П Р И К Л А Д Н А Я   Л О Г И К А
(Вычислительные системы)
1986 год   Выпуск 116

УДК 517.11

ОБ АКСИОМАХ ДЛЯ КЛАССОВ С СИЛЬНЫМИ ГОМОМОРФИЗМАМИ

С.С. Гончаров

Работа относится к направлению теории моделей, связанному с характеризацией аксиом классов моделей с различными свойствами. Наиболее полное отражение это классическое направление теории моделей нашло в книге Г.Кейслера и Ч.Чэна [4]. Данная тематика привлекала внимание самых различных авторов [1,5-8,10,11,16,18,20]. Отмечу несколько наиболее важных результатов, тесно связанных с решаемой здесь проблемой. Прежде всего это теорема Лося-Мальцева [11,14], утверждающая, что любой аксиоматизируемый гомоморфно замкнутый класс аксиоматизируем позитивными формулами.

Р.Линдон [7] усилил этот результат, доказав теорему: каждый аксиоматизируемый и гомоморфно замкнутый подкласс аксиоматизируемого класса моделей аксиоматизируем внутри этого класса с помощью позитивных аксиом.

Г.Кейслер [5] ввел понятие строгого гомоморфизма и дал характеризацию аксиоматизируемых классов моделей, замкнутых относительно строгих гомоморфизмов. Классы, в которых каждый гомоморфизм строгий, легко характеризуется аксиоматически. Действительно, для этого необходимо и достаточно, чтобы в этом классе для отрицания любого предиката существовала эквивалентная ему позитивная $\exists$-формула.

А.И.Мальцев [13] ввел промежуточное понятие сильного гомоморфизма, которое является удобным при изучении связей в моделях. В случае алгебр оно совпадает с обычным понятием гомоморфизма.

При изучении вычислительных моделей с предикатными вычислениями мы должны рассматривать не обычные, а многозначные функции, а в связи с этим при исследовании вопросов представления одних алгоритмов через другие мы должны пользоваться уже не обычными гомоморфизмами, а сильными. В связи с этим представляется важным изучение классов с сильными гомоморфизмами. В последние годы большой цикл работ был выполнен в этом направлении [1,2,4,19-21].

А.И.Мальцев в [13] сформулировал следующий вопрос: нельзя ли указать строение тех аксиом, которые описывают классы моделей, внутри которых каждый гомоморфизм сильный?

В настоящей работе получена характеризация систем аксиом для аксиоматизируемых классов, в которых каждый гомоморфизм сильный. В случае неаксиоматизируемых классов показано, что аксиоматически это свойство не характеризуется. Таким образом, дано полное решение проблемы А.И.Мальцева.

В [1] и [21] также было предпринято изучение сильных гомоморфизмов и аксиоматизируемых классов с сильными гомоморфизмами, а также заявлено решение вопроса из [13]. Однако в действительности в этих работах решается другой вопрос. Авторы [1] и [21] изучают классы, в которых по определению рассматриваются лишь сильные гомоморфизмы и изучена в этом случае характеризация классов аксиом для замкнутости этих классов относительно различных конструкций с использованием лишь сильных гомоморфизмов. А именно в [21] доказаны

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Класс алгебраических систем замкнут относительно строгих гомоморфных образов (факторов), строгих подсистем и ультрапроизведений тогда и только тогда, когда он аксиоматизируем формулами вида

$$P_{i_1}(x_{11},\dots,x_{1m})\wedge\dots\wedge P_{i_n}(x_{n1},\dots,x_{nr})\to[\pi_1\vee\dots\vee\pi_k],$$

где символы переменных в левой части $\to$ все различны, а $\pi_1,\dots$ $\dots,\pi_k$ – произвольные атомные формулы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.

(i) Класс алгебраических систем замкнут относительно строгих гомоморфных образов, слабых подсистем и ультрапроизведений тогда и только тогда, когда он может быть аксиоматизируем формулами вида

$$[P_{i_1}(x_{11},\dots)\wedge\dots\wedge P_{i_n}(x_{n1},\dots)\to[e_1\vee\dots\vee e_n],$$

где $e_1,\dots,e_n$ – равенства (и все символы переменных x_i в левой части $\to$ различны).

(ii) Класс алгебраических систем замкнут относительно строгих гомоморфных образов, слабых подсистем и фильтрованных произведений тогда и только тогда, когда он аксиоматизируем формулами вида

$$[P_{i_1}(x_{11},\ldots)\wedge\ldots\wedge P_{i_n}(x_{n1},\ldots)]\to e,$$

где e – равенство (и все x_{ij}-е различны).

Аналогичные утверждения получены и в [I], которые рассматриваются в качестве решения проблемы А.И.Мальцева.

Перейдем теперь к изложению основного результата этой работы. Будем следовать в основных определениях, понятиях и результатах теории моделей книге Ч.Чэна и Г.Кейслера [4] и обзору А.И.Мальцева [I3].

Будем использовать следующее сокращение: если $x_1,\ldots,x_n$ – набор переменных или элементов, то вместо него часто будем писать для краткости просто $\bar{x}$. Выражения $\forall\bar{x}\,\varphi(\bar{x})$ и $\exists\bar{x}\,\varphi(\bar{x})$, где φ – некоторое выражение, будут сокращениями соответственно для выражений $\forall x_1\ldots\forall x_n\ \varphi(x_1,\ldots,x_n)$ и $\exists x_1\ldots\exists x_n\ \varphi(x_1,\ldots,x_n)$. Если $\bar{x}$ и $\bar{y}$ – два набора, то выражения $\bar{x}=\bar{y}$ и $\bar{x}\neq\bar{y}$ являются сокращениями соответственно формул $\mathop{\&}\limits_{i=1}^{n} x_i=y_i$ и $\bigvee\limits_{i=1}^{n} x_i\neq y_i$.

