ПРИКЛАДНАЯ ЛОГИКА
(Вычислительные системы)
1986 год Выпуск 116

УДК 681.3:512.8

КОНЕЧНО-ПОРОЖДЕННЫЕ ПЕРЕЧИСЛИМЫЕ И АБСОЛЮТНО ЛОКАЛЬНО-КОНЕЧНЫЕ АЛГЕБРЫ

Н.Х.Касымов, Б.М.Хусаинов

В настоящей работе изучаются возможности организации различных структур данных на множестве классов эквивалентности произвольного эффективного разбиения натурального ряда. Особое внимание уделяется свойствам тех разбиений,на которых можно определить структуру конечно-порожденной алгебры. Вводится понятие классов данных, и доказывается существование наименьшего класса данных. Дается отрицательное решение проблемы специфицируемости без сортов для перечислимых структур данных. Параграфы 1-3 и 5 написаны первым из авторов, §4 - совместно. Примеры абсолютно локально-конечных алгебр из §6 получены авторами независимо.

§1. Основные понятия

Под структурой данных обычно понимают многосортную алгебру конечной сигнатуры [1,2,5,6,9,10]. Однако требования эффективности вынуждают рассматривать в качестве структур данных только те многосортные алгебры, которые допускают эффективные, в том или ином смысле, реализации [1,2,9,10]. Мы принимаем следующий тезис [1]: всякая структура данных является перечислимой, т.е.имеет позитивную нумерацию (см. [2-4,7]). Заметим, что вместо многосортных алгебр можно рассматривать обычные, так как множество номеров элементов каждого сорта алгебры $\mathfrak{A}$ в любой ее нумерации ν естественно предполагать рекурсивным [2],и поэтому любую операцию можно произвольным образом эффективно доопределить на тех кортежах, для которых эта операция не определена. Если $(\mathfrak{A},\nu)$ - позитивная алгебра, то естественно считать нумерационную эквивалентность $\eta =$

$= \{(x,y)/\nu x = \nu y\}$, отвечающую нумерации $\nu:\ \omega \to |\mathfrak{A}|$, первичной по отношению к операциям на ω/η, поскольку η задает носитель алгебры $\mathfrak{A}$, в то время как операции определяют некоторую структуру на этом носителе. В связи с этим возникает следующий вопрос: какие данные можно организовать на заданной позитивной эквивалентности η? Дадим уточнение этого вопроса. Пусть η – позитивная эквивалентность и F_η – множество всех рекурсивных функций (включая нуль-местные), согласованных с η, т.е. тех функций, для которых разбиение ω/η является допустимым. Определим класс K_η: $\mathfrak{A} \in K_\eta \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \mathfrak{A}$ – алгебра конечной сигнатуры и $\mathfrak{A} \cong (\omega/\eta; F)$ для некоторого конечного списка F из F_η. Тогда наш вопрос можно переформулировать так: каков класс K_η? Если η разрешима, то $\mathfrak{A} \in K_\eta \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \mathfrak{A}$ – конструктивизируемая алгебра конечной сигнатуры. Таким образом, для разрешимых эквивалентностей η_1 и η_2 имеем $K_{\eta_1} = K_{\eta_2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow |\omega/\eta_1| = |\omega/\eta_2|$. Всюду ниже мы предполагаем, что η бесконечна (т.е. бесконечно множество ω/η), так как конечный случай малоинтересен. Ситуация резко меняется при переходе к неразрешимым позитивным эквивалентностям. Обозначим через P множество всех бесконечных позитивных эквивалентностей и через $D = (\{K_\eta/\eta \in P\}; \subset)$ частично упорядоченное (по включению) множество классов данных. Легко заметить, что K_η, где $\eta = \{(x,x)/x \in \omega\}$, является максимальным элементом в D и что в D нет наибольшего элемента, так как если класс $K_{\eta_1} \supset K_\eta$, то η_1 разрешима. Используя эквивалентность из §3, можно показать, что в D имеется упорядоченное по типу ω подмножество. Пусть $K_0 = \bigcap\limits_{\eta \in P} K_\eta$. В §3 показано, что существует $\eta_0 \in P$ такая, что $K_{\eta_0} = K_0$, т.е. в D имеется наименьший элемент. Класс K_0 очень беден. Если $\mathfrak{A} \in K_0$ и f – операция, названная в сигнатуре $\mathfrak{A}$, то f – константа либо проектирующая на $|\mathfrak{A}|$. Особый интерес представляют конечно-порожденные структуры данных [6]. Это связано с тем, что они часто встречаются на практике. Кроме того, такие данные рекурсивно устойчивы [2,3], т.е. имеют единственное эффективное представление. Однако далеко не для всякой позитивной эквивалентности η в классе K_η содержится структура такого рода. Очевидно, таких структур данных нет в K_0. Некоторые необходимые и достаточные условия конечной порожденности позитивной эквивалентности η, т.е. существования такого конечного множества согласованных с η рекурсивных функций $f_1,\dots,f_m$, что фактор-алгебра $(\omega/\eta; f_1,\dots,f_m)$ конечно-порожденная, формулируются в §2.

