АНАЛИЗ ДАННЫХ В ЭКСПЕРТНЫХ СИСТЕМАХ
(Вычислительные системы)

1986 год Выпуск 117

УДК 510.6.649

ПОЛНОТА И РАЗРЕШИМОСТЬ ИСЧИСЛЕНИЙ СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ КВАНТОРАМИ

Ж.С. Касымова

Для решения многих прикладных задач, таких как, например, автоматическое усиление гипотез [1,2], поиск эмпирических закономерностей [3], часто используются модификации классического исчисления предикатов. Один из возможных способов модификации – это введение в язык исчисления специальных кванторов [2].

В данной работе рассматриваются исчисления с ассоциативными (а-кванторами) и импликационными кванторами (i-кванторами). В §1 находятся максимальные системы правил вывода, корректных для каждых исчислений с произвольными фиксированными а-квантором и i-квантором соответственно. Исследованиям конкретных исчислений посвящен §2. Для каждого из рассмотренных исчислений доказывается теорема о полноте и разрешимости.

§1. Исчисления с произвольными фиксированными кванторами

Рассмотрим исчисление I^a (I^i), язык которого L^a (L^i) содержит n унарных предикатных символов, логические связки $\&$, $\vee$, $\to$, $\neg$ и один произвольный фиксированный а-квантор $\underset{x}{\sim}$ (i-квантор $\underset{x}{\rightsquigarrow}$).

Формулы языка L^a (L^i) определяются обычным образом, за исключением кванторных формул: если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – формулы языка L^a (L^i), то $\varphi(x) \underset{x}{\sim} \psi(x)$ ($\varphi(x) \underset{x}{\rightsquigarrow} \psi(x)$) есть формула языка L^a (L^i).

В качестве моделей исчисления рассматривается класс $\mathfrak{M}$ всех конечных моделей. Выполнимость формул языка L^a (L^i) на модели M из $\mathfrak{M}$ при интерпретации e свободных переменных определяется так же, как в классическом исчислении. Семантика же специальных кванторов вводится для каждого конкретного квантора с помощью конкретного определения, например:

1) если $\dot{\underset{x}{\sim}}$ есть а-квантор простой ассоциации, через $\|\varphi\|_M[1]$ обозначено значение формулы φ на модели M при интерпретации e свободных переменных, то семантика $\dot{\underset{x}{\sim}}$-квантора определяется так:

$\|\varphi(x) \dot{\underset{x}{\sim}} \psi(x)\|_M[e] = 1 \Leftrightarrow m_{11} \cdot m_{00} > m_{10} \cdot m_{01}$, где m_{ij} = мощность $\{m/m \in |M|,\ \|\varphi(m)\|_M[e] = i,\ \|\psi(m)\|_M[e] = j\}$, где $i,j \in \{0,1\}$;

2) если $\underset{p,a}{\Rightarrow}$ есть i-квантор обоснованной р-импликации, то его семантика вводится определением

$$\|\varphi(x) \underset{p,a}{\Rightarrow} \psi(x)\|_M[e] = 1 \Leftrightarrow m_{11} \geq p(m_{11}+m_{10}),\ m_{11} \geq a,$$

где $a \in N$, N – натуральный ряд, p – рациональное число из интервала $[0,1]$.

Даже терпеливый читатель вправе уже задать вопрос: как же определяется класс а-кванторов и класс i-кванторов?

Прежде чем дать точное определение этих кванторов, введем необходимые понятия из [2].

Пусть $\mathcal{M}' \rightleftharpoons \{\langle |M|, \|\varphi(x)\|_M, \|\psi(x)\|_M \rangle,\ M \in \mathcal{M}$; $\varphi(x), \psi(x)$ – бескванторные формулы (в фиксированном языке L^a или L^i) с одной свободной переменной x, а $\|\varphi(x)\|_M$ и $\psi\|(x)\|_M$, вообще говоря, – унарные функции для вычисления значений формулы $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ соответственно на модели M при каждой подстановке вместо x объекта из $|M|\}$.

