ПРИКЛАДНАЯ ЛОГИКА
(Вычислительные системы)

1986 год Выпуск 116

УДК 510.5+519.68

БЕСТИПОВОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ Σ-ВЫРАЖЕНИЙ И ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ КРИПКЕ-ПЛАТЕКА С КЛАССАМИ

В.Ю.Сазонов

Введение

Исчисление Σ-выражений является одновременно логико-функциональным недетерминированным алгоритмическим языком высокого уровня, языком спецификаций программ и задач, а также некоторой теорией множеств с праэлементами (допускающей модель наследственно-конечных множеств). При этом в роли (недетерминированных логических) программ выступают Σ-определения классов (аналог рекурсивно-перечислимых множеств). Это исчисление в виде исчисления Σ-выражений конечных типов, а также его семантика, основанная на релятивизации теории нумераций к допустимым множествам, были построены Ю.Л.Ершовым [1,2]. Затем в [3] была описана "непрерывная" семантика этого исчисления, релятивизующая аналогичным образом некоторые понятия теории f-пространств [4].

В настоящей статье, продолжающей эти исследования, строится бестиповый аналог исчисления Σ-выражений (исчисление $\mathrm{KPU}_0^{\langle\,\rangle +}\restriction\Sigma^+$; см. §4). Это делается на основе подходящей формулировки и развития в определенном направлении теории множеств Крипке-Платека с классами, а также соответствующего исследования ее дедуктивного аппарата. Так, теорема 4 означает, в частности, что полученное исчисление является консервативным расширением относительно Δ-формул некоторой подтеории теории множеств Крипке-Платека без классов, которая получается в результате значительного ограничения схемы фундирования теории KPU (см. [5,6]).

Конструкции языка Σ-выражений (типового или нет) делятся на логические ($\wedge, \vee, \forall x \in t, \exists x \in t, \exists x$) и функциональные (аппликaция, λ-абстракция и оператор наименьшей неподвижной точки). Ло - гическая часть этого языка достаточно ясна и соответствует в теории множеств Σ-формулам. Последние выступают в роли логических программ, задающих область истинности этих формул. Функциональная часть дает аппарат (рекурсивных) процедур с объектными и процедурными параметрами и требует в той или иной форме введения понятия класса объектов. Так, сами программы здесь задают функции типа объекты → булевские значения, т.е. классы. Как обычно, классы представляют собой "большие" совокупности объектов универсума множеств Крипке-Платека, в отличие от "малых" или "конечных" совокупностей, которые принадлежат универсуму и называются множествами. Напомним, что теория Крипке-Платека допускает модель HF(U), состоящую из наследственно-конечных множеств над любой совокупностью "праэлементов" U. С точки зрения приложений естественно ориентироваться именно на эту модель, хотя представляют интерес и так называемые нестандартные модели и модели, удовлетворяющие аксиоме существования бесконечного множества. В любом случае множества, в отличие от собственных классов и всего универсума, естественно воспринимать как "конечные" в некотором обобщенном смысле.

В исчислении Σ-выражений с типами рассматриваются также функции (или функционалы) типов класс → класс, (класс → класс) → класс и т.п. (но не рассматриваются функции типов ... → объекты). Мы придем к бестиповому исчислению Σ-выражений, если ограничимся только функциями типа класс → класс и сумеем отождествить их с классами. Благодаря тому, что рассматриваются не все, а только в опре - деленном смысле непрерывные функции, это действительно возможно и делается следуя одной интерпретации Г.Плоткина и Д.Скотта бести - пового λ-исчисления (см. [7-9]).

Как известно, в бестиповом λ-исчислении выразим оператор, дающий неподвижную точку по любой функции этого исчисления. Оказывается, он дает (в важных для нас случаях) наименьшую неподвижную точку, что, в частности, требуется для задания семантики соответствующей конструкции исчисления Σ-выражений. По существу, это перенос (доказательства) соответствующей теоремы Д.Парка [7] на универсум Крипке-Платека с классами. Тем самым получается доказательство обобщенной (по сравнению с [5]) теоремы Ганди (о наименьшей неподвижной точке любой Σ^+-определимой функции типа класс → → класс) для теории Крипке-Платека с классами, удовлетворяющими введенному в [3] принципу Σ^+-объединения. К этой теореме Ганди с классовыми параметрами была сведена (см. теорему 4 в [3]) задача построения семантики оператора наименьшей неподвижной точки в исчислении Σ-выражений с типами.

Другое доказательство обобщенной теоремы Ганди и приводимый ниже в §2 принцип Σ^{+}-непрерывности получил также Ю.Л.Ершов [10]. Результаты настоящей статьи установлены независимо.

Заметим, что бестиповость означает фактически полную свободу образования типов (например, как ретрактов [7]), в том числе и рекурсивных, рефлексивных и полиморфных. Естественно, что в условиях такой свободы важной задачей является выработка соответствующей (само)дисциплины образования типов и закрепление ее в синтаксисе.

Исчисление Σ-выражений рассматривается в статье также в контексте теории сложности вычислений и в связи с соответствующей проблемой построения как можно более слабой, но все ещё интересной теории множеств как оснований конечной математики. Этому вопросу посвящены заключительный §5 и частично §4.

Мы приведем в основном только те доказательства, которые проясняют суть введенных понятий и формулируемых утверждений, но прокомментируем основные результаты, имея в виду также читателя, не знакомого с теорией Крипке-Платека, но владеющего простейшими логическими и теоретико-множественными понятиями. Подробные доказательства будут опубликованы в статье, посвященной технической, но имеющей принципиальное значение задаче выявления конкретной аксиоматики слабой теории множеств (см.также [15]) и развитию намеченных здесь вопросов.

§1. Теория множеств KPU_0

Обозначим через KPU_0 произвольное расширение (возможно, в языке с классами; см. ниже) с помощью нелогических правил вывода и аксиом теории множеств Крипке-Платека сигнатуры $\sigma \rightleftharpoons \langle =, \in, U, \dots \rangle$ (см. [5,6]; U - предикат, выделяющий "праэлементы") без схемы фундирования. Другими словами, KPU_0 - некоторая слабая аксиоматическая теория множеств, которые можно (но не обязательно) мыслить конечными. На неформальном уровне об этой теории нам в основном надо будет знать только то, что она позволяет определить операции взятия неупорядоченной и упорядоченной пар $\{x, y\}$ и $\langle x, y \rangle \rightleftharpoons \{\{x\}, \{x, y\}\}$, операцию объединения, дающую по (Σ-определимому) семейству множеств $(b_x)_{x \in a}$ множество-объединение $\cup \{b_x \mid x \in a\}$ (например, $\cup a \rightleftharpoons \cup \{x \mid x \in a\}$) и операцию ограниченного свертывания $\{x \in a \mid \varphi[x]\}$, дающую множество всех x из a таких, что $\varphi[x]$, где φ есть Δ_0 - формула (см.ниже). Операцию объединения будем употреблять также и в случае классов (см.ниже).