Назовем перечислимую алгебру эффективно бесконечной, если существуют такая ее позитивная нумерация ν и такая рекурсивная функция g, что $x \neq y \to \nu g(x) \neq \nu g(y)$. Можно привести очень много примеров бесконечных структур данных, в том числе конечно-порожденных. Более того, в известной на сегодняшний день методике построения алгебраических операций существенно используется эффективная бесконечность специфицируемых структур данных [5,9]. В §4 построен пример эффективно бесконечной позитивной эквивалентности η (т.е. такой, для которой существует рекурсивная функция g со свойством $x \neq y \to (g(x), g(y)) \notin \eta$), не являющейся конечно-порожденной. С другой стороны (§5), существует конечно-порожденная перечислимая алгебра, которая не является эффективно бесконечной.

Известно, что всякая структура данных имеет конечно определимое в смысле [7] обогащение, использующее новые сорта [5]. Для конструктивизируемых структур данных соответствующие обогащения можно задавать без новых сортов [9]. Возникает вопрос: всякая ли структура данных обладает конечно определимым обогащением, использующим лишь новые операции [10]? В §6 дается отрицательный ответ. На самом деле решен более сильный вопрос. Построена перечислимая алгебра, всякое перечислимое обогащение которой локально-конечно (разумеется, сигнатура обогащения предполагается конечной). В частности, эта алгебра не допускает конечно-порожденных перечислимых (а тем более конечно определимых) обогащений.

§2. Конечно-порожденные позитивные эквивалентности

Пусть η - эквивалентность на ω и f - функция $\omega^n \to \omega$. Будем говорить, что f является η-допустимой, если $(x_1, y_1) \in \eta$ & ... ...&$(x_n, y_n) \in \eta \to (f(x_1, \ldots, x_n), f(y_1, \ldots, y_n)) \in \eta$. Очевидно, что существуют ровно две эквивалентности, которые допускают все функции: $\mathbf{0} = \{(x,x)/x \in \omega\}$ и $\mathbf{1} = \{(x,y)/x,y \in \omega\}$. С другой стороны, всякая эквивалентность допускает все функции константы и все проектирующие функции. Ниже мы будем часто писать $x \sim y$ вместо $(x,y) \in \eta$, если из контекста ясно, о какой η идет речь. Назовем η-допустимую функцию f η-тривиальной, если $\exists y \forall \bar{x}(f(\bar{x}) \sim y) \vee \vee \exists j \forall \bar{x}(f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \sim x_j)$, т.е. если f действует как константа или проектирующая на ω/η. Позитивную эквивалентность η назовем конечно-порожденной, если существует такое конечное множество $\{f_1, \ldots, f_m\}$ η-допустимых рекурсивный функций, что фактор-алгебра $(\omega/\eta; f_1, \ldots, f_m)$ конечно-порожденная. В противном случае будем говорить, что η бесконечно-порожденная. Ясно, что если η - неразрешимая позитивная эквивалентность, конечно-порожденная функциями $f_1, \dots, f_m$, то фактор-алгебра $(\omega/\eta; f_1, \dots, f_m)$ является неконструктивизируемой и рекурсивно устойчивой. Множество M называется η-замкнутым, если $x \in M \& y \sim x \to y \in M$. η-замкнутое множество M η-конечно (η-бесконечно), если конечно (бесконечно) множество M/η. Наименьшее η-замкнутое множество, содержащее M, называется η-замыканием M и обозначается $[M]_\eta$. Очевидно, что если M η-замкнуто, то $[M]_\eta = M$, и если M рекурсивно-перечислимо, то таково же и $[M]_\eta$ для произвольной позитивной эквивалентности η. Пусть η - бесконечная разрешимая эквивалентность. Тогда η-допустимая функция $f(x) = h(\mu t(\mu y(y \sim x) = h(t))+1)$, где $h(0) = 0$, $h(n+1) = \mu y(\underset{0 \le m \le n}{\&} (y \not\sim h(m)))$ и число 0 порождают η, т.е. $\forall x \exists n(f^n(0) \sim x)$. Укажем одно простое достаточное условие конечной порожденности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. *Пусть η - позитивная эквивалентность. Если существует такая рекурсивная функция g, что $x \neq y \to g(x) \not\sim g(y)$, и $[\rho g]_\eta$ рекурсивно, то η конечно-порождена.*