Назовем формулу φ позитивной $\exists$-формулой, если она принадлежит наименьшему подклассу формул, содержащему атомарные формулы, и замкнутому относительно дизъюнкций, конъюнкций и навешивания кванторов существования. Нетрудно заметить, что любая позитивная $\exists$-формула эквивалентна формуле вида $(\exists y_1\ldots\exists y_n)\Psi(\bar{x},y_1,\ldots,y_n)$, где Ψ – уже бескванторная позитивная формула [4]. Е.Марчевский [I6] заметил, что позитивные формулы сохраняют истинность на гомоморфных образах, а А.Робинсон [I7] заметил, что аксиоматизируемый класс замкнут относительно расширений тогда и только тогда, когда он аксиоматизируем $\exists$-формулами. Отсюда мы можем заключить, что позитивные $\exists$-формулы сохраняют истинность при гомоморфизмах, т.е. для любой позитивной $\exists$-формулы $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$, гомоморфизма γ из $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{N}$ и набора элементов $a_1,\ldots,a_n$ из $|\mathfrak{M}|$, если $\mathfrak{M}\models\varphi(a_1,\ldots,a_n)$, то $\mathfrak{N}\models\varphi(\gamma(a_1),\ldots,\gamma(a_n))$.

Введем теперь новый класс S-формул, с помощью которого получим ответ на вопрос А.И.Мальцева.

Для любого n-местного предикатного символа P назовем S-аксиомой для предиката P формулу следующего вида:

I) $\forall\bar{x}\ P(\bar{x})$,

2) $(\forall \bar{x})(\neg P(\bar{x}) \leftrightarrow \varphi(\bar{x}))$,

3) $(\forall \bar{x})(\neg P(\bar{x}) \to (\exists \bar{y}^1 \ldots \exists \bar{y}^p \Psi(\bar{x}, \bar{y}^1, \ldots, \bar{y}^p) \mathbin{\&} \mathop{\&}_{j=1}^{p} P(\bar{y}^j))) \mathbin{\&}$

$\mathbin{\&} (\forall \bar{x} \forall \bar{y}^1 \ldots \forall \bar{y}^p)((P(\bar{x}) \mathbin{\&} \Psi(\bar{x}, \bar{y}^1, \ldots, \bar{y}^p)) \to \bigvee_{j=1}^{p} (\bar{x} = \bar{y}^j))$,

4) $(\forall \bar{x})(\neg P(\bar{x}) \to (\varphi(\bar{x}) \vee (\exists \bar{y}^1 \ldots \bar{y}^p)(\Psi(\bar{x}, \bar{y}^1, \ldots, \bar{y}^p) \mathbin{\&}$

$\mathbin{\&} \mathop{\&}_{j=1}^{p} P(\bar{y}^j)))) \mathbin{\&} (\forall \bar{x} \forall \bar{y}^1 \ldots \bar{y}^p)(P(\bar{x}) \mathbin{\&}$

$\mathbin{\&} \Psi(\bar{x}, \bar{y}^1, \ldots, \bar{y}^p) \to \bigvee_{j=1}^{p} (\bar{x} = \bar{y}^j))$,

где φ, Ψ позитивные $\exists$-формулы.

ТЕОРЕМА. В аксиоматизируемом классе К все гомоморфизмы сильные тогда и только тогда, когда для любого предикатного символа в К выполнена S-аксиома.

СЛЕДСТВИЕ. Если в аксиоматизируемом классе К все гомоморфизмы сильные, тогда для любой сигнатуры Σ_0 сигнатуры Σ класса К существует расширение $\Sigma_0 \subseteq \Sigma_1 \subseteq \Sigma$ такое, что в обеднении класса К до сигнатуры Σ_1 вновь все гомоморфизмы сильные и card $|\Sigma_1| \leq$ $\leq \max \{\text{card } |\Sigma|, \omega\}$.

Заметим также, что условие аксиоматизируемости в теореме существенно.

Рассмотрим сигнатуру Σ с бесконечным множеством одноместных предикатов $P_1, \ldots, P_n$ и следующую систему аксиом:

1) $(\forall x) \neg P_i(x) \vee \neg P_j(x)$, если $i \neq j$,

2) $(\exists x_1 \ldots x_n)(\mathop{\&}_{i<j} x_i \neq x_j \mathbin{\&} \mathop{\&}_{i=1}^{n} P_e(x_i))$,

где $e, n \in N$. Легко понять, используя характеризацию теорий с одноместными предикатами [3], что данная теория полная. Рассмотрим в ней две счетных модели $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$ таких, что в $\mathfrak{N}$ тип $p(x) \leftrightharpoons$

$\rightleftharpoons \{\neg P_n(x) \mid n \in N\}$ реализуется, а в $\mathfrak{M}$ нет. Определим $K_1 \rightleftharpoons \{\mathfrak{M}\}$ и $K_2 = \{\mathfrak{N}\}$. Из полноты мы получаем, что $Th(K_1) = Th(K_2)$, но в классе K_1 все гомоморфизмы очевидно сильные, а в K_2 – нет.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы. Докажем вначале необходимость. Пусть $T = Th(K)$. Предположим противное, что для некоторого сигнатурного предикатного символа P не выполнена ни одна S-аксиома.

Определим множество формул $\Delta_0(x_1,\ldots,x_n)$, положив:

$$\Delta_0(x_1,\ldots,x_n) \rightleftharpoons \{\neg\varphi(x_1,\ldots,x_n) \mid T \vdash \varphi(x_1,\ldots,x_n) \to$$
$$\to \neg P(x_1,\ldots,x_n) \text{ и } \varphi \text{ – позитивная } \exists\text{-формула}\}.$$

ЛЕММА I. Множество формул $T \cup \Delta_0(x_1,\ldots,x_n) \cup \cup \{P(x_1,\ldots,x_n)\}$ непротиворечиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что указанное множество противоречиво. В этом случае по теореме компактности найдутся формулы $\neg\varphi_1,\ldots,\neg\varphi_m$ из Δ_0 такие, что $T \cup \{\neg P(x_1,\ldots,x_n)\}$ противоречиво или $T \cup \{\neg P(x_1,\ldots,x_n)\} \cup \{\neg\varphi_1,\ldots,\neg\varphi_m\}$ противоречиво.