Для того чтобы ввести в рассмотрение классы, мы положим в основу теории KPU_0 двухсортную классическую логику первого порядка, для определенности, - секвенциальное исчисление Генцена с сечением LK (см. [II]). Один сорт - объекты, т.е. множества и праэлементы (переменные $a, b, x, y, z, \ldots$), другой сорт - классы (или одноместные предикаты; переменные $X, Y, Z, \ldots$). Атомарные формулы этого языка имеют вид: $t=s$, $t \in s$, $U(t)$ (или $t \in U$), ..., и $t \in X$, где t и s - произвольные обычные (объектные) термы сигнатуры σ, а X - классовая переменная.

Понятно, что модель теории KPU_0 в языке, расширенном классами, должна состоять из двух частей: из модели $\mathbb{A}$ сигнатуры σ, элементы которой выступают в роли праэлементов и (внутренних) множеств, и из (внешнего) множества $\mathbb{P}$ некоторых (внешних) подмножеств $\mathbb{A}$, выступающих в роли классов. Таким образом, $\mathbb{P}$ - область возможных значений классовых переменных, на которую (основные) аксиомы KPU_0 не налагают никаких ограничений.

Обозначим через Σ^+ класс формул этого языка, в которых нет кванторов по классам, все кванторы всеобщности ограничены, т.е. имеют вид $\forall x \in t \ldots$ ($\rightleftharpoons \forall x(x \in t \rightarrow \ldots)$, x не входит в t), а все классовые переменные и неограниченные кванторы существования (не имеющие вида $\exists x \in t \ldots \rightleftharpoons \exists x(x \in t \wedge \ldots)$) входят положительно, т.е. не находятся в области действия знака отрицания или в посылке импликации. Формулы из Σ^+, в которых не участвуют неограниченные $\exists$ или предикатные переменные, или то и другое, образуют соответственно классы Δ_0^+ или Σ, или Δ_0. Допуская некоторую вольность, будем относить к этим классам вместе с каждой их формулой и все эквивалентные ей.

Интуитивно, если Σ^+-формула истинна в универсуме, то это можно вычислить. Например, в истинности Σ^+-формул вида $\forall x \in a\ \varphi[x]$ или $\exists x\, \varphi[x]$ мы убеждаемся, проверив, что для всех элементов "конечного" множества a истинно $\varphi[x]$, или соответственно найдя путем перебора или "угадав" элемент x, на котором истинно $\varphi[x]$. Однако, чтобы установить истинность (не Σ^+-) формулы $\forall x\ \varphi[x]$, пришлось бы перебрать весь "бесконечный" универсум. Именно поэтому не участвуют в определении Σ^+-формул неограниченные кванторы всеобщности, и требуется, чтобы неограниченные кванторы существования, а потому и классовые переменные, используемые как параметры для Σ^+-формул, входили положительно. Например, отрицательное вхождение квантора существования в формулу $\neg\exists x\varphi[x]$ равносильно квантору всеобщности $\forall x \neg \varphi[x]$.

Отметим, что классы $X, Y, \ldots$, ввиду той роли, которую они здесь исполняют, естественно охарактеризовать как Σ-подобные. Нетрудно убедиться (и интуитивно, и формально), что для установления истинности формулы $\varphi[X] \in \Sigma^+$ требуется знание лишь некоторой "конечной", причем положительной информации x о классе X, т.е. информации вида "$x \subseteq X$" (см. также принципы непрерывности из §2). В отличие от $\Sigma^{(+)}$-формул, Δ_0-формулы (без "+") задают "разрешимые" свойства объектов, т.е. "за конечное число шагов" можно распознавать не только истинность таких формул, но и ложность. Это следует из того, что класс $\Delta_0 \subseteq \Sigma$ замкнут относительно взятия отрицания формул.

Для любой формулы $\varphi \in \Sigma^+$ введем выражение $\{x \mid \varphi[x]\}$ для класса всех x таких, что $\varphi[x]$, называя такие выражения, а также классовые переменные классовыми (Σ^+-) термами. Мы будет обозначать их, в отличие от объектных термов $t, s, \ldots$, прописными буквами $A, B, F, \ldots$ и считать, что они лежат в Σ^+. Заметим, что классовые термы могут задавать более широкую, чем $\mathbf{P}$, совокупность классов в универсуме $\mathbf{A}$, которую мы обозначим через $\Sigma^+(\mathbf{A},\mathbf{P})$.

Множества a естественно отождествлять с классами $\{x \mid x \in a\}$. Выражение $t \in \{x \mid \varphi\}$ будем рассматривать как другую запись обычной подстановки $\varphi_x[t]$ в формулу φ терма t вместо переменной x. (Нижний индекс x в записи $\varphi_x[t]$ иногда будем опускать. Запись $\varphi[x]$ будет означать также, что в выражении φ нас интересуют вхождения переменной x.) С учетом этих соглашений, понятен смысл подстановки $\varphi_X[A]$ или $\varphi_X[t]$ в формулу φ классового терма A или объектного терма t вместо классовой переменной X. Таким образом, эти и приводимые в дальнейшем обозначения носят, строго говоря, метаматематический характер и не затрагивают исходный язык. Заметим, что подстановка $\varphi_X[A]$ имеет смысл даже, если в подразумеваемой модели $(\mathbf{A},\mathbf{P})$ терм A задает класс не из $\mathbf{P}$. Положим $A \subseteq B \rightleftharpoons \forall x(x \in A \to x \in B)$ и $A \equiv B \rightleftharpoons A \subseteq B \wedge B \subseteq A$. Нетрудно убедиться, что в KPU_0 имеет место монотонность $A \subseteq B \to (\varphi_X[A] \to \varphi_X[B])$ и $A \subseteq B \to F_X[A] \subseteq F_X[B]$ для $\varphi, F \in \Sigma^+$ (поскольку классовая переменная X входит положительно).

Секвенция $\Gamma \to \Delta$ (исчисления LK, где Γ и Δ - два списка формул, причем подразумевается конъюнкция списка Γ и дизъюнкция списка Δ) называется Σ^+ - (Δ_0^+-, Σ-, Δ_0-) секвенцией, если $\Gamma, \Delta \subseteq \Sigma^+(\Delta_0^+, \Sigma, \Delta_0)$. Аксиомы Крипке-Платека [5,6] теории KPU_0, очевидно, приводимы к виду Σ-секвенций. Формулы $A \subseteq B$ мы также будем рассматривать как Σ^+-секвенции $x \in A \to x \in B$, игнорируя, как обычно, внешний неограниченный квантор всеобщности по x.

§2. Аппликация и λ-абстракция в KPU_0

Классы можно рассматривать как функции, переводящие классы в классы (см. также [7-9]). Действительно, для любых классовых (Σ^+-) термов F и A определим операцию аппликации

$$FA \rightleftharpoons \{y \mid \exists x \subseteq A(\langle x, y \rangle \in F)\} .$$

Здесь класс F выступает в роли функции, A - в роли ее аргумента. Только "конечная" часть $x \subseteq A$ класса A используется для нахождения какого-нибудь значения $y \in FA$. Функции и аргументы, очевидно, можно поменять ролями. Даже применение функции к самой себе имеет здесь вполне определенный смысл: $FF \equiv \{ y \mid \exists x \subseteq F(\langle x, y \rangle \in F)\}$.