Каждой модели $M' = \langle |M|, \|\varphi(x)\|_M, \|\psi(x)\|_M \rangle$ из $\mathcal{M}'$ сопоставим четверку $q_{M'} = \langle m_{11}, m_{10}, m_{01}, m_{00} \rangle$, где m_{ij} = мощность $\{m | m \in |M|, \|\varphi(m)\|_M = i,\ \|\psi(m)\|_M = j\}$, $i,j \in \{0,1\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Модель M_1' из $\mathcal{M}'$ с четверкой $q_{M_1'} = \langle m^1_{11}, m^1_{10}, m^1_{01}, m^1_{00} \rangle$ а-лучше (i-лучше) модели M_2' из $\mathcal{M}'$ с $q_{M_2'} = \langle m^2_{11}, m^2_{10}, m^2_{01}, m^2_{00} \rangle$, если $m^1_{11} \geq m^2_{11}$, $m^1_{10} \leq m^2_{10}$, $m^1_{01} \leq m^2_{01}$, $m^1_{00} \geq m^2_{00}$ ($m^1_{11} \geq m^2_{11}$, $m^1_{10} \leq m^2_{10}$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Квантор $\underset{x}{\sim}$ ($\underset{x}{\Rightarrow}$) принадлежит классу ассоциативных (импликационных) кванторов, если он удовлетворяет следующему условию: для любых моделей $M_1' = \langle |M_1|, \|\varphi_1(x)\|_{M_1}, \|\psi_1(x)\|_{M_1} \rangle$ из $\mathcal{M}'$ и $M_2' = \langle |M_2|, \|\varphi_2(x)\|_{M_2}, \|\psi_2(x)\|_{M_2} \rangle$ из $\mathcal{M}'$ и из того, что

$\|\varphi_2(x) \underset{x}{\approx} \psi_2(x)\|_{M_2} = 1$ $(\|\varphi_2(x) \underset{x}{\Rightarrow} \psi_2(x)\|_{M_2} = 1)$ и M_1' а-лучше (i-лучше) M_2', следует, что $\|\varphi_1(x) \underset{x}{\approx} \psi_1(x)\|_{M_1} = 1$ $(\|\varphi_1(x) \underset{x}{\Rightarrow} \psi_1(x)\|_{M_1} = 1)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Формула $\varphi(x) \underset{x}{\approx} \psi(x)$ $(\varphi(x) \underset{x}{\Rightarrow} \psi(x))$ языка L^a (L^i) является чисто предваренной, если и только если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ - бескванторные формулы, содержащие единственную свободную переменную x.

Мы не случайно рассматриваем только два класса кванторов. Забегая вперед, заметим, что известные конкретные кванторы обязательно принадлежат одному из этих классов, в частности, кванторы всеобщности $\forall x$, существования $\exists x$, импликации Черча $\underset{x}{\Rightarrow}$, обоснованной р-импликации $\underset{p,a}{\Rightarrow}$ принадлежат классу i-кванторов, а кванторы большинства Wx, простой ассоциации $\underset{x}{\dot{\sim}}$, аддитивной ассоциации $\underset{x}{\overset{+}{\sim}}$ принадлежат классу а-кванторов.

Итак, пусть дан язык L^a (L^i), имеющий единственный а-квантор $\underset{x}{\approx}$ (i-квантор $\underset{x}{\Rightarrow}$), и пусть Φ - предложение в языке L^a (L^i).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Предложение Φ есть схема ассоциативных тавтологий или а-тавтологий (схема импликационных тавтологий или i-тавтологий), если Φ - тавтология в каждом исчислении I^a (I^i) с языком L^a (L^i), в котором $\underset{x}{\approx}$ $(\underset{x}{\Rightarrow})$ есть а-квантор (i-квантор).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Предложение Φ есть схема ассоциативных общезначимых формул или а-общезначимых (схема импликационных общезначимых формул или i-общезначимых), если Φ истинно в каждой модели из $\mathfrak{M}$ при любой интерпретации а-квантора (i-квантора).