Если $T \cup \{\neg P(x_1,\ldots,x_n)\}$ противоречиво, то в K выполнена аксиома $\forall x_1\ldots x_n\, P(x_1,\ldots,x_n)$, что противоречит предположению. Рассмотрим второй случай. Если $T \cup \{\neg P(x_1,\ldots,x_n)\} \cup \{\neg\varphi_1,\ldots,\neg\varphi_m\}$ – противоречивое множество, то и

$$T \cup \{\neg P(x_1,\ldots,x_n)\} \cup \{\mathop{\&}_{i=1}^{m} \neg\varphi_i\}$$

противоречиво, но формула $\mathop{\&}_{i=1}^{m} \neg\varphi_i$ эквивалентна формуле $\neg(\bigvee_{i=1}^{m} \varphi_i)$, а поэтому $T \cup \{\neg P(x_1,\ldots,x_n)\} \cup \{\neg(\bigvee_{i=1}^{m} \varphi_i)\}$ противоречиво и, следовательно,

$$T \vdash \neg P(x_1,\ldots,x_n) \to (\bigvee_{i=1}^{m} \varphi_i)(x_1,\ldots,x_n),$$

но $T \vdash \varphi_i(x_1,\ldots,x_n) \to \neg P(x_1,\ldots,x_n)$ для всех $1 \le i \le m$, а поэтому

$$T \vdash \bigvee_{i=1}^{m} \varphi_i(x_1,\ldots,x_n) \to \neg P(x_1,\ldots,x_n)$$

и, следовательно,

$$T \vdash \bigvee_{i=1}^{m} \varphi_i(x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow \neg P(x_1,\ldots,x_n),$$

т.е. для P выполнена S-аксиома, что также противоречит нашему предположению и доказывает лемму.

Расширим теперь наше множество Δ_0 до Δ_1, положив:

$$\Delta_1 = \Delta_0 \cup \{\neg(\exists y_1^1 \ldots y_n^1 \ldots y_1^k \ldots y_n^k) \times$$

$$\times(\Psi(x_1, \ldots, x_n, y_1^1, \ldots, y_n^1, \ldots, y_1^k, \ldots, y_n^k) \& \underset{i=1}{\overset{k}{\&}} P(y_1^i, \ldots, y_n^i),$$

где Ψ — позитивная $\exists$-формула и

$$T \vdash (\forall x_1 \ldots x_n y_1^1 \ldots y_n^1 \ldots y_1^k \ldots y_n^k)((P(x_1, \ldots, x_n) \&$$

$$\& \Psi(x_1, \ldots, x_n, y_1^1, \ldots, y_n^1, \ldots, y_1^k, \ldots, y_n^k) \& \underset{i=1}{\overset{k}{\&}} P(y_1^i, \ldots, y_n^i)) \to$$

$$\to \bigvee_{i=1}^{k} (\underset{j=1}{\overset{n}{\&}} (y_j^i = x_j)))\}.$$

ЛЕММА 2. Множество формул $T \cup \Delta_1$ непротиворечиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположив противное и применив теорему компактности А.И.Мальцева, мы получаем, что найдутся такие формулы $\neg\hat{\Psi}_1 \ldots \neg\hat{\Psi}_l$ из $\Delta_1 \setminus \Delta_0$ и $\neg\varphi_1 \ldots \neg\varphi_k$ из Δ_0, что множества

$$T \cup \{\neg P(x_1, \ldots, x_n)\} \cup \{\neg\hat{\Psi}_1, \ldots, \neg\hat{\Psi}_l\}$$

либо

$$T \cup \{\neg P(x_1, \ldots, x_n)\} \cup \{\neg\hat{\Psi}_1, \ldots, \neg\hat{\Psi}_l\} \cup \{\neg\varphi_1, \ldots, \neg\varphi_k\}$$

противоречивы. Аналогично лемме I мы заключаем отсюда, что

$$T \vdash \neg P(x_1, \ldots, x_n) \to (\bigvee_{i=1}^{l} \hat{\Psi}_i)$$

либо

$$T \vdash \neg P(x_1, \ldots, x_n) \to (\bigvee_{i=1}^{l} \hat{\Psi}_i) \vee (\bigvee \varphi_i),$$

причем $\hat{\Psi}_i$ имеет вид

$$(\exists y_1^1 \ldots y_n^1 \ldots y_1^{k_i} \ldots y_n^{k_i}) \times$$

$$\times(\Psi_i(x_1, \ldots, x_n, y_1^1, \ldots, y_n^1, \ldots, y_1^{k_i}, \ldots, y_n^{k_i}) \& \underset{j=1}{\overset{k_i}{\&}} P(y_1^j, \ldots, y_n^j))$$

и в T выводимы формулы

$$(\forall x_1\ldots x_n y_1^1\ldots y_n^1\ldots y_1^{k_i}\ldots y_n^{k_i})((P(x_1,\ldots,x_n)\ \&\ \mathop{\&}_{j=1}^{k_i} P(y_1^j,\ldots,y_n^j)\ \&$$

$$\&\,\psi_i(x_1,\ldots,x_n,y_1^1,\ldots,y_n^1,\ldots,y_1^{k_i},\ldots,y_n^{k_i}))\rightarrow \bigvee_{j=1}^{k_i}\ (\mathop{\&}_{p=1}^{n}(x_p=y_p^j)))$$

для $1\le i\le l$ и $(\forall x_1\ldots x_n)(\varphi_i(x_1,\ldots,x_n)\rightarrow \neg P(x_1,\ldots,x_n))$ для $1\le i\le k$.