Далее, для любого классового терма $A \rightleftharpoons A[X]$, возможно, зависящего от X, определим классовый Σ^+-терм $\lambda X.A$, который уже не зависит от X:

$$\lambda X.A \rightleftharpoons \{z \mid \text{если } z \text{ есть пара } \langle x, y \rangle, \text{ то } y \in A_X[x]\} \equiv \{\langle x, y \rangle \mid y \in A_X[x]\} \cup \{z \mid z \text{ не есть пара}\}.$$

Эта конструкция называется оператором λ-абстракции. Интуитивно $\lambda X.A$ представляет ту же функцию, что и терм A от переменной X. Это утверждение в действительности верно, если подразумеваемый универсум $\mathbb{A}$ есть модель $HF(U)$ наследственно-конечных множеств над U. К сожалению, если к теории KPU_0 не добавлять специальных аксиом, мы сможем доказать в ней только то, что $\lambda X.A$ является приближением снизу для функции $B \mapsto A_X[B]$ (см. ниже утверждение (β^*)). Это приближение превращается в тождество, если вместо классовых термов B рассматривать множества (см. (β_0)) или вообще рассматривать только классовые термы без (свободных) классовых переменных (см. β).

Классы можно также трактовать как функции, переводящие объекты универсума (т.е. праэлементы или наследственно - "конечные" множества) в классы. Определим соответствующие операции λ-абстракции (по малым переменным) и аппликации:

$$\lambda x.A \rightleftharpoons \{z \mid \text{если } z \text{ есть пара } \langle x,y\rangle, \text{ то } y \in A[x]\},$$

$$F^{\uparrow}\{t\} \equiv \{y \mid \langle t,y\rangle \in F\},$$

где $F^{\uparrow} \rightleftharpoons \{\langle\{x\},y\rangle \mid \langle x,y\rangle \in F\}$ и $\{t\} \rightleftharpoons \{x \mid x = t\}$. На этот раз уже в KPU_0 доказуемо, что $\lambda x.A$ действительно задает требуемую функцию $A[x]$ от x (см.ниже $(\hat\beta)$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. В теории KPU_0 выводимы формулы:

$B_1 \subseteq B_2 \to A_X[B_1] \subseteq A_X[B_2]$;

$F_1 \subseteq F_2 \wedge A_1 \subseteq A_2 \to F_1A_1 \subseteq F_2A_2$;

$FA \equiv \cup\{fa \mid f \subseteq F,\ a \subseteq A\}$;

$(\cup_{z\in B}F[z])A \equiv \cup_{z\in B}(F[z]A)$, если z не входит в A и в B;

(β^*) $(\lambda X.A)B \equiv \cup_{b\subseteq B}A_X[b] \subseteq A_X[B]$;

(β_0) $(\lambda X.A)t \equiv A_X[t]$;

(β) $(\lambda X.A)B \equiv A_X[B] (\equiv \cup_{b\subseteq B} A_X[b])$, если $(\lambda X.A)B$ не содержит классовых переменных;

(ξ^*) $\forall x(A_X[x] \subseteq B_X[x]) \leftrightarrow (\lambda X.A) \subseteq (\lambda X.B)$;

(η^*) $A \subseteq \lambda X.AX$, если X не входит в A;

$F \subseteq G \to F^{\uparrow}\{t\} \subseteq G^{\uparrow}\{t\}$;

$F^{\uparrow}\{t\} \equiv \cup\{f^{\uparrow}\{t\} \mid f \subseteq F\}$;

$(\cup_{z\in B}F[z])^{\uparrow}\{t\} \equiv \cup_{z\in B}(F[z]^{\uparrow}\{t\})$, если z не входит в t и в B;

$(\hat\beta)$ $(\lambda x.A)^{\uparrow}\{t\} \equiv A_x[t]$;

$(\hat\xi)$ $\forall x(A \subseteq B) \leftrightarrow (\lambda x.A) \subseteq (\lambda x.B)$;

$(\hat\eta)$ $A \subseteq \lambda x.A^{\uparrow}\{x\}$, если x не входит в A.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этих утверждений, кроме (β), состоит в непосредственной их проверке, с использованием определений или предыдущих утверждений. Например, равенство (β^*) получается так:

$$(\lambda X.A)B \gtrsim \{y \mid \exists x \subseteq B \ \langle x, y \rangle \in (\lambda X.A)\} \gtrsim$$
$$\Rightarrow \{y \mid \exists x \subseteq B \ (y \in A_X[x])\} \equiv \cup_{x \subseteq B} A_X[x].$$

Включение (β^*) следует из монотонности $A_X[B]$ по B.

Равенство (β) сводится в силу (β^*) к следующему принципу <u>Σ-непрерывности</u> (без "+"): $A_X[B] \equiv \cup_{b \subseteq B} A_X[b]$ или $\varphi_X[B] \leftrightarrow \exists b \subseteq \subseteq B \varphi_X[b]$, где $A, \varphi \in \Sigma^+(X)$, $B \in \Sigma$. Этот принцип следует из доказуемого в KPU_0 принципа Σ-перечисления Ю.Л.Ершова [12] и утверждает, что для вычисления истинности $\varphi[B]$ достаточно "конечной" части B.

Обозначим[x)] через KPU_0^+ теорию KPU_0 + (β^+), где схема аксиом

(β^+) $(\lambda X.A)B \equiv A_X[B]$

выражает условие, что терм $\lambda X.A$ действительно задает требуемую функцию A от X. Здесь "+" означает, что в терм $(\lambda X.A)B$ могут входить свободные классовые переменные. Как уже отмечалось, аксиома (β^+) истинна в модели $HF(U)$ наследственно-конечных множеств над U (при любом выборе совокупности классов P в $HF(U)$). Что́ стоит за этой аксиомой говорит

ТЕОРЕМА I. В KPU_0 схеме (β^+) эквивалентны следующие схемы аксиом (в тех случаях, когда эти схемы не содержат (свободных) классовых переменных, они даже выводимы в KPU_0):

<u>Σ-объединение относительно классовых переменных</u> ($\varphi \in \Sigma$ без "+", $\vec{Y}$ - классовые переменные):

$\forall x \in a \exists \vec{y} \subseteq \vec{Y}(\vec{y} \notin U \wedge \varphi) \rightarrow \exists \vec{b} \subseteq \vec{Y} \forall x \in a \exists \vec{y} \subseteq \vec{b} \ \varphi$;

<u>Σ^+-объединение</u> ($\varphi, B \in \Sigma^+$, x не входит в B):

$\forall x \in a \exists y \subseteq B \varphi \rightarrow \exists b \subseteq B \forall x \in a \exists y \subseteq b \ \varphi$;

<u>Σ^+-подстановка</u> ($\varphi, B[x] \in \Sigma^+$):

$\forall x \in a \exists y \subseteq B[x] \varphi \rightarrow \exists f \forall x \in a (f^{\uparrow}\{x\} \neq \emptyset \wedge \forall y \in f^{\uparrow}\{x\} (y \subseteq B[x] \wedge \varphi))$;

<u>Σ^+-непрерывность</u> ($\varphi, A \in \Sigma^+$):

$\varphi_X[A] \leftrightarrow \exists a \subseteq A \varphi_X[a]$;

<u>Σ^+-непрерывность на классовых переменных</u> + Σ^+ - рефлексия:

---

x) Заметим, что в [5] обозначение KPU^+ имеет совсем другой смысл.

$$\varphi \leftrightarrow \exists x \subseteq X\, \varphi_X[x] \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \exists v\ \varphi^{(v)} \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \exists v\, \exists x \subseteq X(\varphi_X[x])^{(v)},$$

где $\varphi \in \Sigma^+$ и $\varphi^{(v)}$ есть результат замены в φ неограниченных кванторов $\exists u$ на $\exists u \in v$;

<u>Σ^+-непрерывность в терминах пределов семейств</u> ($\varphi, A, B \in \Sigma^+$):

$\varphi[\bigcup_{x \in B} A[x]] \leftrightarrow \exists b \subseteq B\ \varphi[\bigcup_{x \in b} A[x]]$;

(S^+): $((SA)B)C \equiv (AC)(BC)$

для $S \gtrsim \lambda X.\lambda Y.\lambda Z.(XZ)(YZ)$ (или хотя бы для какого-нибудь классового Σ^+-терма S) и для всех классовых Σ^+-термов A, B, C.