Определим две функции f и h:

$$f(x) = \begin{cases} g(\mu n(g(n) \sim x)+1), & \text{если } x \in [\rho g]_\eta; \\ x, & \text{если } x \notin [\rho g]_\eta; \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \mu n(g(n) \sim x), & \text{если } x \in [\rho g]_\eta; \\ x, & \text{если } x \notin [\rho g]_\eta. \end{cases}$$

Непосредственно из построения видно, что эквивалентность η допускает функции f и h. Кроме того, ясно, что

$$\{ f^{k+1}(g(0))/k \in \omega \} \cup \{ g(0) \} = \rho g, \; h(\rho g) = \omega. \;\square$$

Например, эквивалентность $\eta = \{(x,y)/x,y \in M\} \cup \{(x,x)/x \in \omega\}$, где M - рекурсивно-перечислимое непростое множество, является конечно-порожденной, и для нее в K_η заведомо содержится рекурсивно устойчивая алгебра.

Следующим предложением формулируется одно необходимое условие.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Если позитивная эквивалентность η конечно-порождена, то объединение любого конечного числа* классов η-эквивалентности не гиперпросто.

Пусть $M_1,\ldots,M_k$ – любые классы эквивалентности, $C_1,\ldots,C_s$ – классы порождающих элементов и E – конечное множество порождающих функций. Для любого множества R определим

$$FR = \{x/\exists\bar{y}\in R\,\exists f\in E(x = f(\bar{y}))\}\cup R\ ,$$

$$F^{n+1}R = F(F^nR)\,,\qquad F^0R = R\ .$$

Выберем $m_1\in M_1,\ldots,m_k\in M_k$ и $c_1\in C_1,\ldots,c_s\in C_s$ и положим

$$B_0 = \{m_1,\ldots,m_k,c_1,\ldots,c_s\},$$

$$B_{n+1} = F^{n+1}B_0\setminus F^nB_0\ .$$

Тогда последовательность B_n сильно вычислима, $n\neq m\rightarrow B_n\cap B_m=\emptyset$ и $B_{n+1}\cap\overline{M_1\cup\ldots\cup M_k}\neq\emptyset$, так как $F^{n+1}B_0\setminus F^nB_0\neq\emptyset$ и $[F^{n+1}B_0\setminus F^nB_0]_\eta\cap$ $\cap(M_1\cup\ldots\cup M_k)=\emptyset$. Следовательно, $M_1\cup\ldots\cup M_k$ не гиперпросто. □

Это предложение позволяет привести простые примеры позитивных эквивалентностей, не являющихся конечно-порожденными. Например, эквивалентность $\eta=\{(x,y)/x,y\in M\}\cup\{(x,x)/x\in\omega\}$, где M гиперпросто, бесконечно-порожденная. Из предложения 2, в частности, следует, что никакая конечно-определенная алгебра не имеет позитивной нумерации, в которой объединение конечного числа каких-либо классов эквивалентности гиперпросто.

§3. Наименьший класс данных

Мы хотим показать, что существует такая позитивная эквивалентность η_0, относительно которой η_0-допустимыми рекурсивными функциями являются только η_0-тривиальные. Очевидно, что если $\alpha\in K_{\eta_0}$, то для любой другой бесконечной позитивной эквивалентности η_1 $\alpha\in K_{\eta_1}$, так как любая эквивалентность реализует все проектирующие функции и все функции константы. На ω/η_0 нельзя задать нетривиальную структуру данных; заметим, что любое конечное множество рекурсивных η_0-допустимых функций $\{f_1,\ldots,f_n\}$ определяет локально-конечную алгебру $(\omega/\eta_0;\ f_1,\ldots,f_n)$. В [4] построена позитивная эквивалентность η, у которой любое собственное η-замкнутое рекурсивно-перечислимое множество есть объединение конечного числа классов η-эквивалентности и множество $\{m\,/\,m\sim n\rightarrow m\leq n\}$ минимальных элементов которой сжато. До конца параграфа η означает эту эквивалетность, а M – множество ее минимальных элементов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть f есть η-допустимая рекурсивная функция. Тогда f η-тривиальна.