Рассмотрим теперь формулы

$$\Psi(x_1,\ldots,x_n;y_{11}^1,\ldots,y_{n1}^1,\ldots,y_{11}^{k_1},\ldots,y_{n1}^{k_1};\ldots,y_{1l}^1,\ldots,y_{nl}^{k_l})\leftrightharpoons$$

$$\leftrightharpoons \Psi_1(x_1,\ldots,x_n,y_{11}^1,\ldots,y_{n1}^1,\ldots,y_{11}^{k_1},\ldots,y_{n1}^{k_1})\vee\ldots$$

$$\ldots\vee\Psi_l(x_1,\ldots,x_n,y_{1l}^1,\ldots,y_{nl}^1,\ldots,y_{1l}^{k_l},\ldots,y_{nl}^{k_l}),$$

$$\varphi(x_1,\ldots,x_n)\leftrightharpoons \bigvee_{i=1}^{k}\varphi_i .$$

В таком случае выполнено

$$T\vdash \varphi(x_1,\ldots,x_n)\rightarrow \neg P(x_1,\ldots,x_n),$$

$$T\vdash (\forall x_1,\ldots,x_n;y_{11}^1,\ldots,y_{1l}^{k_l},\ldots,y_{nl}^{k_l})\times$$

$$\times(\Psi(x_1,\ldots,x_n;y_{11}^1,\ldots,y_{n1}^1,\ldots,y_{11}^{k_1},\ldots,y_{n1}^{k_1},\ldots,y_{1l}^1,\ldots,y_{nl}^{k_l})\ \&$$

$$\&\ \mathop{\&}_{s=1}^{l}\ \mathop{\&}_{j=1}^{k_s} P(y_{1s}^j,\ldots,y_{ns}^j))\rightarrow \bigvee_{s=1}^{l}\ \bigvee_{j=1}^{k_s}\ (\mathop{\&}_{i=1}^{n} y_{is}^j=x_i)$$

и

$$T\vdash \neg P(x_1,\ldots,x_n)\rightarrow\varphi(x_1,\ldots,x_n)\vee$$

$$\vee(\exists y_{11}^1\ldots y_{n1}^1\ldots y_{1l}^1\ldots y_{nl}^1\ldots y_{1l}^{k_l}\ldots y_{nl}^{k_l})(\Psi(y_{11}^1,\ldots,y_{n1}^1,\ldots,y_{1l}^1,\ldots$$

$$\ldots,y_{nl}^1,\ldots,y_{1l}^{k_l},\ldots,y_{nl}^{k_l})\ \&\ \mathop{\&}_{s=1}^{l}\ \mathop{\&}_{j=1}^{k_s} P(y_{1s}^j,\ldots,y_{ns}^j)).$$

Но в этом случае для P вновь выполнена одна из S-аксиом, что противоречит предположению и доказывает нашу лемму.

Определим по любому множеству формул Ψ множество $(\Psi)_{Pos}\leftrightharpoons$ $\leftrightharpoons\{\lambda(x_1,\ldots,x_n)\mid T\cup\Psi\vdash\lambda(x_1,\ldots,x_n)$ и λ – позитивная $\exists$-формула$\}$.

ЛЕММА 3. Множество формул

$$(\Delta_1)_{Pos} \cup \{P(x_1,\ldots,x_n)\} \cup T$$

непротиворечиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположив противное и применив теорему компактности А.И.Мальцева, мы получаем, что $T \cup \{P(x_1,\ldots,x_n)\}$ противоречиво либо найдутся $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ – формулы из $(\Delta_1)_{Pos}$ такие, что множество $T \cup \{P(x_1,\ldots,x_n)\} \cup \{\lambda_1,\ldots,\lambda_m\}$ – противоречиво. Но в первом случае для P выполнена S-аксиома $\forall x_1\ldots x_n \neg P(x_1,\ldots,x_n)$ или, что то же самое, $(\forall \bar{x})(\neg P(\bar{x}) \leftrightarrow x_1 = x_1)$, а во втором случае мы получаем из противоречивости $T \vdash \& \lambda_i \to P(x_1,\ldots,x_n)$. Так как λ_i $(1 \le i \le m)$ – формулы из $(\Delta_1)_{Pos}$, то λ_i – позитивные $\exists$-формулы и, следовательно, $\underset{i=1}{\overset{m}{\&}} \lambda_i$ – позитивная $\exists$-формула и, по определению классов Δ_0 и Δ_1, формула $\neg(\underset{i=1}{\overset{m}{\&}} \lambda_i)$ принадлежит Δ_1. Но, по определению $(\Delta_1)_{Pos}$, мы имеем $\Delta_1 \cup T \vdash \lambda$ для $1 \le i \le m$, следовательно, $\Delta_1 \cup T \vdash \underset{i=1}{\overset{m}{\&}} \lambda_i$, что противоречит лемме 2 и доказывает лемму 3.

Построим теперь полный тип, совместный с теорией T от переменных $x_1,\ldots,x_n$.

Пусть $\Psi_\xi(x_1,\ldots,x_n)$, $\xi < \varkappa$, – перечисление всех формул сигнатуры класса K со свободными переменными из $\{x_1,\ldots,x_n\}$.

Шаг 0. Полагаем $\Gamma_0 \leftrightharpoons \Delta_1 \cup \{\varphi_0(x_1,\ldots,x_n)\}$, если множества $\Delta_1 \cup \{\Psi_0(x_1,\ldots,x_n)\} \cup T$ и $T \cup (\Delta_1 \cup \{\Psi_0\})_{Pos} \cup \{P(x_1,\ldots,x_n)\}$ непротиворечивы, и $\Gamma_0 \leftrightharpoons \Delta_1 \cup \{\neg\Psi_0(x_1,\ldots,x_n)\}$ – в противном случае.

Легко видеть, что Γ_0 будет непротиворечиво. Предположим, что это не так, тогда это возможно лишь в случае, если $T \cup \{\Psi_0(x_1,\ldots,x_n)\}$ непротиворечиво, но $T \cup \{\Delta_1 \cup \{\Psi_0\}\}_{Pos} \cup \{P(x_1,\ldots,x_n)\}$ противоречиво. Но в таком случае $T \cup \{\Delta_1\} \vdash \Psi_0(x_1,\ldots,x_n)$ и существуют позитивные $\exists$-формулы $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$, выводимые из $T \cup \Delta_1 \cup \{\Psi_0\}$ и такие, что $T \vdash \underset{i=1}{\overset{n}{\&}} \varphi_i \to \neg P$ и $\Delta_1 \cup \{\Psi_0\} \cup T \vdash \underset{i=1}{\overset{n}{\&}} \varphi_i$. Но в таком случае, так как $T \cup \Delta_1 \vdash \Psi_0$, то $\Delta_1 \cup T \vdash \underset{i=1}{\overset{n}{\&}} \varphi_i$, но по определению Δ_1 формула $\neg(\underset{i=1}{\overset{n}{\&}} \varphi_i)$ должна принадлежать Δ_1, и, следовательно, $\Delta_1 \cup T$ противоречиво, что противоречит лемме 2.