Наша ближайшая цель - найти множество <u>всех</u> правил вывода, корректных для каждого исчисления I^a (I^i), и показать совпадение множеств схем а-тавтологий (схем i-тавтологий) и схем а-общезначимых (схем i-общезначимых).

Начнем с рассмотрения простых схем ассоциативных тавтологий (схем импликационных тавтологий), представленных в виде

$$(\varphi(x) \underset{x}{\approx} \psi(x)) \to (\varphi_1(x) \underset{x}{\approx} \psi_1(x)),\ [(\varphi(x) \underset{x}{\Rightarrow} \psi(x)) \to (\varphi_1(x) \underset{x}{\Rightarrow} \psi_1(x))],$$

где $\varphi(x) \underset{x}{\approx} \psi(x)$, $\varphi_1(x) \underset{x}{\approx} \psi_1(x)$, $\varphi(x) \underset{x}{\Rightarrow} \psi(x)$, $\varphi_1(x) \underset{x}{\Rightarrow} \psi_1(x)$ - чисто предваренные формулы.

Введем необходимые понятия из [2].

Пусть n - фиксированное число унарных предикатных символов в языке L^a (L^i). Множество $K \rightleftharpoons \{\langle \varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n \rangle \mid \langle \varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n \rangle$ - n-кортеж из 0 и I, называемый n-картой$\}$. Ясно, что мощность K равна 2^n, причем 2^n есть и число различных элементарных конъюнкций $P_1^{\varepsilon_1}(x)\&\ldots\& P_n^{\varepsilon_n}(x)$, где $P_i^{\varepsilon_i}(x) = P_i(x)$, если $\varepsilon_i = 1$, и $P_i^{\varepsilon_i}(x) = \neg P_i(x)$, если $\varepsilon_i = 0$. Теперь, если в чисто предваренной формуле $\varphi(x) \underset{x}{\gtrsim} \psi(x)$ ($\varphi(x) \underset{x}{\lesssim} \psi(x)$) формулы $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ представить в виде СДНФ[ж)] [4], то формуле $\varphi(x) \underset{x}{\gtrsim} \psi(x)$ ($\varphi(x) \underset{x}{\lesssim} \psi(x)$) можно сопоставить четверку $r(\varphi,\psi) = \langle A, B, C, D\rangle$, где A, B, C, D - попарно-непересекающиеся множества из K, причем $A \cup B \cup C \cup D = K$. Множества A, B, C, D определяются следующим образом:

$A \rightleftharpoons \{\langle \varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n \rangle \mid P_1^{\varepsilon_1}(x)\& \ldots\& P_n^{\varepsilon_n}(x)$ - член СДНФ $\varphi(x)$ и $\psi(x)\}$,

$B \rightleftharpoons \{\langle \varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n \rangle \mid P_1^{\varepsilon_1}(x)\& \ldots\& P_n^{\varepsilon_n}(x)$ - член СДНФ $\varphi(x)$, но не член СДНФ $\psi(x)\}$,

$C \rightleftharpoons \{\langle \varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n \rangle \mid P_1^{\varepsilon_1}(x)\& \ldots\& P_n^{\varepsilon_n}(x)$ - член СДНФ $\psi(x)$, но не член СДНФ $\varphi(x)\}$,

$D \rightleftharpoons \{\langle \varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n \rangle \mid P_1^{\varepsilon_1}(x)\& \ldots\& P_n^{\varepsilon_n}(x)$ не член СФНФ $\varphi(x)$ и $\psi(x)\}$.

Напомним [2], что соотношение $r(\varphi,\psi) = r(\varphi_1,\psi_1)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\varphi \equiv \varphi_1$, $\psi \equiv \psi_1$.

Введем дополнительное

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.