Заметим, что схема Σ^+-непрерывности + Σ^+-рефлексии обобщает принцип Σ-перечисления [12].

Эквивалентность (β^+) $\Leftrightarrow$ (Σ^+-непрерывность) наиболее очевидна, поскольку в силу (β^*) схема (β^+) равносильна схеме (в которой могут участвовать свободные классовые переменные) $A_X[B] \equiv \bigcup_{b \subseteq B} A_X[b]$, являющейся просто другой формой схемы Σ^+-непрерывности.

Схема Σ^+-непрерывности на классовых переменных получается из схемы Σ-объединения относительно классовых переменных индукцией по построению формулы φ (главный случай - когда φ начинается с квантора $\forall x \in a$).

Отсюда и из доказуемой в KPU_0 схемы Σ-непрерывности легко следует схема Σ^+-непрерывности:

$$\varphi[\bar{\bar{X}}, A[\bar{\bar{X}}]] \rightarrow \exists \bar{\bar{x}} \subseteq \bar{\bar{X}}\, \varphi[\bar{\bar{x}}, A[\bar{\bar{x}}]] \leftrightarrow \exists \bar{\bar{x}} \subseteq \bar{\bar{X}}\, \exists a \subseteq A[\bar{\bar{x}}]\ \varphi[\bar{\bar{x}}, a] \rightarrow$$
$$\rightarrow \exists a \subseteq A[\bar{\bar{X}}]\ \varphi[\bar{\bar{X}}, a] \rightarrow \varphi[\bar{\bar{X}}, A[\bar{\bar{X}}]].$$

Наиболее сложно доказательство эквивалентности (β^+) $\Leftrightarrow$ (S^+). Отметим лишь, что оно опирается на представление в KPU_0 каждого Σ^+-класса в виде чисто аппликативного терма, составленного из классовых переменных и из классовых Δ_0-термов (без "+"). (Заметим, что комбинатор S не участвует в этом представлении.)

Схема Σ-объединения наиболее явным образом говорит о том, что требуется от самих введенных в рассмотрение классов (из $\mathbb{P}$). С другой стороны, непосредственно усматривается ее интуитивная истинность.

Заметим, что ниоткуда не следует, что область $\mathbf{P}$ пробегания классовых переменных замкнута относительно Σ^+-определений. Например, $\mathbf{P}$ может состоять только из одного предиката. Правда, в обозначении $\lambda X.A$ и в схеме (β^+) интуитивно подразумевалось, что X пробегает все Σ^+-классы. Но формально в классовом терме $\lambda X.A$ переменная X вообще не участвует (см. определение в начале §2), а в схеме (β^+) вовсе не утверждается, что $\exists X(X \equiv B)$. Все же мы вполне могли бы принять соответствующую схему Σ^+-выделения для классов:

$$\exists X(X \equiv \{x \mid \varphi\}),$$

где $\varphi \in \Sigma^+$, поскольку она в интересующих нас ситуациях совершенно безобидна. Это показывают приводимые в §4 предложение 2 и теорема 4.

§3. Теорема о неподвижной точке

Предыдущие довольно элементарные рассмотрения, а фактически – только определения позволяют нам легко доказать (вторую) теорему о рекурсии для KPU_0^+ ($\rightleftharpoons KPU_0 + \beta^+$), которая утверждает, что для любого классового Σ^+-терма $F[X] \rightleftharpoons \{x \mid \varphi[x, X]\}$ существует Σ^+-решение $A \equiv \{x \mid \psi[x]\}$ рекурсивного уравнения $X \equiv F[X]$ (или эквивалентности $x \in X \leftrightarrow \varphi[x, X]$) такое, что $KPU_0^+ \vdash A \equiv F[A]$ (т.е. $KPU_0^+ \vdash$ $\vdash \varphi[x] \leftrightarrow \varphi[x, \{x \mid \psi[x]\}]$) и A зависит от тех же классовых переменных, что и F, кроме X. Действительно, положим

$$Y \rightleftharpoons \lambda V.(\lambda X.V(XX))(\lambda X.V(XX)),$$

$$\langle X\rangle F[X] \rightleftharpoons Y(\lambda X.F[X]) \equiv_{\beta^+}$$

$$\equiv (\lambda X.F[(XX)])(\lambda X.F[(XX)]).$$

Назовем эту, на первый взгляд, странную конструкцию $\langle\ \rangle$ оператором рекурсии. Заметим, что если X не входит в F, то $\langle X\rangle(FX) \rightleftharpoons$ $\rightleftharpoons Y(\lambda X.FX) \equiv_{\beta^+} YF$.

ТЕОРЕМА 2 (о неподвижной точке или о рекурсии). В теории KPU_0^+ доказуемо

$$F_X[\langle X\rangle F] \equiv \langle X\rangle F,$$

т.е. классовый Σ^+-терм $\langle X\rangle F$ и есть искомое решение уравнения $X \equiv F[X]$. В частности, если X не входит в F, то YF есть решение уравнения $X \equiv FX$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно из λ-исчисления [9] и использует только аксиому (β^+) :

$$\langle X\rangle F[X] \equiv (\lambda X.F[(XX)])(\lambda X.F[(XX)]) \equiv F[(\lambda X.F[(XX)])(\lambda X.F[(XX)])] \equiv F(\langle X\rangle F[X]).$$

Поскольку $KPU_0 \vdash \beta$ (см.предложение I), то мы можем точно так же доказать теорему о рекурсии в теории KPU_0 (без "+") для классовых Σ^+-термов $F[X]$, содержащих единственную классовую переменную X. В этом случае $\langle X\rangle F$ будет классовым Σ-термом (без классовых переменных). Заметим, что представление $\langle X\rangle F$ в виде $\{x|\psi\}$ будет несколько громоздким. При программировании на этом языке лучше использовать λ-символику и конструкцию $\langle X\rangle F$ как первичные.