Доказательство разобьем на четыре леммы.

ЛЕММА 1. Если f – рекурсивная одноместная η-допустимая функция, то

$$\exists y \forall x (f(x) \sim y) \vee \forall x \exists k \geq 1 (f^k(x) \sim x).$$

Рассмотрим множество $S = \bigcup\limits_{x \in X} [x]_\eta$, где $X = \{x / \exists y \exists z (x \sim y \,\&\, y = f(z))\}$, т.е. S есть объединение всех классов η-эквивалентности, имеющих прообраз относительно f.

Так как S рекурсивно-перечислимо, то либо S η-конечно, либо $S = \omega$.

Пусть S η-конечно. Если $|S/\eta| \geq 2$, то хотя бы один элемент s/η для некоторого $s \in S$ имеет бесконечно много прообразов в ω/η, причем $f^{-1}(s/\eta) \neq \omega/\eta$. Значит, $|S/\eta| = 1$, т.е. $\exists y \forall x (f(x) \sim y)$.

Пусть $S = \omega$. Возьмем любое число $x \in \omega$. Если $\forall k \geq 1 (x \not\sim f^k(x))$, то $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} [f^{-m}(x)]_\eta$ есть бесконечное собственное рекурсивно-перечислимое η-замкнутое подмножество ω.

Имеем $\forall x \exists k \geq 1 (f^k(x) \sim x)$, т.е. в этом случае f действует на ω/η как циклический унар.

ЛЕММА 2. Если f – рекурсивная одноместная η-допустимая функция и $\forall x \exists k \geq 1 (f^k(x) \sim x)$, то f тождественна на ω/η, т.е. $\forall x (f(x) \sim x)$.

Пусть $\exists x\, f(x) \not\sim x$. Тогда множество $E = \bigcup\limits_{x \in X} [x]_\eta$, где $X = \{x / x \sim f(x)\}$ η-конечно, так как E есть собственное η-замкнутое рекурсивно-перечислимое подмножество ω. Определим эквивалентность η_1: $(x,y) \in \eta_1 \Leftrightarrow \exists k \geq 0 (f^k(x), y) \in \eta$, где $f^0(x) \leftrightharpoons x$. Очевидно, η_1 позитивна. Рассмотрим множество $M_1 = \{n / (m,n) \in \eta_1 \to m \leq n\}$. Ясно, что $\overline{M}_1$ бесконечно, $\overline{M}_1$ рекурсивно-перечислимо и $\overline{M} \subset \overline{M}_1$. Кроме того, $\overline{M}_1 \setminus \overline{M}$ бесконечно, так как $\overline{E}$ η-бесконечно, но $\overline{M}$ максимально. □

Назовем n-местную $(n \geq 1)$ функцию g квазипроектирующей, если $\forall x_1 \ldots x_n \exists 1 \leq k \leq n (g(x_1, \ldots, x_n) = x_k)$.

ЛЕММА 3. Пусть g – η-допустимая рекурсивная функция. Тогда g действует на ω/η либо как константа, либо как квазипроектирующая.

Пусть g – n-местная η-допустимая рекурсивная функция.

Покажем, что g – константа или квазипроектирующая индукцией по n. Если g не квазипроектирующая, то

$$\exists x_1 \ldots x_n \exists z_1 (x_1 \not\sim z_1 \& \ldots \& x_n \not\sim z_n \& g(x_1,\ldots,x_n) \sim z_1).$$

Если g не константа, то существует число $z_2 \not\sim z_1$ и $\exists y_1 \ldots y_n\ (g(y_1,\ldots,y_n) \sim z_2)$. Определим функцию $f(v_1,\ldots,v_{n-1}) = g(x_1,v_1,\ldots,v_{n-1})$. Так как $z_1 \not\sim x_1$, $f(x_2,\ldots,x_n) \sim z_1$ и f η-допустима, то, по индукционному предположению, f есть константа, т.е. $f(y_2,\ldots,y_n) = g(x_1,y_2,\ldots,y_n) \sim z_1$. Теперь зафиксируем $y_2,\ldots,y_n$ и положим $h(v) = g(v,y_2,\ldots,y_n)$. Опять имеем $h(y_1) = g(y_1,y_2,\ldots,y_n) \sim z_1$. Но $z_1 \not\sim z_2$. Следовательно, η не допускает g.