Заметим также, что $(\Gamma_0)_{Pos} \cup \{P(x_1,\ldots,x_n)\}$ непротиворечиво. В первом случае это выполнено по определению. Рассмотрим второй случай. Тогда $T \cup (\Delta_1 \cup \{\Psi_0\})_{Pos} \cup \{P(x_1,\ldots,x_n)\}$ или $T \cup \Delta_1 \cup \cup \{\Psi_0\}$ противоречивы и $\Gamma_0 = \Delta_1 \cup \{\neg\Psi_0\}$. Предположим, что $T \cup (\Gamma_0)_{Pos} \cup \{P(x_1,\ldots,x_n)\}$ противоречиво. При этом можем заключить, что $T \cup \Delta_1 \vdash \neg\Psi_0$ или $T \vdash \mathop{\&}\limits_{i=1}^{m} \varphi_i \to \neg P(x_1,\ldots,x_n)$, где φ_i $(1 \le i \le m)$ – позитивные $\exists$-формулы из $(\Delta_1 \cup \{\Psi_0\})_{Pos}$, и $T \vdash \mathop{\&}\limits_{i=1}^{d} \xi_i \to \neg P(x_1,\ldots,x_n)$, где ξ_i – позитивные $\exists$-формулы из $(\Gamma_0)_{Pos}$. Отсюда мы можем заключить, что $\neg(\mathop{\&}\limits_{i=1}^{d} \xi_i)$ принадлежит Δ_1 и $T \cup \Delta_1 \vdash \mathop{\&}\limits_{i=1}^{d} \xi_i$, либо выполнены следующие условия: $T \cup \Delta_1 \cup \{\Psi_0\} \vdash \& \varphi_i$, $T \cup \Delta_1 \cup \{\neg\Psi_0\} \vdash \& \xi_i$, но в таком случае $T \cup \Delta_1$ противоречиво, что невозможно, либо

$$T \cup \Delta_1 \vdash (\mathop{\&}\limits_{i=1}^{m} \varphi_i) \vee (\mathop{\&}\limits_{i=1}^{d} \xi_i).$$

Отсюда уже легко заключить, используя предыдущие формулы, что

$$T \cup (\Delta_1)_{Pos} \vdash (\mathop{\&}\limits_{i=1}^{m} \varphi_i) \vee (\mathop{\&}\limits_{i=1}^{d} \xi_i)$$

и

$$T \vdash ((\mathop{\&}\limits_{i=1}^{m} \varphi_i) \vee (\mathop{\&}\limits_{i=1}^{d} \xi_i)) \to \neg P(x_1,\ldots,x_n).$$

Таким образом, и в оставшемся случае мы получаем противоречие, так как по лемме 3 множество $T \cup (\Delta_1)_{Pos} \cup \{P(x_1,\ldots,x_n)\}$ совместно.

Шаг $\xi < \varkappa$. По индукционному предположению и в силу теоремы компактности А.И.Мальцева мы имеем, что множества $T \cup (\bigcup\limits_{\eta<\xi} \Gamma_\eta)$ и $T \cup (\bigcup\limits_{\eta\le\xi} \Gamma_\xi)_{Pos} \cup \{P(x_1,\ldots,x_n)\}$ непротиворечивы и для любого $\eta < \xi$ в $\bigcup\limits_{\eta<\xi} \Gamma_\eta$ лежит одна из формул Ψ_η либо $\neg\Psi_\eta$.

Определим $\Gamma_\xi = (\bigcup\limits_{\eta<\xi} \Gamma_\eta) \cup \{\Psi_\xi(x_1,\ldots,x_n)\}$, если множества формул $T \cup \bigcup\limits_{\eta<\xi} \Gamma_\eta \cup \{\Psi_\xi(x_1,\ldots,x_n)\}$ и $T \cup ((\bigcup\limits_{\eta<\xi} \Gamma_\eta) \cup \Psi_\xi(x_1,\ldots,x_n))_{Pos} \cup$

$\cup \{P(x_1,\ldots,x_n)\}$ совместны и $\Gamma_\xi \rightleftharpoons (\bigcup\limits_{\eta<\xi} \Gamma_\xi) \cup \{\Psi_\xi(x_1,\ldots,x_n)\}$ в противном случае.

Легко, как и в случае шага 0, проверить, что множества $T \cup \Gamma_\xi$ и $T \cup (\Gamma_\xi)_{Pos} \cup \{P(x_1,\ldots,x_n)\}$ совместны.

Определим теперь множество формул $\Gamma(x_1,\ldots,x_n) \rightleftharpoons \bigcup\limits_{\xi<\varkappa} \Gamma_\xi$. В силу построения $\Gamma(x_1,\ldots,x_n)$ – полный тип, совместный с теорией T.

Рассмотрим теперь модель $\mathfrak{M}$ теории T, в которой этот тип реализуется. Добавим в сигнатуру Σ класса K имена c_a для всех элементов $a \in M$. Пусть $a_1,\ldots,a_n$ – набор элементов, на которых реализуется тип $\Gamma(x_1,\ldots,x_n)$. Определим множество формул $D_{Pos}(\mathfrak{M})$ расширенной сигнатуры $\Sigma \rightleftharpoons \Sigma \cup \{c_a \mid a \in M\}$, положив $D_{Pos}(\mathfrak{M}) \rightleftharpoons \{\varphi \mid \varphi$ – позитивная $\exists$-формула расширенной сигнатуры Σ_0, истинная в естественном обогащении $\mathfrak{M}^*$ модели $\mathfrak{M}$ до сигнатуры $\Sigma_0\}$. В дальнейшем нами часто будет использоваться без ссылок следующее простое логическое утверждение о замене констант переменными.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Если $T \vdash \Phi(c)$ и константа c не входит в формулы из T и x – новая переменная, то

$$T \vdash (\forall x)[\Phi(c)]^c_x.$$

Доказательство получается подстановкой в доказательство формулы $\Phi(c)$ всюду вместо константы c новой переменной x, а затем применением $\forall$-правила.