I. Назовем четверку $r(\varphi_1,\psi_1)$ а-лучше четверки $r(\varphi,\psi)$ тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из следующих соотношений:

а) $A \subseteq A_1$, $B_1 \subseteq B$, $C = C_1$, $D = D_1$ (будем этот случай обозначать $\langle \overset{\frown}{A,B}, C, D\rangle$, где стрелка указывает, что n-карты из B оказались ("перешли") в A);

б) $A \subseteq A_1$, $B_1 = B$, $C_1 \subseteq C$, $D = D_1$, или $\langle \overset{\frown}{A,B,C}, D\rangle$;

ж) СДНФ - совершенная дизъюнктивная нормальная форма, СКНФ - совершенная конъюнктивная нормальная форма.

в) $A = A_1,\ B_1 \subseteq B,\ C_1 = C,\ D \subseteq D_1$, или $\langle A, \widehat{B, C, D} \rangle$;

г) $A = A_1,\ B_1 = B,\ C_1 \subseteq C,\ D \subseteq D_1$, или $\langle A, B, \widehat{C, D} \rangle$.

2. Назовем четверку $r(\varphi_1, \psi_1)$ i-лучше $r(\varphi, \psi)$ тогда и только тогда, когда имеют место хотя бы один из пп. "а"-"г" и хотя бы одно из следующих соотношений:

д) $A = A_1,\ B_1 \subseteq B,\ C \subseteq C_1,\ D = D_1$, или $\langle A, \widehat{B, C}, D \rangle$;

е) $A = A_1,\ B_1 = B,\ C \subseteq C_1,\ D_1 \subseteq D$, или $\langle A, B, \widehat{C, D} \rangle$;

ж) $A \subseteq A_1,\ B_1 = B,\ C = C_1,\ D_1 \subseteq D$, или $\langle \widehat{A, B, C, D} \rangle$.

ЛЕММА I. а) Пусть $\varphi(x) \underset{x}{\simeq} \psi(x)$ и $\varphi_1(x) \underset{x}{\simeq} \psi_1(x)$ – чисто предваренные формулы в языке L^a, где $\underset{x}{\simeq}$ есть a-квантор. Предложение $(\varphi(x) \underset{x}{\simeq} \psi(x)) \to (\varphi_1(x) \underset{x}{\simeq} \psi_1(x))$ есть схема a-общезначимых тогда и только тогда, когда четверка $r(\varphi_1, \psi_1)$ a-лучше четверки $r(\varphi, \psi)$.

б) Пусть $\varphi(x) \underset{x}{\simeq} \psi(x)$ и $\varphi_1(x) \underset{x}{\simeq} \psi_1(x)$ – чисто предваренные формулы в языке L^i с i-квантором $\underset{x}{\simeq}$. Предложение $(\varphi(x) \underset{x}{\simeq} \psi(x)) \to$ $\to (\varphi_1(x) \underset{x}{\simeq} \psi_1(x))$ есть схема i-общезначимых тогда и только тогда, когда $r(\varphi_1, \psi_1)$ i-лучше $r(\varphi, \psi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) <u>Достаточность.</u> Пусть $r(\varphi, \psi) = \langle A, B, C, D \rangle$ и $r(\varphi_1, \psi_1) = \langle A_1, B_1, C_1, D_1 \rangle$ и пусть $r(\varphi_1, \psi_1)$ a-лучше $r(\varphi, \psi)$, например, имеет место случай $\langle \widehat{A, B}, C, D \rangle$.