Теорема о неподвижной точке может быть усилена до теоремы о наименьшей неподвижной точке или обобщенной теоремы Ганди с классовыми параметрами. Заметим, что в ее доказательстве, приводимом ниже, как и в доказательстве Ю.Л.Ершова [12] теоремы Ганди без классовых параметров [5], не используется теорема компактности Барвайса и формализация семантики. Кроме того, в отличие от [10], здесь не делается ссылки на теорему Ганди без классовых параметров. Фактически это "синтаксическое" доказательство является адаптацией к теории KPU_0^+ "семантического" доказательства Д.Парка о том, что "парадоксальный комбинатор" $\mathbf{Y}$ задает оператор наименьшей неподвижной точки (см. [7], где этот факт доказан для конкретной λ-модели $P\omega$, состоящей из множества всех подмножеств натурального ряда). Мы приводим его, чтобы продемонстрировать силу λ-языка и удобство его использования при изложении аксиоматической теории множеств, а также ввиду принципиального значения теоремы Ганди и теоремы Парка. Кроме того, это доказательство,как убедится читатель, вполне элементарно.

Существенную роль в доказательстве теоремы Ганди играет правило $\in$-индукции

$$\frac{\forall y \in x\ \varphi_x[y] \to \varphi[x]}{\forall x\ \varphi[x]},$$

которое очевидно выполняется в $\in$-фундированных универсумах $\mathbb{A}$, например, в $HF(U)$. Если положить $\varphi[x] \rightleftharpoons \psi[x] \wedge \forall y \in x\ \psi_x[y] \wedge \forall y \in \in \cup x\ \psi_x[y]$, то получим также производное от него правило

$$\frac{\forall y \in \cup\cup x\ \psi_x[y] \to \psi[x]}{\forall x\ \psi[x]}.$$

Напомним, что производность правила θ/η в исчислении T означает $T+\theta\vdash\eta$. Фактически будут использоваться ограничения правила $\in$-индукции до правил $\in$-$\Delta_0^+(X)$-индукции, $\in$-$\Sigma^{(+)}$-индукции и $\in$-Δ_0-индукции (без "+"). Здесь подразумеваются соответствующие ограничения на вид индукционной формулы φ. Так, $\varphi\in\Delta_0^+(X)$ означает, что $\varphi\in\Delta_0^+$ и X – единственная классовая переменная формулы φ.

ТЕОРЕМА 3 (о наименьшей неподвижной точке). Правило вывода $GX\subseteq X/\Upsilon G\subseteq X$ (и,следовательно, в силу (β^*), правило $F[X]\subseteq X/\langle X\rangle F[X]\subseteq X$) является производным в теории [KPU_0 (без "+") + правило $\in$-$\Delta_0^+(X)$-индукции]. В частности, правило $GA\subseteq A/\Upsilon G\subseteq A$ является производным в теории [KPU_0+ правило $\in$-$\Sigma^{(+)}$-индукции] для любых $A\in\Sigma^{(+)}$, $G\in\Sigma^+$.

Заметим, что если теория KPU_0 не содержит специальных аксиом и правил с классовыми переменными (свободными или связанными), то она не налагает никаких ограничений на $\mathbb{P}$ и поэтому в случае $\in$-фундированной модели $(\mathbb{A},\mathbb{P})$ теории $KPU_0^{(+)}$ решение ΥG уравнения $GX\equiv X$, где $G\in\Sigma^{(+)}$, будет содержаться в любом (в абсолютном смысле) решении X неравенства $GX\subseteq X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 3. Поскольку $\Upsilon G\equiv\bigcup_{g\subseteq G}\Upsilon g$ и из $GX\subseteq X$ и $g\subseteq G$ следует $gX\subseteq X$, то нам достаточно показать, исходя из $gX\subseteq X$, что $\Upsilon g\subseteq X$ (для любого множества g). В силу (β_0) и непрерывности аппликации имеем $\Upsilon g\equiv(\lambda x.g(xx))(\lambda x.g(xx))\equiv\hat{g}\,\hat{g}\equiv$ $\equiv\bigcup_{x\subseteq\hat{g}}xx$, где $\hat{g}\rightleftharpoons\lambda x.g(xx)$. Поэтому требуемое неравенство $\Upsilon g\subseteq$ $\subseteq X$ сводится к импликации $\psi[x,X]\rightleftharpoons(x\subseteq\hat{g}\to xx\subseteq X)$, которую мы докажем, используя правило $\in$-$\Delta_0^+(X)$-индукции, а фактически приведенное выше производное правило по формуле $\psi[x,X]\in\Delta_0^+(X)$ (учитывая, что $\hat{g}$ есть Δ_0-класс).

Итак, пусть $x\subseteq\hat{g}$ и $y_0\in xx$; покажем, что $y_0\in X$. Из $y_0\in xx$ следует, что для некоторого $y\subseteq x$ пара $\langle y,y_0\rangle$ принадлежит x и, значит (в силу принятой кодировки пар $\langle y,y_0\rangle=\{\{y\},\{y,y_0\}\}$), y $\in$-предшествует x. Точнее, $y\in\bigcup\bigcup x$. Поэтому можно считать, что для y выполняется индукционное предположение $\psi[y]\rightleftharpoons(y\subseteq\hat{g}\to yy\subseteq X)$, которое дает $yy\subseteq X$, поскольку $y\subseteq x\subseteq\hat{g}$. Но тогда из $\langle y,y_0\rangle\in x\subseteq$ $\subseteq\hat{g}\rightleftharpoons\lambda x.g(xx)$ получаем $y_0\in g(yy)\subseteq gX\subseteq X$. Это доказывает по правилу индукции требуемую импликацию $\psi[x]\rightleftharpoons x\subseteq\hat{g}\to xx\subseteq X$, а значит, и теорему.

В случае $A \rightleftharpoons HF(U)$ можно определить приближения $\emptyset \subseteq G\emptyset \subseteq$ $\subseteq G^2\emptyset \subseteq \ldots$, где $G^{n+1}\emptyset \rightleftharpoons G(G^n\emptyset)$, дающие в пределе наименьшую неподвижную точку $G^{\infty}_{\emptyset} \rightleftharpoons \bigcup_{n\in\omega} G^n_{\emptyset} \equiv YG$. В общем случае эта монотонная последовательность должна определяться (например, с помощью оператора Y) не только на "настоящих" конечных натуральных числах n, но и вообще на ординалах α универсума: $G^{\alpha}_{\emptyset} \equiv \bigcup_{\gamma<\alpha} GG^{\gamma}_{\emptyset}$. Напомним, что порядок $<$ на ординалах совпадает с отношением $\in$. Положим $G^{\infty}_{\emptyset} \rightleftharpoons \bigcup_{\alpha\text{-ординал}} G^{\alpha}_{\emptyset}$ и $\tilde{Y} \rightleftharpoons \lambda V.\ V^{\infty}_{\emptyset}$. Как в теореме 2, $KPU_0^+ \vdash \tilde{Y}G \equiv$ $\equiv G(\tilde{Y}G)$. Если KPU_0 содержит (сигнатурную) функцию $\langle g$, ординал $\alpha\rangle \mapsto g^{\alpha}_{\emptyset}$ и аксиому $g^{\alpha}_{\emptyset} = \bigcup_{\gamma<\alpha} gg^{\gamma}_{\emptyset}$, то, как нетрудно показать, теорема 3 выполняется и для $\tilde{Y}$. Отсюда следует (уже без всяких предположений о KPU_0), что равенство $Y \equiv \tilde{Y}$ выводимо в теории (KPU_0+ + правило $\in$-Σ-индукции (без "+")). В частности, в любой $\in$-фундированной модели теории KPU_0 имеем $Y \equiv \tilde{Y}$.