ЛЕММА 4. Множество формул $T \cup \{P(c_{a_1},\ldots,c_{a_n})\} \cup D_{Pos}(\mathfrak{M})$ непротиворечиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, тогда по теореме компактности А.И.Мальцева существуют позитивные $\exists$-формулы $\varphi_1,\ldots,\varphi_m$ из $D_{Pos}(\mathfrak{M})$ такие, что множество $T \cup \{P(c_{a_1},\ldots,c_{a_n})\} \cup \{\varphi_1,\ldots,\varphi_m\}$ противоречиво. Так как множество позитивных $\exists$-формул замкнуто относительно конъюнкций, то можно считать, что мы имеем лишь одну формулу φ_1.

Но в таком случае

$$T \vdash \varphi_1(c_{a_1},\ldots,c_{a_n},c_{b_1},\ldots,c_{b_k}) \to \neg P(c_{a_1},\ldots,c_{a_n}) \text{ и}$$

так как в формулы из T не входят константы $c_{b_1},\ldots,c_{b_k}$, добавленные к Σ и не лежащие среди $c_{a_1},\ldots,c_{a_n}$, то

$$T \vdash (\forall y_1\ldots y_k)(\varphi_1(c_{a_1},\ldots,c_{a_n},y_1,\ldots,y_k) \to \neg P(c_{a_1},\ldots,c_{a_n}))$$

и

$$T \vdash (\exists y_1 \dots y_k)\varphi_1(c_{a_1},\dots,c_{a_n},y_1,\dots,y_k) \to P(c_{a_1},\dots,c_{a_n}).$$

Аналогичные рассуждения показывают, что

$$T \vdash (\forall x_1 \dots x_n)((\exists y_1 \dots y_k)\varphi_1(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_k) \to \neg P(x_1,\dots,x_n)),$$

но в таком случае по определению Δ_1 мы имеем

$$\neg(\exists y_1 \dots y_k)\varphi_1(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_k) \in \Delta_1$$

и, следовательно,

$$\neg(\exists y_1 \dots y_k)\varphi_1(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_k) \in \Gamma(x_1,\dots,x_n).$$

Но в модели $\mathfrak{M}$ на элементах $a_1 \dots a_n$ реализуется тип $\Gamma(x_1,\dots,x_n)$, а поэтому $\mathfrak{M} \models \neg(\exists y_1 \dots y_k)\varphi_1(a_1,\dots,a_n,y_1,\dots,y_k)$, но $\varphi_1(c_{a_1},\dots$ $\dots,c_{a_n},c_{b_1},\dots,c_{b_n})$ принадлежит $D_{Pos}(\mathfrak{M})$ и, следовательно, $\mathfrak{M} \models \varphi_1(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_k)$ и $\mathfrak{M} \models (\exists y_1 \dots y_k)\varphi_1(a_1,\dots,a_n,$ $y_1,\dots,y_k)$. Полученное противоречие заканчивает доказательство леммы 4.

Определим теперь новое множество

$$\Delta \leftrightharpoons D_{Pos}(\mathfrak{M}) \cup \mathrm{P}(c_{a_1},\dots,c_{a_n}) \cup T \cup \{ \bigvee_{i=1}^{n} d_i \neq c_{a_i} \mid$$

$$\mathfrak{M} \models P(d_1,\dots,d_n) \text{ и } d_1,\dots,d_n \text{ - константы из } \Sigma_0\}.$$

ЛЕММА 6. **Множество Δ непротиворечиво.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем эту лемму от противного. В этом случае по теореме компактности А.И.Мальцева существуют формулы $\Psi_1,\dots$ $\dots,\Psi_k$ из $D_{Pos}(\mathfrak{M})$ и $\bigvee_{i=1}^{n} d_i^j \neq c_{a_i}$ для $1 \le j \le p$ такие, что

$$T \cup \{\Psi_1,\dots,\Psi_k\} \cup \{P(c_{a_1},\dots,c_{a_n})\} \cup$$

$$\cup \{\bigvee_{i=1}^{n} d_i^j \neq c_{a_i} \mid 1 \le j \le p, \quad \mathfrak{M} \models P(d_1^j,\dots,d_n^j)\} -$$

противоречивое множество.

Так как $D_{Pos}(\mathfrak{M})$ замкнуто относительно конъюнкций, то можно считать, что $k=1$. Таким образом, противоречиво множество

$$T \cup \{\Psi(c_{a_1},\dots,c_{a_n},c_{b_1},\dots,c_{b_s})\} \cup \{P(c_{a_1},\dots,c_{a_n})\} \cup$$

$$\cup \{ \bigvee_{i=1}^{n} d_i^j \neq c_{a_i} \mid 1 \leq j \leq p,\ \mathfrak{M} \models P(d_1^j, \ldots, d_n^j) \}.$$

В таком случае из

$$T \cup \{\Psi (c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}, c_{b_1}, \ldots, c_{b_s})\} \cup \{P(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})\}$$

выводима формула $\neg \mathop{\&}\limits_{j=1}^{p} (\bigvee_{i=1}^{n} d_i^j \neq c_{a_i})$, которая эквивалентна формуле $\bigvee_{j=1}^{p} (\mathop{\&}\limits_{i=1}^{n} d_i^j = c_{a_i})$.

Таким образом,

$$T \vdash (\Psi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}, c_{b_1}, \ldots, c_{b_s}) \,\&\, P(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})) \to \bigvee_{j=1}^{p} \mathop{\&}\limits_{i=1}^{n} d_i^j = c_{a_i}.$$

Заменим все константы формулы Ψ, не лежащие в множестве $\{c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}\} \cup \{d_i^j \mid 1 \leq i \leq n$ и $1 \leq j \leq p\}$, через переменные и навесим квантор существования по этим переменным. Аналогично лемме 5 можно заметить, что

$$T \vdash ((\exists y_1 \ldots y_l)\Psi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}, d_1^1, \ldots, d_n^1, \ldots, d_1^p, \ldots, d_n^p,$$

$$y_1, \ldots, y_l) \,\&\, P(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})) \to \bigvee_{j=1}^{p} \mathop{\&}\limits_{i=1}^{n} (c_{a_i} = d_i^j) \ldots$$