ЛЕММА 4. *Если g – n-местная η-допустимая рекурсивная функция, действующая на ω/η как квазипроектирующая, то g – проектирующая на ω/η.*

Пусть $g(x_1,x_2,\ldots,x_n) \sim x_k$ $(1 \le k \le n)$ и $z \in \omega$. Когда z пробегает ω, то $g(z,x_2,\ldots,x_n) \sim x_l$ для $1 \le l \le n$. Если существует z_1 такое, что $g(z_1,x_2,\ldots,x_n) \sim x_l$ & $l \ne k$, то для некоторого $1 \le m \le n$ множество таких z, что $g(z,x_2,\ldots,x_n) \sim x_m$ есть собственное перечислимое η-замкнутое и η-бесконечное подмножество ω. Значит, $\forall z\ g(z,x_2,\ldots,x_n) \sim x_k$. В силу произвольности z, заставляя аргументы $x_2,\ldots,x_n$ последовательно пробегать ω, получим, что $g(y_1,y_2,\ldots,y_n) \sim y_k$ для любых $y_1,y_2,\ldots,y_n$ т.е. g – η-проектирующая.

§4. Эффективно бесконечная бесконечно-порожденная позитивная эквивалентность

В §2 было показано, что если для позитивной эквивалентности η существует такая рекурсивная функция g, что $x \ne y \to (g(x), g(y)) \notin \eta$ и $[\rho g]_\eta$ рекурсивно, то η конечно-порождена. Покажем, что рекурсивность η-замыкания области значений функции g существенна.

Пусть M – r-максимальное множество. Поскольку M гиперпросто, то позитивная эквивалентность $\eta_0 = \{(x,y)/x,y \in M\} \cup \{x,x/x \in \omega\}$ не является конечно-порожденной в силу предложения 2. Существует такая общерекурсивная функция h (см. [8]), что

1) $\rho h = M$, 2) $n \ne m \to \{h(n,s)/s \in \omega\} \cap \{h(m,s)/s \in \omega\} = \emptyset$,

3) для любого n $\{h(n,s)/s \in \omega\}$ не рекурсивно.

Определим позитивную эквивалентность η_1 :

$\eta_1 = \{(x,y)/\exists n \exists s \exists t(x=h(n,s) \& y=h(n,t))\} \cup \{(x,x)/x \in \omega\}$.

Если $g(x) = h(x,x)$, то $x \neq y \to (g(x), g(y)) \notin \eta_1$, т.е. η_1 - эффективно бесконечна. Докажем, что η_1 бесконечно-порожденная.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть f - рекурсивная η_1-допустимая функция. Тогда f η_0-допустима.

Из этого предложения следует, что η_1 бесконечно-порожденная. В самом деле, если η_1 конечно-порожденная, то η_0 тем более конечно-порожденная теми же порождающими функциями. Доказательство предложения разобьем на три леммы.

ЛЕММА 5. Если $A \subset M$ и A η_1-замкнуто, то A не рекурсивно.

Пусть $a \in A$ и $B = \{h(n_0,s)/s \in \omega\} = [a]_{\eta_1}$. Ясно, что $x \in B \leftrightarrow x \in A \& \exists n \exists t\ (x = h(n,t) \& n = n_0)$. Очевидно, B рекурсивно, если A рекурсивно. □

ЛЕММА 6. Если f - одноместная рекурсивная η_1-допустимая функция, то f η_0-допустима.

Предварительно докажем следующий факт. Если существует $m \in M$ такое, что $f(m) \notin M$, то $\forall x \in M\ (f(x) = f(m))$. В самом деле, пусть $f(m) = a$. Если множество $A = \{x/x \in M \& f(x) \neq a\}$ непусто, то либо A, либо $\bar{A} \cap M$ рекурсивно, в силу r-максимальности M, что невозможно по лемме 5.

Теперь покажем, что f η_0-допустима. Если это не так, то существуют такие числа x и y, что $(x,y) \notin \eta_1 \& (x,y) \in \eta_0 \& (f(x), f(y)) \notin \eta_0$, так как $\eta_1 \subset \eta_0$. Из $(x,y) \notin \eta_1 \& (x,y) \in \eta_0$ имеем $x, y \in M$. Если $f(x) = a \notin M$, то $f(y) = a$, откуда $(f(x), f(y)) \in \eta_0$. Аналогично если $f(y) \notin M$. Если $f(x), f(y) \in M$, то $(f(x), f(y)) \in \eta_0$.