Покажем, что тогда формула $(\varphi \underset{x}{\simeq} \psi) \to (\varphi_1 \underset{x}{\simeq} \psi_1)$ истинна в каждой модели M из $\mathfrak{M}$ при любой интерпретации a-квантора $\underset{x}{\simeq}$. Но если задана модель M, то можно сказать, что задано и отображение множества K в множество N натуральных чисел, причем так, что каждая n-карта $\langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \rangle$ из K отображается в число m из N, показывающее число объектов из $|M|$, на которых $P_1^{\varepsilon_1}(x) \,\&\ldots\&\, P_n^{\varepsilon_n}(x)$ истинен. В таком случае четверка $r(\varphi, \psi)$ в модели M отобразится в четверку чисел $\langle m_{11}, m_{10}, m_{01}, m_{00} \rangle$, а четверка $r(\varphi_1, \psi_1)$ – в чет -

верку $\langle m^1_{11}, m^1_{10}, m^1_{01}, m^1_{00} \rangle$. В рассматриваемом случае $\langle A, B, C, D \rangle$ в любой модели M из $\mathfrak{M}$ будут иметь место следующие соотношения: $m_{11} \leq m^1_{11}$, $m_{10} \geq m^1_{10}$, $m_{01} = m^1_{01}$, $m_{00} = m^1_{00}$. Но это означает, в силу определения а-квантора, что из истинности формулы $\varphi \underset{x}{\sim} \psi$ на модели M будет следовать истинность $\varphi_1 \underset{x}{\sim} \psi_1$ на этой же модели M.

Аналогично рассматриваются остальные случаи.

а) Необходимость. Пусть $r(\varphi_1, \psi_1)$ не является а-лучше $r(\varphi, \psi)$, в то время как предложение $(\varphi \underset{x}{\sim} \psi) \to (\varphi_1 \underset{x}{\sim} \psi_1)$ есть схема а-общезначимых. Но тогда имеет место хотя бы один из следующих случаев:

I. а) $\langle A, B, C, D \rangle$ или б) $\langle A, B, C, D \rangle$;

2. а) $\langle A, B, C, D \rangle$ или б) $\langle A, B, C, D \rangle$;

3. а) $\langle A, B, C, D \rangle$ или б) $\langle A, B, C, D \rangle$;

4. а) $\langle A, B, C, D \rangle$ или б) $\langle A, B, C, D \rangle$.

Например, пусть выполнено соотношение 3,"а", т.е. какая-то n-карта (обозначим ее a_0) из множества A попала в B. Так как, по допущению, формула $(\varphi \underset{x}{\sim} \psi) \to (\varphi_1 \underset{x}{\sim} \psi_1)$ общезначима для любого а-квантора $\underset{x}{\sim}$, то она общезначима и для случая когда $\underset{x}{\overset{+}{\sim}}$ есть а-квантор аддитивной ассоциации[x)].

Рассмотрим модель M из $\mathfrak{M}$, где $|\overline{M}| = m$ четное. Каждая n-карта из K отобразится в модели M в некоторое число M(n-карта) из N. Пусть наша модель M такова, что

I) каждая n-карта из множества $\{A \setminus \{a_0\} \cup D\}$ отобразится в число 0.

2) n-карты из $\{B \cup C\}$ отобразятся в числа из N так, что в совокупности (точнее, в сумме) составят число $\frac{m}{2} - 1$;

3) n-карта a_0 отобразится в число $\frac{m}{2} + 1$.

---

x) Для формулы $\varphi(x) \underset{x}{\overset{+}{\sim}} \psi(x)$ в языке L^a, где $\underset{x}{\overset{+}{\sim}}$ – аддитивная ассоциация, $\| \varphi(x) \underset{x}{\overset{+}{\sim}} \psi(x) \|_M = 1 \leftrightarrow m_{11} + m_{00} > m_{10} + m_{01}$, где $M \in \mathfrak{M}$.