Еще раз воспользовавшись тем же свойством, заменяя константы, не входящие в формулы из T, на переменные, мы получаем

$$T \vdash (\forall x_1 \ldots x_n\ \forall z_1^1 \ldots z_n^1 \ldots z_1^p \ldots z_n^p) \times$$

$$\times (\exists y_1 \ldots y_l\ \Psi(x_1, \ldots, x_n, z_1^1, \ldots, z_n^1, \ldots, z_1^p, \ldots, z_n^p, y_1, \ldots, y_l)) \,\&$$

$$\& P(x_1, \ldots, x_n) \to \bigvee_{j=1}^{p} (\mathop{\&}\limits_{i=1}^{n} x_i = y_i^j).$$

Но в этом случае по определению множества Δ_1 формула

$$\neg(\exists z_1^1 \ldots z_n^1 \ldots z_1^p \ldots z_n^p)(\exists y_1 \ldots y_l)\ \Psi(x_1, \ldots, x_n, z_1^1, \ldots, z_n^1, \ldots$$

$$\ldots, z_1^p, \ldots, z_n^p, y_1, \ldots, y_l) \,\&\, \mathop{\&}\limits_{j=1}^{p} P(z_1^j, \ldots, z_n^j)$$

принадлежит множеству Δ_1, а следовательно, и типу $\Gamma(x_1, \ldots, x_n)$.
Но в этом случае

$$\mathfrak{M} \models \neg (\exists z_1^1 \ldots z_n^1 \ldots z_1^p \ldots z_n^p, y_1 \ldots y_l)(\Psi(a_1, \ldots, a_n,$$

$$z_1^1, \ldots, z_n^1, \ldots, z_1^p, \ldots, z_n^p, y_1, \ldots, y_l) \; \& \; \mathop{\&}_{j=1}^{p} P(z_1^j, \ldots, z_n^j)).$$

Но формула Ψ из $D_{Pos}(\mathfrak{M})$, наборы $d_1^1, \ldots, d_n^1, \ldots, d_1^p, \ldots, d_n^p, d_1, \ldots$ $\ldots, d_l$ таковы, что $\mathfrak{M} \models P(d_1^j, \ldots, d_n^j)$ для $1 \le j \le p$. А поэтому

$$\mathfrak{M} \models \Psi(a_1, \ldots, a_n, d_1^1, \ldots, d_n^1, \ldots, d_1^p, \ldots, d_n^p,$$

$$d_1, \ldots, d_l) \; \& \; \mathop{\&}_{j=1}^{p} P(d_1^j, \ldots, d_n^j)$$

и

$$\mathfrak{M} \models (\exists z_1^1 \ldots z_n^1 \ldots z_1^p \ldots z_n^p, y_1 \ldots y_l)(\Psi(a_1, \ldots, a_n, z_1^1, \ldots, z_n^1, \ldots$$

$$\ldots, z_1^p, \ldots, z_n^p, y_1, \ldots, y_l) \; \& \; \mathop{\&}_{j=1}^{p} P(z_1^j, \ldots, z_n^j)).$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

Итак, множество формул Δ непротиворечиво, и, следовательно, имеет модель $\mathfrak{N} \models \Delta$.

Рассмотрим обеднение $\mathfrak{N}'$ модели $\mathfrak{N}$ до сигнатуры Σ и определим отображение $\gamma : |\mathfrak{M}| \to |\mathfrak{N}|$, положив $\gamma(a) = \zeta^{n}_{\mathfrak{N}}(c_a)$ – значение константы c_a в модели $\mathfrak{N}$. Так как для любых $a_1, \ldots, a_m$ и предикатного символа Q сигнатуры Σ, если $\mathfrak{M} \models Q(a_1, \ldots, a_m)$, то $Q(c_{a_1}, \ldots$ $\ldots, c_{a_m}) \in D_{Pos}(\mathfrak{M})$, следовательно, $\mathfrak{N} \models Q(\gamma(a_1), \ldots, \gamma(a_n))$. Аналогично показывается, что γ сохраняет операции. Следовательно, γ – гомоморфизм модели $\mathfrak{M}$ теории T в модель $\mathfrak{N}$ той же теории T. Покажем, что γ – несильный гомоморфизм моделей $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ из класса K.

Предположим, что γ – сильный гомоморфизм. В таком случае, так как по построению мы имеем $\mathfrak{N} \models \Delta$, а следовательно, и $\mathfrak{N} \models$ $\models P(a_1', \ldots, a_n')$, где $a_i' = \zeta_{\mathfrak{N}}(c_{a_i})$ для $1 \le i \le n$, то существуют $b_1, \ldots, b_n$ из $\mathfrak{M}$, для которых $\gamma(b_1) = a_1', \ldots, \gamma(b_n) = a_n'$ и $\mathfrak{M} \models$ $\models P(b_1, \ldots, b_n)$. По построению мы имеем, что $\gamma(a_1) = a_1', \ldots, \gamma(a_n) =$ $= a_n'$ и на $a_1, \ldots, a_n$ выполним тип $\Gamma(x_1, \ldots, x_n)$. В таком случае формула $\bigvee_{i=1}^{n} c_{b_i} \ne c_{a_i}$ лежит в Δ, но тогда $\mathfrak{N} \models \Delta$ и $\mathfrak{N} \models \bigvee_{i=1}^{n} \gamma(b_i) \ne$ $\ne \gamma(a_i)$, что противоречит тому, что $\gamma(b_1) = \gamma(a_1), \ldots, \gamma(b_n) = a_n$.

Покажем достаточность. Допустим, что в K существуют несильные гомоморфизмы, т.е. существуют две модели $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$ из K и гомоморфизм $\lambda: \mathfrak{N} \to \mathfrak{M}$ несильный, но в таком случае существуют предикатный символ P и элементы $a_1, \ldots, a_n$ из $\mathfrak{N}$ такие, что $\mathfrak{M} \models$ $\models P(\lambda(a_1), \ldots, \lambda(a_n))$, но для любых $b_1, \ldots, b_n$ из $\mathfrak{N}$ таких, что $\lambda(b_1) = \lambda(a_1), \ldots, \lambda(b_n) = \lambda(a_n)$ в $\mathfrak{N} \models \neg P(b_1, \ldots, b_n)$. Рассмотрим S-аксиому для P, выполненную в классе K.