§4. Исчисление Σ-выражений

Мы фактически имеем Σ-выражения только трех типов: объектного (обычные термы сигнатуры σ), булевского (Σ^+-формулы) и классового (классовые Σ^+-термы). Как и в [I], в исчислении Σ-выражений естественно рассматривать только формулы вида $\varphi \to \psi$ и $A \subseteq B$, выражающие отношения аппроксимации, где φ, ψ – Σ^+-формулы и A, B – классовые Σ^+-термы. Заметим, что такое ограничение на язык эквивалентно ограничению класса всех секвенций $\Gamma \to \Delta$ до класса Σ^+-секвенций (см. конец §I), поскольку формулы $A \subseteq B$ соответствуют Σ^+-секвенциям $x \in A \to x \in B$. В связи с этим свойство конструкции $\langle X\rangle F[X]$ задавать наименьшую неподвижную точку естественно формулировать в виде правила вывода [I]:

$$\langle\,\rangle^{(+)}:\qquad \frac{F[A] \subseteq A}{\langle X\rangle F[X] \subseteq A} \quad (F[A] \in \Sigma^{(+)}),$$

а не импликации $F[A] \subseteq A \to \langle X\rangle F[X] \subseteq A$, которая не имеет вида Σ^+-секвенции.

С другой стороны, на классовые переменные и на конструкции AB, $\lambda X.A$, $\langle X\rangle F$, соответствующие аппарату (рекурсивных) процедур с процедурными и объектными параметрами в языках программирования, можно (но не обязательно) смотреть как на средство повышения только "уровня" или удобства, а не (экстенсиональной) дедуктивной и выразительной силы теории KPU_0 и соответствующего алгоритмического языка. Поэтому также представляет интерес вопрос, в каких случаях нововведения, связанные с классами, не усиливают исходный язык и теорию KPU_0, а также вопрос о том, к чему приводит ограничение дедуктивного аппарата, заключающееся в запрете использования не Σ^+-секвенций.

Тот факт, что конструкции AB, $\lambda X.A$, $\langle X\rangle F$ экстенсионально не влияют на выразительную силу языка Σ^+-формул, непосредственно следует из их определения (как метаконструкций). Перейдем к рассмотрению исчислений.

Говорят, что расширение $T' \supseteq T$ исчисления T является консервативным относительно класса формул, если в T и в T' доказуемы одни и те же формулы из этого класса. Обозначим через $KPU_0^{\langle\ \rangle(+)}$ теорию $KPU_0^{(+)} + \langle\ \rangle^{(+)}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если нелогические аксиомы и правила вывода теории KPU_0 не содержат кванторов по классовым переменным и замкнуты относительно подстановки классовых Σ^+-термов вместо классовых переменных, то теория KPU_0 + Σ^+-выделение консервативно расширяет KPU_0 относительно формул без кванторов по классовым переменным, а также консервативно расширяет теорию $\overline{KPU}_0$ - результат ограничения теории KPU_0 на язык без классовых переменных.

СЛЕДСТВИЕ. В тех же предположениях о KPU_0 теория $KPU_0^{\langle\rangle+}$ + Σ^+-выделение консервативно расширяет теорию $KPU_0^{\langle\rangle+}$ относительно секвенций без кванторов по классовым переменным и теорию $\overline{KPU}_0^{\langle\rangle}$ относительно секвенций без классовых переменных. Справедливо также аналогичное утверждение с правилом Σ^+-индукции вместо $\langle\rangle^+$.

Пусть символы $\vdash\Sigma^+$, $\vdash\Sigma$ и $\vdash\Delta_0$ обозначают соответствующие ограничения на вид секвенций, участвующих в (LK-) выводах.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если выполняются те же предположения о KPU_0 и нелогические правила и аксиомы теории KPU_0 составлены из Σ^+-секвенций и замкнуты относительно подстановок объектных термов вместо объектных переменных, то теория $\mathrm{KPU}_0^{\langle\,\rangle+}$ консервативно расширяет исчисление $\mathrm{KPU}_0^{\langle\,\rangle(+)} \restriction \Sigma^{(+)}$, а теория $\Sigma\mathrm{KPU}^+ \rightleftharpoons [\mathrm{KPU}_0^+ +$ правило $\in$-Σ^+-индукции$]$ консервативно расширяет исчисление $\Sigma\mathrm{KPU}^{(+)} \restriction \Sigma^{(+)}$.

В доказательстве этого предложения используется обобщенная теорема об устранении сечений [13-15], которая позволяет устранять из выводов $\Sigma^{(+)}$-секвенций "окольные пути", содержащие не $\Sigma^{(+)}$-секвенции.

Таким образом, мы приходим к двум естественным исчислениям Σ-выражений, фактически, к исчислениям Σ^+-секвенций: $\mathrm{KPU}_0^{\langle\,\rangle+} \restriction \Sigma^+$ и $\Sigma\mathrm{KPU}^+ \restriction \Sigma^+$. В силу теоремы 3 и предложения 3, правило $\langle\,\rangle^+$ является производным в исчислении $\Sigma\mathrm{KPU}^+ \restriction \Sigma^+$. Это исчисление благодаря большой силе правила $\in$-$\Sigma^{(+)}$-индукции имеет вполне завершенный вид. Однако правило $\in$-$\Sigma^{(+)}$-индукции представляется даже слишком сильным, поскольку приводит к чрезвычайно быстро растущим (или к трудно вычислимым) доказуемо-рекурсивным функциям типа объекты $\to$ объекты, например, к любым примитивно-рекурсивным числовым функциям. С точки зрения практических приложений и вообще с точки зрения оснований математики, было бы желательно ограничиться правилом $\in$-Δ_0-индукции (см. также [13,15]). Это правило само по себе настолько безобидно (в отличие, скажем, от правила $\langle\,\rangle$), что его естественно отнести прямо к теории KPU_0. Более того, ценой некоторого (впрочем, весьма значительного) усиления теории $\mathrm{KPU}_0^{(+)}$ новыми первичными операциями и соответствующими Δ_0-аксиомами правило $\in$-Δ_0-индукции оказывается достаточным для установления допустимости (а не производности, как в теореме 3) правила $\langle\,\rangle^{(+)}$, а также и правила $\in$-$\Sigma^{(+)}$-индукции.

Предположим, что все дополнительные правила (и аксиомы) теории KPU_0 являются Δ_0-правилами (без "+") и содержат для любых терма t и Δ_0-формулы φ сигнатуры σ теории KPU_0 1) аксиому рекурсии вида

$$\tilde{t}[x] = \cup_{y \in \cup\cup x}\, t[\tilde{t}[y]]\ ,$$

где $\tilde{t}$ - некоторый терм, соответствующий терму t, и 2) правило $\in$-Δ_0-индукции $\forall y \in x\ \varphi_x[y] \to \varphi[x]/\varphi_x[t]$.

ТЕОРЕМА 4. В указанных предположениях правило $\langle\,\rangle^{(+)}$ является допустимым в теории $KPU_0^{(+)}$.