ЛЕММА 7. Если f - n-местная рекурсивная η_1-допустимая функция, то f η_0-допустима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по n. Если $n = 1$, то утверждение вытекает из леммы 6. Пусть $n \geq 2$ и для всех $1 \leq k \leq n-1$ утверждение верно. Рассмотрим два произвольных набора $x_1 \ldots x_n$ и $y_1 \ldots y_n$ таких, что $(x_1, y_1) \in \eta_0 \& \ldots \& (x_n, y_n) \in \eta_0$. По индукционному предположению функция $g(v_1, \ldots, v_{n-1}) = f(x_1, v_1, \ldots, v_{n-1})$

является η_0-допустимой, следовательно, $(f(x_1,x_2,\dots,x_n),f(x_1,y_2,\dots,y_n))\in\eta_0$. С другой стороны, функция $h(v)=f(v,y_2,\dots,y_n)$ также η_0-допустима, откуда $(f(x_1,y_2,\dots,y_n),f(y_1,y_2,\dots,y_n))\in\eta_0$. Окончательно имеем $(f(x_1,x_2,\dots,x_n),f(y_1,y_2,\dots,y_n))\in\eta_0$. □

§5. Конечно-порожденная не эффективно бесконечная перечислимая алгебра

Как было показано выше, позитивная эквивалентность

$$\eta_M=\{(x,y)/x,y\in M\}\cup\{(x,x)/x\in\omega\},$$

где M рекурсивно-перечислимо, будет конечно-порожденной, если M не простое, и бесконечно-порожденной, если M гиперпростое. Мы хотим показать, что существует такое простое множество M, что η_M конечно порожденная. Эта эквивалентность не будет эффективно бесконечной, точно так же, как и соответствующая алгебра $(\omega/\eta; f_1,\dots,f_n)$ (где $f_1,\dots,f_n$ - порождающие функции), в силу рекурсивной устойчивости конечно-порожденных перечислимых алгебр.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Существует бесконечная конечно-порожденная не эффективно бесконечная перечислимая алгебра.

Назовем простое множество M сильно простым, если существует такая сильная последовательность конечных множеств D_n, что

1) $n\neq m\to D_n\cap D_m=\emptyset$,

2) $D_n\cap\overline{M}\neq\emptyset$,

3) $\min D_n\geq|D_{n+1}|$.

Сильно простые множества существуют (см. [8]). Пусть M - сильно простое множество и $D_0,D_1,\dots$ - сильная таблица для $\overline{M}$ со свойством $|D_{n+1}|\leq\min D_n$. Обозначим $h(n)=|D_n|$ и $D_n=\{d_1^n,\dots,d_{h(n)}^n\}$. Для удобства будем считать, что $0\notin\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}D_n$. Построим конструктивную алгебру $\mathfrak{A}=(\omega;f,g)$ по шагам.

Шаг 0. На первых $d_1^0+\dots+d_{h(0)}^0-1$ натуральных числах определим частичную циклическую перестановку f так, что имеется $h(0)$ циклов, длины которых суть $d_1^0,\dots,d_{h(0)}^0$. Функция g на шаге 0 нигде не определена.

Шаг $n+1$. Для каждого f-цикла C длины d_k^n, $1\leq k\leq h(n)$, построим $h(n+1)$ f-циклов $C_1,\dots,C_{h(n+1)}$, длины которых суть

$d_1^{n+1},\dots,d_{h(n+1)}^{n+1}$ соответственно. Для каждого $x\in C$ определим значение функции g на x :

$$x = \min\{y/y\in C\} \to g(x) = \min\{y/y\in C_1\},$$

$$g(f^t(m)) = \min\{y/y\in C_{t+1}\} \text{ для } 1\le t\le h(n+1)-1,$$

где $m = \min\{y/y\in C\}$.