Тогда имеют место следующие равенства:

$$m_{11} = \frac{m}{2} + 1;\ m^1_{11} = 0;\ m_{10} + m_{01} = \frac{m}{2} - 1;$$

$$m^1_{10} + m^1_{01} = m;\ m_{00} = m^1_{00} = 0.$$

Формула $\varphi \underset{\mathfrak{X}}{\overset{\pm}{}} \psi$ на модели M будет истинна, так как выполнено соотношение $m_{11} + m_{00} > m_{10} + m_{01}$, т.е. $\frac{m}{2} + 1 > \frac{m}{2} - 1$, тогда как формула $\varphi_1 \underset{\mathfrak{X}}{\overset{\pm}{}} \psi_1$ на этой же модели будет ложна в силу невыполнения соотношения $m_{11} + m_{00} > m_{10} + m_{01}$, т.е. $0 \not> m$. Получим противоречие с принятым допущением. Следовательно, случай 3,"а" не может иметь места.

Аналогично рассматриваются остальные случаи.

Перейдем к п. "б" леммы I.

Достаточность доказывается аналогично п. "а".

Необходимость докажем методом от противного.

Пусть $(\varphi \underset{\mathfrak{X}}{\Rightarrow} \psi) \to (\varphi_1 \underset{\mathfrak{X}}{\Rightarrow} \psi_1)$ - схема i-общезначимых, но четверка $r(\varphi_1, \psi_1)$ не i-лучше $r(\varphi, \psi)$. Тогда имеет место один из следующих случаев: I) $\langle \overset{\frown}{A, B, C, D} \rangle$; 2) $\langle A, \overset{\frown}{B, C}, D \rangle$; 3) $\langle \overset{\frown}{A, B}, C, D \rangle$; 4) $\langle \overset{\frown}{A, B, C}, D \rangle$; 5) $\langle A, \overset{\frown}{B, C, D} \rangle$.

Допустим, что выполнено соотношение для случая 2, т.е. n-карта (обозначим ее c_0) из C попала в B. Рассмотрим модель M мощности m из $\mathfrak{M}$, и пусть $\underset{\mathfrak{X}}{\Rightarrow}$ есть i-квантор, $\underset{\mathfrak{X}}{\Rightarrow}$ - импликация Черча[ж)].

В модели M n-карты из K отобразим следующим образом:

I) все n-карты из $A \cup B \cup C_1 \cup D$ отобразятся в 0;

2) n-карта c_0 отобразится в m.

Тогда на этой модели M формула $\varphi \underset{\mathfrak{X}}{\Rightarrow} \psi$ будет истинна, так как $m_{10} = 0$, тогда как формула $\varphi_1 \underset{\mathfrak{X}}{\Rightarrow} \psi_1$ будет ложна на M, так как $m^1_{10} = m$.

Получили противоречие с принятым допущением. Аналогично рассматривается невозможность остальных случаев. Лемма доказана.

Вернемся к определению множеств A, B, C, D, из которого явно видна связь между переходами n-карт и переходами соответствующих им элементарных конъюнкций из СДНФ одной из формул $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в СДНФ другой.

ж) Если $\varphi(x) \underset{\mathfrak{X}}{\Rightarrow} \psi(x)$ - формула в языке L^1, где $\underset{\mathfrak{X}}{\Rightarrow}$ - импликация Черча, то $\|\varphi(x) \underset{\mathfrak{X}}{\Rightarrow} \psi(x)\|_M = 1 \Leftrightarrow m_{10} = 0$; $M \in \mathfrak{M}$.

Рассмотрим следующие системы правил вывода:

DR^a: $\dfrac{\varphi \vee \chi \underset{X}{\simeq} \psi}{\varphi \vee \chi \underset{X}{\simeq} \varphi \vee \chi}$ соответствует случаю $\langle A, B, C, D \rangle$,

$\dfrac{\varphi \underset{X}{\simeq} \psi \vee \chi}{\varphi \vee \chi \underset{X}{\simeq} \psi \vee \chi}$ соответствует случаю $\langle A, B, C, D \rangle$,

$\dfrac{\varphi \underset{X}{\simeq} \psi \,\&\, \chi}{\varphi \,\&\, \chi \underset{X}{\simeq} \psi \,\&\, \chi}$ соответствует случаю $\langle A, B, C, D \rangle$,