Приведем ряд уточнений этой теоремы, которые также несут некоторую информацию о ее доказательстве. Так, если в KPU_0 в виде Δ_0-секвенций представлены и аксиомы Крипке-Платека, кроме принципа коллекции (как в [15], где теоретико-множественные операции $\emptyset$, $\{x,y\}$, $\cup_{x\in a} t[x]$ и $\{x\in a \mid \varphi[x]\}$ определимы термами сигнатуры σ для любых сигнатурных термов t и Δ_0-формул φ), то исчисление $T \rightleftharpoons [KPU_0^{\langle\,\rangle+} + \Sigma^+\text{-выделение}]$ (или, эквивалентно, исчисление $KPU_0^{\langle\,\rangle(+)} \restriction \Sigma^{(+)}$) консервативно расширяет исчисление $KPU_0 \restriction \Delta_0$ (без "+"). Фактически любой вывод $\Sigma^{(+)}$-секвенции $\Gamma \to \Pi$ в теории T можно преобразовать в вывод Δ_0-секвенции $\Gamma_0 \to \Pi_0$ в исчислении $KPU_0 \restriction \Delta_0$, из которой в $KPU_0^{(+)}$ следует $\Gamma \to \Pi$. При этом если $\Gamma \to \Pi$ есть Δ_0-секвенция, то $\Gamma_0 \to \Pi_0$ совпадает с $\Gamma \to \Pi$. Доказательство теоремы 4 существенно использует технику из [14] (см.также [15]), в частности, оно основано на некотором понятии реализуемости $\Sigma^{(+)}$-секвенций, которое представляет интерес с точки зрения дедуктивного синтеза программ (в виде объектных термов сигнатуры σ) с гарантированной верхней оценкой сложности вычисления. А именно, если $T \vdash \varphi[\bar{X}] \to \exists y\ \psi[\bar{X},y]$, где $\varphi \in \Delta_0^+, \psi \in \Sigma^+$ (соответственно $\psi \in \Delta_0^+$) и $\bar{X}$ - все свободные классовые переменные φ и ψ, то в KPU_0 без принципа коллекции (соответственно в $KPU_0 \restriction \Delta_0$) выводима секвенция вида $\varphi[\bar{x}] \to \exists y \in t[\bar{x}]\psi[\bar{x},y]$, где $\bar{x}$ - объектные переменные и $t[\bar{x}]$- некоторый сигнатурный терм. Заметим, что центральный пункт доказательства теоремы 4 состоит в извлечении подходящей "оценки" из доказательства теоремы 3.

Теорема 4 и все приведенные ее уточнения останутся справедливыми, если в KPU_0 заменить схему рекурсии, приведенную перед теоремой, на близкую (возможно, даже эквивалентную) схему $\tilde{t}[x] = t[x, \cup_{y\in x}\tilde{t}[y]]$. При этом правило вывода $\langle\,\rangle^{(+)}$ в формулировке теоремы 4 и ее уточнений можно всюду заменить на правило $\in$-$\Sigma^{(+)}$-индукции. Отсюда и из того, что с помощью правила $\in$-$\Sigma^{(+)}$-индукции можно,как обычно,обосновать обе упомянутые схемы рекурсии (для Σ-функций),следует,что выразительная сила второй схемы не слабее первой.

Итак, исчисления Σ-выражений (точнее, классы исчислений вида $KPU_0^{\langle\,\rangle+} \vdash \Sigma^+$ и $\Sigma\, KPU^+ \vdash \Sigma^+$) консервативно расширяют теорию множеств $KPU_0 \vdash \Delta_0$, которая использует только ограниченные кванторы. Этот результат представлялся бы вполне удовлетворительным,если бы при этом в KPU_0 не участвовали специальные схемы рекурсии (см. предположения к теореме 4 и замечания после нее), которые, как и правило $\in$-$\Sigma^{(+)}$-индукции, делают теорию KPU_0 сильнее, чем хотелось бы. В теоретико-сложностных терминах это означает,что указанная рекурсия выводит за пределы полиномиальной вычислимости (см. в связи с этим [15], а также следующий параграф).

Как следует из замечаний к теореме 4, дедуктивная сила правила $\in$-$\Sigma^{(+)}$-индукции в данном случае достаточно ясна и полностью характеризуется соответствующей схемой рекурсии. Истинная же дедуктивная сила правила $\langle\,\rangle^{(+)}$ еще подлежит уточнению. Если окажется, что оно действительно выводит за пределы, например, полиномиальной вычислимости (а это скорее всего так), то будет очень желательно заменить это важное правило на что-то более адекватное. Во всяком случае здесь мы усматриваем "горячую точку" исчисления Σ-выражений.

§5. KPU_0 как основания математики

Построенное исчисление Σ-выражений ($\Sigma\, KPU^+ \vdash \Sigma^+$ или $KPU_0^{\langle\,\rangle+} \vdash \Sigma^+$) является, по существу, некоторым способом изложения начал теории вычислимости в теории множеств Крипке-Платека. Роль подобного исчисления как возможного подхода к программированию отмечалась Ю.Л.Ершовым [1,16], С.С.Гончаровым и Д.И.Свириденко (см. [17],где речь идет не о самой теории Крипке-Платека,а о ее аналоге - теории GES списочных надстроек), а также обсуждалась выше.

Однако, по мнению автора, дело здесь не только в программировании или в теории обобщенной вычислимости, с которой,в частности, в математической логике связывают теорию Крипке-Платека. Как уже говорилось, на эту теорию и на исчисление Σ-выражений можно смотреть как на собственно теорию множеств, хотя и довольно слабую. Тем самым она, вероятно,может претендовать и на роль оснований математики, хотя бы той, которой (неявно) пользуются прикладники или программисты, когда разрабатывают алгоритмы и программы.

С другой стороны, известно, что при переходе от теоретических построений математики к практическим методам вычислений (скажем, в линейной алгебре [18]) часто возникают некоторые несообразности. Например, теоретически непрерывная функция становится практически разрывной или, наоборот, дискретное становится непрерывным.

Представляется, что трудности стыковки теории с практикой вычислений происходят из-за чрезмерной, можно даже сказать, догматической идеализации понятия конечного в классической и традиционной конструктивной математике. Нужны несравненно более слабые, чем принято, теория и соответствующая идеализация конечных множеств, в которых бы не трактовалось как конечное то, что, с точки зрения практики, заведомо более чем бесконечно.

В предыдущем параграфе мы пришли к теории множеств вида $KPU_0 \upharpoonright \Delta_0$ с ограниченными кванторами (и в аксиомах, и в выводах). С точки зрения "оснований", требование ограниченности кванторов является естественным и вполне уместным. С одной стороны, ему, очевидно, и так удовлетворяет математическая практика, где кванторы обычно ограничены бесконечными множествами (натуральными числами, континуумом и т.п.). С другой стороны, в вычислительной практике предметная область, предстающая в виде ресурсов, понимаемых в некотором расширенном смысле, каждый раз является конечной и тем самым тоже ограниченной. К сожалению, в математике, в силу ее внутренних потребностей, происходит отвлечение от ресурсных границ. Это явно декларируется принятием абстракции потенциальной осуществимости и фактически реализуется с помощью участвующих в аксиомах кванторов по потенциально или актуально бесконечным множествам, т.е. с помощью кванторов, не ограниченных конечными множествами (= ресурсами). Но так ли уж необходимы (прикладной) математике абстракции актуальной бесконечности и потенциальной осуществимости и такие ограниченные лишь в бесконечности кванторы? Нельзя сказать, что этот вопрос серьезно исследовался, хотя и были попытки его поставить (в несколько иных терминах; см., например, [19]).

