ПРИКЛАДНАЯ ЛОГИКА
(Вычислительные системы)
1986 год Выпуск 116

УДК 681.3:512.8

НЕРАЗРЕШИМОСТЬ ТЕОРИИ МАТРИЧНЫХ ДАННЫХ

А.А. Иванов

Структура матричных данных была определена в [1]. В этой же работе была предложена некоторая бесконечная логика для описания структуры матричных данных и были поставлены вопросы о дальнейшем изучении этих объектов. В связи с проблемой 6 из [1] естественно исследовать вопрос о разрешимости элементарной теории структуры матричных данных. В настоящей заметке этот вопрос решается отрицательно. Все определения и обозначения, используемые ниже, можно найти в [1].

Пусть I, A - бесконечные множества. Рассмотрим структуру $\mathfrak{M}(A,I)$ матричных данных $\langle M, S, I^*, K(I), A^*$; [ИНДЕКСЫ], [ИНДЕКСЫ]$_1$, [ИНДЕКСЫ]$_2$, [ВЫБОР], [ВЫБОР]$_1$, [ВЫБОР]$_2$, [ВЫЧИТ], [ДОБ], [ЗАМЕНА], [ЗАМЕНА]$_1$, [ЗАМЕНА]$_2$, [УДАЛЕНИЕ], [УДАЛЕНИЕ]$_1$, [УДАЛЕНИЕ]$_2$; $\in$, $\perp_M, \perp_S, \perp_I, \perp_{K(I)}, \perp_A\rangle$, где M - множество матриц над A , S - множество массивов над A, $I^* = I\cup\{\perp_I\}$, $K(I)$ - множество конечных подмножеств множества индексов I, $A^* = A\cup\{\perp_A\}$.

ТЕОРЕМА. Стандартная модель арифметики интерпретируется в $\mathfrak{M}(A,I)$. Теория $Th(\mathfrak{M}(A,I))$ неразрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем следующие сокращения:

1. $Reg(X) \rightleftharpoons X \in S \wedge (\forall i \in I)(\forall j \in I)(($[ВЫБОР]$(X,i) \neq \perp_A) \wedge$ $\wedge($[ВЫБОР]$(X,j) \neq \perp_A) \wedge i \neq j \to$ [ВЫБОР]$(X,i) \neq$ [ВЫБОР]$(X,j))$;

2. $REG(L) \rightleftharpoons L \in M \wedge (\forall i_1, i_2, j_1, j_2 \in I)((i_1 \neq i_2 \vee j_1 \neq j_2) \wedge$ $\wedge \bigwedge_{k=1}^{2} (i_k \in$[ИНДЕКСЫ]$_1(L)) \wedge \bigwedge_{k=1}^{2} (j_k \in$ [ИНДЕКСЫ]$_2(L)) \to$ [ВЫБОР]([ВЫБОР]$_1(L,i_1), j_1) \neq$ [ВЫБОР]([ВЫБОР]$_1(L,i_2), j_2))$:

3. $x \in_S X \rightleftharpoons x \in A^* \wedge x \neq \perp_A \wedge X \in S \wedge (\exists i \in I)$[ВЫБОР]$(X,i)=x$;

4. $x \in_M L \rightleftharpoons x \in A^* \wedge x \neq \perp_A \wedge L \in M \wedge (\exists i,j \in I)$[ВЫБОР]([ВЫБОР]$_1$ $(L,i),j) = x$.

Массивы, удовлетворяющие $Reg(X)$, состоят из различных элементов. Аналогичную интерпретацию (только для матриц) имеет предикат $REG(L)$. Покажем, как интерпретировать $\langle \omega; +, \cdot \rangle$ в $\mathfrak{M}(A,I)$. Универсум интерпретируемой модели зададим формулой $Un(X) \rightleftharpoons Reg(X)$, а равенство зададим формулой:

$$card(X,Y) \rightleftharpoons Reg(X) \wedge Reg(Y) \wedge (\exists X_1 \in S)(\exists Y_1 \in S)([ИНДЕКСЫ](X_1) =$$

$$= [ИНДЕКСЫ](Y_1) \wedge Reg(X_1) \wedge Reg(Y_1) \wedge (\forall x \in A)(x \in_S X \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x \in_S X_1) \wedge (\forall y \in A)(y \in_S Y \leftrightarrow y \in_S Y_1)).$$

Таким образом, элементы из ω интерпретируются мощностями массивов, удовлетворяющих $Un(X)$. Сложение зададим следующей формулой:

$$+(X,Y,Z) \rightleftharpoons Reg(X) \wedge Reg(Y) \wedge Reg(Z) \wedge (\exists U \in S)(\exists V \in S) \times$$

$$\times (Reg(U) \wedge Reg(V) \wedge card(X,U) \wedge card(Y,V) \wedge \neg(\exists x \in A) \times$$

$$\times (x \in_S U \wedge x \in_S V) \wedge (\forall x \in A)(x \in_S Z \leftrightarrow x \in_S U \vee x \in_S V)).$$

Для определения умножения используем то, что матрица из m строк и n столбцов содержит $m\,n$ элементов:

$$\cdot(X,Y,Z) = Reg(X) \wedge Reg(Y) \wedge Reg(Z) \wedge (\exists L \in M) \times$$
$$\times (REG(L) \wedge (\forall x \in A)(x \in_S Z \leftrightarrow x \in_M L) \wedge [ИНДЕКСЫ](X) =$$

$$= [ИНДЕКСЫ]_1(L) \wedge [ИНДЕКСЫ](Y) = [ИНДЕКСЫ]_2(L)).$$

Теорема доказана.

Литература

1. ГОНЧАРОВ С.С. Матрицы как абстрактный тип данных.-В кн.: Математическое обеспечение ВС из микро-ЭВМ (Вычислительные системы, вып. 96). Новосибирск, 1983, с.75-86.

Поступила в ред.-изд.отд.
14 мая 1986 года