Очевидно, что S-аксиомы вида I-2 (см. с. I42-I43) не могут выполниться. Покажем, что не может выполниться и аксиома вида 4 (для аксиом вида 3 доказательство аналогично). Итак,

$$K \models (\forall \bar{x})(\neg P(\bar{x}) \to \varphi(\bar{x}) \vee (\exists \bar{y}_1 \ldots \bar{y}_n)(\Psi(\bar{x}, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n) \,\&$$

$$\& \mathop{\&}_{i=1}^{n} P(\bar{y}_i))) \,\&\, (\forall \bar{x})(\varphi(\bar{x}) \to \neg P(\bar{x})) \,\&$$

$$\& (\forall \bar{x}\bar{y}_1 \ldots \bar{y}_n)((\Psi(\bar{x}, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n) \,\&$$

$$\& P(\bar{x}) \,\&\, \mathop{\&}_{i=1}^{n} P(\bar{y}_i)) \to \bigvee_{i=1}^{n} \bar{y}_i = \bar{x}).$$

Отсюда, так как $\mathfrak{N} \models \neg P(a_1, \ldots, a_n)$, то $\mathfrak{N} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ или

$$\mathfrak{N} \models (\exists \bar{y}_1 \ldots \bar{y}_n)(\Psi(\bar{a}, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n) \,\&\, \mathop{\&}_{i=1}^{n} P(\bar{y}_i)).$$

В первом случае, так как φ - $\exists$-позитивная формула, то она сохраняется при гомоморфизмах и расширениях [4], и, следовательно, $\mathfrak{M} \models$ $\models \varphi(\lambda(a_1), \ldots, \lambda(a_n))$, но тогда $\mathfrak{M} \models \neg P(\lambda(a_1), \ldots, \lambda(a_n))$, что противоречит предположению. Во втором случае рассмотрим наборы $\bar{b}_1, \ldots$ $\ldots, \bar{b}_n$ такие, что $\mathfrak{N} \models \Psi(\bar{a}, \bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n) \,\&\, \mathop{\&}_{i=1}^{n} P(\bar{b}_i)$, но тогда из [4] мы также получаем, что $\mathfrak{M} \models \Psi(\lambda(\bar{a}), \lambda(\bar{b}_1), \ldots, \lambda(\bar{b}_n)) \,\&\, \mathop{\&}_{i=1}^{n} P(\lambda(\bar{b}_i))$, а в силу предположения $\mathfrak{M} \models P(\lambda(\bar{a}))$, но тогда на основании S-аксиомы $\mathfrak{M} \models \bigvee_{i=1}^{n} \lambda(\bar{a}) = \lambda(\bar{b}_i)$. По условию $\mathfrak{N} \models \mathop{\&}_{i=1}^{n} P(\bar{b}_i)$, тогда для $\lambda(\bar{a})$ есть прообразы, на которых P истинен, что противоречит нашему предположению.

Л и т е р а т у р а

1. ANDREKA H., NEMETI I. Generalization of the concept of variety and quasivariety to partial algebras through category theory.- Dissertations Mathematical,CCIV,1983.

2. ANDREKA H., NEMETI I. Formulas and ultraproducts in categories.- Beitrage zur Algebra and Geometrie,1979,N 8,S.133-151.

3. Ю.Л.ЕРШОВ. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980.

4. КЕЙСЛЕР Г.,ЧЭН Ч.Ч. Теория моделей. -М.: Мир, 1967.

5. KEISLER H.I. Reduced products and Horn classes. - Trans. Amer.Math.Soc.,1965,v.117,p.307-328.

6. LYNDON R. Existential Horn sentences.- Proc.Amer.Math. Soc.,1959,N 10,p.994-998.

7. LYNDON R. Properties preserved under homomorphisms. - Pacific J.Math.,1959,v.9,N 1,p.143-154.

8. LYNDON R. Properties preserved in subdirect products. - Pacific J.Math.,1959,v.9,N 1,p.155-164.

9. LOS J., SUCZKO R. On the infinite sums of models.-Bull. Acad.Polon.Sci.,1955,v.3,N 4,p.201-202.

10. LOS J.,SUCZKO R. On the extending of models.II.- Fundam. Math.,1955,v.42, N 2,p.470.

11. LOS J. Quelqnes remarqnes, theoremes et problemes sur les classes definissables d'algebres.- In: Mathematical interpreta - tions of formal system. Amsterdam,1955.

12. LOS J. On extending of models. I. - Fundam.Math.,1955, v.42,p.38-54.

13. МАЛЬЦЕВ А.И. Некоторые вопросы теории классов моделей.-В кн.: Труды Всесоюз. матем.съезда, Л., 1963, т.I, с.169-198.

14. МАЛЬЦЕВ А.И. Подпрямые произведения моделей. -Докл. АН СССР, 1956. 109, №2, с.264-266.

15. МАЛЬЦЕВ А.И. О классах моделей с операцией порождения. - Докл. АН СССР, 1957, 116, №5, с.738-741.

16. MARCZESSKI A. Sur les congruences et les proprietes po - sitive d'algebres abstraites.- In: Colloq.Math.,1951,N 2,p. 220-228.

17. ROBINSON A. Obstructions to arithmetical extension and the theorem of Los and Suszko.-Indagationes Math.,1939,v.21,N 5, p.489-495.

18. TARSKI A. Contributions to the theory of models. III. - Proc.Koninkl.nederl.acad.wet.,1955,v.A58,p.58-64.

19. SHELAH S. Uniqueness and characterization of prime models over sets for totally transcendental first-order theories.- J.Symbol.Logic,1972,v.37,p.107-113.

20. GOLVIN F. Horn sentences.-Ann.Math.Log.,1970,N 4,p.389-422.

21. SAIN I. On classes of algebraic system closed with respect to quotients. Universal algebra and applications.- Banach center publications. V.9. PWN-Polish scientific publishers, Warsaw,1982,p.127-131.

Поступила в ред.-изд.отд.
22 мая 1986 года