$\dfrac{\varphi \,\&\, \chi \underset{X}{\simeq} \psi}{\varphi \,\&\, \chi \underset{X}{\simeq} \psi \,\&\, \chi}$ соответствует случаю $\langle A, B, C, D \rangle$,

DR^i: $\dfrac{\varphi \,\&\, \neg\chi \underset{X}{\simeq} \psi}{\varphi \underset{X}{\simeq} \psi \vee \chi}$ соответствует случаю $\langle A, B, C, D \rangle$,

$\dfrac{\varphi \vee \chi \underset{X}{\simeq} \psi \,\&\, \neg\chi}{\varphi \,\&\, \neg\chi \underset{X}{\simeq} \psi \,\&\, \neg\chi}$ соответствует случаю $\langle A, B, C, D \rangle$,

$\dfrac{\varphi \,\&\, \neg\chi \underset{X}{\simeq} \psi \vee \chi}{\varphi \,\&\, \neg\chi \underset{X}{\simeq} \psi \,\&\, \neg\chi}$ соответствует случаю $\langle A, B, C, D \rangle$.

Посылки и заключения в правилах из DR^a и DR^i есть чисто предваренные формулы. Каждое из перечисленных правил вывода осуществляет переходы элементарных конъюнкций из одной части формулы в другую, что соответствует (по определению множеств A, B, C, D) переходу n-карты из одного множества в другое.

Поясним сказанное на примере.

Если в чисто предваренной формуле-посылке правила $\dfrac{\varphi \underset{X}{\simeq} \psi \vee \chi}{\varphi \vee \chi \underset{X}{\simeq} \psi \vee \chi}$ формулы φ и $\psi \vee \chi$ разложить в СДНФ, то это правило осуществляет либо тривиальный переход (в случае, если все элементарные конъюнкции формулы χ входят в СДНФ формулы φ), либо добавляет в СДНФ формулы φ новые элементарные конъюнкции, не входившие в нее раньше, но являющиеся членами СДНФ формулы $\psi \vee \chi$. Это соответствует переходу n-карты из C в A.

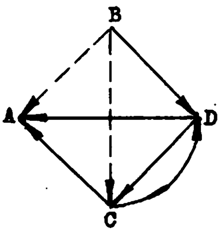
Рассмотрим еще один пример: $\dfrac{\varphi \,\&\, \neg\chi \sim_{x} \psi}{\varphi \sim_{x} \psi \vee \chi}$. Разложим формулу $\varphi \,\&\, \neg\chi$ в СКНФ. Заметим, что СКНФ формулы состоит из отрицаний элементарных конъюнкций, не являющихся дизъюнктивными членами СДНФ этой формулы. Поэтому, убирая члены СКНФ формулы $\varphi \,\&\, \neg\chi$, мы тем самым добавляем члены в СДНФ этой формулы. Но в зависимости от вхождения элементарных конъюнкций формулы χ в качестве членов в СДНФ формулы ψ будем иметь три случая: I) если вся формула χ входит в СДНФ ψ, то осуществляем переход из C в A; 2) если вся формула χ не входит ни в СДНФ ψ, ни в СДНФ φ, то n-карты из D переходят в C; 3) если же χ не входит в СДНФ ψ, но входит в СДНФ φ, то осуществляем переход n-карт из D в A.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Правило вывода называется корректным, если в каждой модели из $\mathfrak{M}$ из истинности посылки следует истинность заключения.

ЛЕММА 2. Системы правил вывода DR^a и DR^i независимы (в отдельности), и каждое правило этих систем является корректным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем независимость системы DR^i, используя ориентированные графы. В качестве вершин графа возьмем множества n-карт A, B, C, D, а ребра будут соответствовать переходам, осуществляемым правилами вывода из DR^i. Например, ребро с началом в вершине B и с концом в вершине D соответствует правилу

$$\frac{\varphi \vee \chi \sim_{x} \psi \,\&\, \neg\chi}{\varphi \,\&\, \neg\chi \sim_{x} \psi \,\&\, \neg\chi}.$$



Теперь доказательство независимости системы DR^i выглядит очень просто: если убрать какую-нибудь совокупность ребер, соответствующих одному из правил вывода, то с помощью оставшихся ребер мы не сможем попасть в вершины, дозволенные нам (в случае импликационных кванторов, имеются в виду семь возможных переходов, перечисленных в пп."а"-"ж" определения 6). Например, если убрать ребро CD, т.е.