Для остальных $x\in C$ положим $g(x) = x$. Конструкция закончена. Заметим, что определение функции g корректно, так как

$$\forall n\, \forall 1\le k\le h(n)(\,|D_{n+1}| \le d_n^k\,) .$$

Алгебра $\mathfrak{A}$ имеет древовидную структуру. Удобно представлять f-циклы как вершины этого дерева, тогда функция g осуществляет переход с n-го уровня на $(n+1)$-й уровень. На уровне 0 находится $h(0)$ f-циклов, на уровне $(n+1)$ $h(0)\cdot h(1)\cdot\ldots\cdot h(n+1)$ f-циклов, причем если f-цикл имеет длину d_k^{n+1} $(1\le k\le h(n+1))$, то на уровне $n+1$ имеется $h(0)\cdot h(1)\cdot\ldots\cdot h(n)$ f-циклов длины d_k^{n+1} и на любом другом уровне нет ни одного f-цикла длины d_k^{n+1} . Определим рекурсивную функцию l как $l(x)=\mu k\ge 1(f^k(x)=x)$. Введем на ω отношение эквивалентности η :

$$(x,y)\in \eta \leftrightarrow x=y \vee \exists z_1 z_2\, \exists t_1 t_2\, (l(z_1)\in M\, \&$$

$$\& \, l(z_2)\in M \,\&\, t_1(z_1)= x \,\&\, t_2(z_2)= y) ,$$

где t_1, t_2 - термы сигнатуры $\Sigma = (f,g)$.

Если $(x,y)\in\eta$, то $x = t_1(z_1)$ и $y = t_2(z_2)$ для подходящих z_1, z_2 таких, что $l(z_1), l(z_2)\in M$, и подходящих t_1, t_2 . Но тогда $f(x) = ft_1(z_1)$ и $f(y) = ft_2(z_2)$, т.е. $(f(x),f(y))\in\eta$. Аналогично $(x,y)\in\eta \to (g(x),g(y))\in\eta$, т.е. η - конгруэнтность.

Рассмотрим ω/η . Ясно, что $(\omega/\eta; f,g)$ - перечислимая конечно-порожденная алгебра с естественной позитивной нумерацией $\nu(n) = n/\eta$ и существует единственный элемент $a\in\omega/\eta$ такой, что $|\nu^{-1}(a)|\ne 1$. Покажем, что множество $\bigcup\limits_{x\ne a}\nu^{-1}(x)$ иммунно. Если бы это было не так, то множество $\{z/z=\mu k\ge 1\,(f^k(x)=x)\,\&\, x\in\omega\setminus\nu^{-1}(a)\}\subset\mathbb{N}$ также было бы не иммунным.

§6. Абсолютно локально-конечная алгебра

Перечислимую алгебру конечной сигнатуры назовем абсолютно локально-конечной, если всякое ее конечное перечислимое обогащение локально-конечно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. С у щ е с т в у е т б е с к о н е ч н а я а б с о л ю т н о л о к а л ь н о - к о н е ч н а я а л г е б р а.

Пусть D_n – сильно вычислимая последовательность конечных множеств

$$D_0 = \{0\},$$
$$D_1 = \{0\},$$
$$D_2 = \{1,2\},$$
$$D_3 = \{3,4,5\},$$

т.е. $D_0=\{0\}$ и $D_{n+1}= \left\{\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n+1)}{2}+1, \ldots, \frac{n(n+1)}{2}+n\right\}$. Определим рекурсивную перестановку f' на ω :

$$f'(0)=0, \quad f'(x+1)=\begin{cases} x+2, \text{ если } x+1 \in D_n \;\&\; x+1 \neq \max D_n, \\ \min D_n, \text{ если } x+1 = \max D_n. \end{cases}$$

Пусть M – гиперпростое множество. Введем позитивную эквивалентность η:

$$(x,y)\in \eta \Leftrightarrow x=y \vee \exists n \exists m(x\in D_n \;\&\; y\in D_m \;\&\; n\in M \;\&\; m\in M).$$

Пусть $\mathfrak{A} = (\omega/\eta; f)$, где $f(n/\eta) = f'(n)/\eta$. Очевидно, что это определение f корректно. Докажем, что $\mathfrak{A}$ абсолютно локально-конечна. Пусть существует перечислимое конечное обогащение $\mathfrak{A}^*$ алгебры $\mathfrak{A}$ такое, что $\mathfrak{A}^*$ имеет бесконечную конечно-порожденную подалгебру.

