного (I6), корректна на пространствах $L_2[a,b], W_2^k[a,b]$, отсюда и следует ее корректность на данных в виде сплайнов в выпуклых множествах.

Если в оценке (I8) $p=\infty$ и $f \in C^{2k+2}[a,b]$, то для доказательства устойчивости решения в норме $L_\infty[a,b]$ следует взять сплайн степени $2k+1$, аппроксимирующий $f^{(k)}$ в этой норме (оценки (I4), (I5)).

В случае, если $\tilde{f}$ - сеточная функция, все рассуждения остают - ся прежними с заменой выпуклого множества D на G.

Известно, что дифференцированием преобразуются к уравнениям второго рода и некоторые интегральные уравнения Фредгольма первого рода. Так, если правая часть исходного уравнения дважды непрерывно дифференцируема, а ядро интегрального оператора $K(x,t)$ терпит разрыв производной по x на диагонали прямоугольника его определения, причем $K_x(x+0,x)-K_x(x-0,x) \ne 0$, $x \in [a,b]$ (таким требованиям удовлетворяет функция Грина первой краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка), то уравнение Фредгольма первого рода с ядром $K(x,t)$ и правой частью $f(x)$ двукратным дифференцированием приводится к уравнению Фредгольма второго рода.

3. На примере простейшего интегрального уравнения первого рода

$$\int_1^x y(t)dt = x^3-x, \qquad x \in [1,3],$$

регуляризованное решение которого после внесения погрешности в правую часть искалось в [8] путем минимизации сглаживающего функционала, покажем эффективность предлагаемого подхода. Так же, как и в [8],отрезок [I,3] был разбит с шагом $h = 0.2$, в узлах разбиения были вычислены значения правой части,и с помощью датчика случайных чисел была внесена погрешность ε , не превышающая в первом случае 0,05, во втором 0,005. По этим данным затем строился кубический сплайн в выпуклом множестве,и далее бралось $y(x)= S'(x)$ (последнее выражение и есть преобразованное к уравнению второго рода исходное уравнение первого рода). Результаты приведены в таблице, где через y обозначено точное решение, через Y - решение, полученное в [8]; $\|\cdot\|$ - равномерная сеточная норма.

Таблица

ε	0,05	0,005
$\|y - Y\|$	0,78I	0,343
$\|y - S'\|$	0,0846	0,0I33

ЗАМЕЧАНИЕ. При получении регуляризованного решения параметр регуляризации α в [8] выбирался по точному решению. Краевые условия при построении сплайна S также были взяты точными.

Литература

I. ATTEIA M. Fonctions-spline definies sur un ensemble convexe.-Numer.Math.,1968,Bd 12,S.192-210.

2. VERSHININ V.V.,PAVLOV N.N. On the Approximative Properties of Splines in the Convex Set.- In: Proc.of A.Haar Mem.Conf., Budapest,1985,p.64.

3. ПАВЛОВ Н.Н. Сглаживающие сплайны первой степени. -В кн.: Методы сплайн-функций в численном анализе (Вычислительные системы, вып. I08). Новосибирск, I985, с. 3I-36.

4. ВАСИЛЕНКО В.А., ЗЮЗИН М.В., КОВАЛКОВ А.В. Сплайн-функции и цифровые фильтры. -Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, I984. - I56 с.

5. ПАВЛОВ Н.Н. Сглаживание кубическими сплайнами и метод штрафов. -В кн.: Методы сплайн-функций в численном анализе (Вычислительные системы, вып. 98). Новосибирск, I983, с.92-I02.

6. БУРЕНКОВ В.Н. О точных постоянных в неравенствах для норм промежуточных производных на конечном интервале.-Труды МИАН СССР, I980, т.I5, с.22-29.

7. БУХГЕЙМ А.Л. Уравнения Вольтерра и обратные задачи. - Новосибирск: Наука, I983. - 208 с.

8. ДЕМИДОВИЧ В.Б. Восстановление функции и ее производных по экспериментальной информации. -В кн.: Вычислительные методы и программирование, вып. 8. М., I967, с.96-I02.

Поступила в ред.-изд.отд.
I апреля I986 года