Заметим, что одной лишь (конечной) ограниченности кванторов мало. Надо, чтобы и первичные операции, описываемые теорией, не использовали (прямо или косвенно) абстракцию потенциальной осуществимости. Например, неограниченный квантор $\forall x(x \subseteq a \to \ldots)$ легко превратить в ограниченный $\forall x \in P(a) \ldots$, если постулировать функцию $P(a)$, дающую множество всех подмножеств (конечного) множества a. В схеме рекурсии из предположения к теореме 4 также используется потенциальная осуществимость, поскольку эта схема позволяет итерировать любую уже построенную операцию. В связи с этим пока не ясно, как относиться к введенному в §4 правилу $\langle\,\rangle$ о наименьшей неподвижной точке (вполне естественному при традиционном взгляде на вещи). В то же время правило $\in$-Σ-индукции представляется неприемлемым, ввиду того, что с помощью него можно обосновывать неограниченные итерации.

Не следует думать, что в слабой теории нельзя формализовать сколько-нибудь значительную часть математики, хотя бы в несколько преобразованном,"нестандартном" виде. Примером такого преобразования математики может служить так называемая альтернативная теория "больших" и "малых" конечных множеств П.Вопенки [20], упоминание которой здесь представляется наиболее уместным. Так, в связи с этим возникает интересная задача построения другого варианта альтернативной теории множеств на основе некоторой слабой теории вида $KPU_0(\upharpoonright \Delta_0)$ "малых" конечных множеств, причем "малых" - по сравнению как с "большими", так и с "малыми" множествами теории П.Вопенки. Например, речь идет о том, чтобы в полученной теории было недоказуемо, что класс всех подмножеств конечного множества обязательно является конечным множеством[ж)].

Выбор оснований должен быть сознательным и соответствовать преследуемым целям. А цель в данном случае - обеспечить со стороны математической логики возможности для лучшей стыковки между теоретической математикой и вычислительной практикой. Разумеется,нужно оговориться,что задача такой стыковки, конечно же,не сво-

---

ж) Заметим, что П.Вопенка [20] называет "большие" конечные множества "бесконечными" (что представляется не очень удачным). Они определяются как (формально) конечные множества, которые содержат полумножества, т.е. "размытые" подклассы, не являющиеся множествами. Множества, не содержащие полумножеств (например, $\{0,1,2\}$), выступают в роли "малых" или "достижимых". Подчеркнем, что все эти понятия, с одной стороны, естественны и вполне корректны математически, а с другой - не должны восприниматься совсем уж буквально. Так, и "малые", и "большие", по П.Вопенке, натуральные числа удовлетворяют аксиоме индукции почти во всем ее объеме и потому, если не сравнивать их между собой, практически не отличаются от "настоящих" натуральных чисел, рассматриваемых в обычный теории множеств Цермело-Френкеля или в арифметике Пано.

Заметим, что в отличие от теории П.Вопенки в теории множеств типа KPU непротиворечиво существование теоретико-множественно (и даже Σ-) определимых полумножеств.

дится только к построению теории "малых" конечных множеств и вообще оснований, точно так же, как вся математическая деятельность (в широком смысле) не сводится к канторовской теории множеств.

Что касается теории вида $KPU_0 \upharpoonright \Delta_0$, то для одного из ее вариантов (без схемы рекурсии из теоремы 4) со слабой и вполне приемлемой аксиомой $\in$-Δ_0 -индукции удалось показать, что соответствующий класс доказуемо-рекурсивных функций совпадает с классом полиномиально вычислимых функций (см. [15]). Это свидетельствует о достаточно большой выразительной силе такой теории множеств, как возможных оснований важного фрагмента конечной математики.

Автор благодарен Д.И.Свириденко за полезное обсуждение этой статьи и близких к ней вопросов.

Литература

1. ЕРШОВ Ю.Л. Язык Σ-выражений. -В кн.: Логические вопросы теории типов данных (Вычислительные системы, вып. 114). Новосибирск, 1986, с.3-10.

2. ЕРШОВ Ю.Л. Σ-предикаты конечных типов. -Алгебра и логика, 1985, т.24, №5, с.499-536.

3. САЗОНОВ В.Ю., СВИРИДЕНКО Д.И. Денотационная семантика языка Σ-выражений. -В кн.: Логические вопросы теории типов данных (Вычислительные системы, вып. 114). Новосибирск, 1986, с.16-34.

4. ЕРШОВ Ю.Л. Теория нумераций. -М.: Наука, 1977.-416 с.

5. BARWISE J. Admissible sets and structures.-Berlin: Springer-Verlag,1975.

6. МАККАИ М. Допустимые множества и бесконечная логика. -В кн.: Справочная книга по математической логике. М., 1982, ч. I, с. 235-288.

7. SCOTT D. Data types as lattices.- SIAM J.Computing, 1976, N 5,p.522-587.

8. SCOTT D. Relating theories of the lambda colculus.- In:To Curry: Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism. Academic Press,1980, p.403-450.

9. БАРЕНДРЕГТ Х. Ламбда-исчисление. Его синтаксис и семантика. -М.: Мир, 1985. - 606 с.

10. ЕРШОВ Ю.Л. Σ-допустимые множества.-В кн.: Логические вопросы теории типов данных (Вычислительные системы, вып. 114). Новосибирск, 1986, с. 35-39.

11. ТАКЕУТИ Г. Теория доказательств. -М.: Мир, 1978. -412 с.

12. ЕРШОВ Ю.Л. Принцип Σ-перечисления. -Докл. АН СССР, т.270, № 4, 1983, с. 786-788.

13. SAZONOV V.Yu. A logical approach to the problem "P=NP?" - In: MFCS'80, Lecture Notes in Computer Science, N 88; Springer-Verlag,1980,p.562-575.

14. САЗОНОВ В.Ю. Принцип коллекции и квантор существования.–В кн.: Логико-математические основы МОЗ (Вычислительные системы, вып. 107). Новосибирск, 1985, с.30–39.

15. САЗОНОВ В.Ю. Ограниченная теория множеств и полиномиальная вычислимость. –В кн.: Всесоюз. конф. по прикладной логике.Тез. докл., Новосибирск, 1985, с.188–191.

16. ЕРШОВ Ю.Л. Динамическая логика над допустимыми множествами. – Докл. АН СССР, т.273, №5, с.1045–1048.

17. ГОНЧАРОВ С.С., СВИРИДЕНКО Д.И. Σ-программирование.–В кн.: Логико-математические основы МОЗ (Вычислительные системы,вып.107). Новосибирск, 1985, с.3–29.

18. Вычислительные методы линейной алгебры (Труды Института математики СО АН СССР, том 6). –Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1985.

19. ЕСЕНИН-ВОЛЬПИН А.С. Анализ потенциальной осуществимости. –В кн.: Логические исследования. –М., 1959, с.218–262.

20. ВОПЕНКА П. Математика в альтернативной теории множеств. – М.: Мир, 1983. –150 с.

Поступила в ред.-изд.отд.
27 мая 1986 года