Покажем, что тогда существует рекурсивная функция h, мажорирующая некоторое бесконечное подмножество гипериммунного множества $\overline{M}$. Пусть $\nu: \omega \to |\mathfrak{A}^*|$ – позитивная нумерация $\mathfrak{A}^*$. Введем ряд обозначений. Пусть $x \sim y \Leftrightarrow \nu x = \nu y$. Для любого $R \subset \omega$

$$FR = \{x/\exists \bar{y}\in R\, \exists g\in \Sigma^*(x = g(\bar{y}))\}\cup R,$$

$$F^{n+1}R = F(F^n R), \qquad F^0 R = R,$$

где Σ^* – сигнатура алгебры $\mathfrak{A}^*$. Функция

$$L(n) = \min \{m/m \geq 1 \ \& \ f^m(n) \sim n\}$$

(заметим, что она не рекурсивна). Множество представителей классов ($\sim$ - эквивалентности), порождающих бесконечную подалгебру алгебры $\mathfrak{A}^*$, обозначим через $C = \{c_1, \ldots, c_k\}$. Рекурсивную функцию S определим следующими инструкциями: [для данного n пытаемся эффективно определить $\perp \vee f(n) \sim n \vee f^2(n) \sim n \vee \ldots$, и номер того члена бесконечной дизъюнкции, который первым подтвердит истинность этого выражения, есть $S(n)$]. Заметим, что $L(n)$ делит $S(n)$, в частности, $L(n) \leq S(n)$. Интуитивно $L(n)$ есть длина цикла содержащего $n/\sim$, а $S(n)$ - некоторое эффективно определяемое значение, кратное длине цикла. Построим мажоранту h

$$h(0) = L(c_0) + 1,$$

$$h(t+1) = \max\{S(n)/n \in F^{r(t)}C\} + 1,$$

где $r(t) = h(t) \cdot (h(t)+1)/2$. Докажем, что h мажорирует некоторое бесконечное подмножество $B = \{b_0, b_1, \ldots\}$ множества $\overline{M}$. В качестве B возьмем множество следующих элементов:

$$b_0 = L(c_0),$$

$$b_{t+1} = \max\{L(n)/n \in F^{r(t)}C\}.$$

Очевидно, что $\forall t \, (b_t \in \overline{M} \ \& \ b_t < h(t))$. Достаточно показать, что $b_t < b_{t+1}$.

Ясно, что $|\{n/\sim | L(n) \leq b_t\}| \leq \frac{b_t \cdot (b_t+1)}{2} < r(t)$, так как $b_t < h(t)$. С другой стороны, $|\{n/\sim | n \in F^{r(t)}C\}| \geq r(t)$, поскольку $F^{m+1}C \setminus F^m C \neq \emptyset$. Следовательно, существует $n \in F^{r(t)}C$ такое, что $L(n) > b_t$, тем более $b_{t+1} = \max\{L(n)/n \in F^{r(t)}C\} > b_t$, откуда следует, что B бесконечно.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность С.С.Гончарову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Литература

1. ГОНЧАРОВ С.С. Модели данных и языки их описания. -В кн.: Логико-математические основы проблемы МОЗ (Вычислительные системы, вып.107). Новосибирск, 1985, с.52-70.

2. ГОНЧАРОВ С.С. Матрицы как абстрактный тип данных. -В кн.: Математическое обеспечение ВС из микро-ЭВМ (Вычислительные системы, вып. 96). Новосибирск, 1983, с.75-86.

3. ЕРШОВ Ю.Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. -М.: Наука, 1980.

4. ЕРШОВ Ю.Л. Теория нумераций. -М.: Наука, 1977.

5. КАСЫМОВ Н.Х. Алгебраическое описание рекурсивно-перечислимых типов данных. -В кн.: Структурный анализ символьных последовательностей (Вычислительные системы, вып. 101). Новосибирск, 1984, с.130-140.

6. ЛИСКОВ Б., ЗИЛЛЕС С. Методы спецификации,используемые для абстракции данных. -В кн.: Данные в языках программирования. -М.: 1982, с. 91-122.

7. МАЛЬЦЕВ А.И. Конструктивные алгебры, I. Избранные труды. -М.: Наука, 1976, т.П.

8. РОДЖЕРС Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. -М.: Мир, 1972.

9. BERGSTRA I.A.,TUCKER I.V. A characterisation of computable data typed by means of a finite equational specification method.-In: Proc.7th ICALP, Springer LNCS,1980,v.85.

10. KAMIN S. Some definitions for algebraic data type specifications. SIGPLAN Notices,1979,v.14,N 3,p.28-37.

Поступила в ред.-изд.отд.
1 февраля 1986 года