убрать правило $\dfrac{\varphi \,\&\, \neg\chi \underset{X}{\cong} \psi \vee \chi}{\varphi \,\&\, \neg\chi \underset{X}{\cong} \psi \,\&\, \neg\chi}$, то с помощью оставшихся ребер мы никаким путем не сможем попасть из вершины C в D. Совершенно аналогично доказывается независимость системы DR^a.

Докажем корректность каждого правила по следующей схеме: пусть данное правило выглядит так: $\dfrac{\varphi \underset{X}{\cong} \psi}{\varphi_1 \underset{X}{\cong} \psi_1}$. Берем произвольную модель M из $\mathfrak{M}$, находим четверку q_{M_1} для модели $M_1 = \langle |M|, \|\varphi\|_M, \|\psi\|_M \rangle$, четверку q_{M_2} для $M_2 = \langle |M|, \|\varphi_1\|_M, \|\psi\|_M \rangle$. После чего показываем, что q_{M_2} a-лучше q_{M_1}, и из определения рассматриваемого в данном случае ассоциативного квантора следует, что из истинности посылки $\varphi \underset{X}{\cong} \psi$ на модели M следует истинность заключения $\varphi_1 \underset{X}{\cong} \psi_1$. Например, рассмотрим правило $\dfrac{\varphi \,\&\, \neg\chi \underset{X}{\cong} \psi}{\varphi \underset{X}{\cong} \psi \vee \chi}$. Имеем

$$M_1 = \langle |M|, \|\varphi \,\&\, \neg\chi\|_M, \|\psi\|_M \rangle,$$

$$M_2 = \langle |M|, \|\varphi\|_M, \|\psi \vee \chi\|_M \rangle,$$

$$q_{M_1} = \langle m_{101};\ m_{100};\ m_{111}+m_{011}+m_{001};\ m_{000}+m_{010}+m_{110} \rangle,$$

$$q_{M_2} = \langle m_{101}+m_{111}+m_{110};\ m_{100};\ m_{011}+m_{010}+m_{001};\ m_{000} \rangle.$$

Очевидно, q_{M_2} i-лучше q_{M_1}.

Вообще говоря, существует целый ряд систем правил вывода, эквивалентных DR^a и DR^i соответственно. Приведем некоторые из них:

DR^a: $\dfrac{\varphi \vee \chi \underset{X}{\cong} \psi \,\&\, \neg\chi}{\varphi \vee \chi \underset{X}{\cong} \psi}$ соответствует $\langle \overset{\frown}{A,B}, C, D \rangle$,

$\dfrac{\varphi \,\&\, \neg\chi \underset{X}{\cong} \psi \vee \chi}{\varphi \underset{X}{\cong} \psi \vee \chi}$ соответствует $\langle \overset{\frown}{A, B, C}, D \rangle$,

$$\frac{\varphi \vee \chi \underset{x}{\approx} \psi \,\&\, \neg\chi}{\varphi \,\&\, \neg\chi \underset{x}{\approx} \psi \,\&\, \neg\chi}$$ соответствует $\langle A, B, C, D \rangle$,

$$\frac{\varphi \,\&\, \neg\chi \underset{x}{\approx} \psi \vee \chi}{\varphi \,\&\, \neg\chi \underset{x}{\approx} \psi \,\&\, \neg\chi}$$ соответствует $\langle A, B, C, D \rangle$,

DR^{i}: $$\frac{\varphi \underset{x}{\approx^{\bullet}} \psi \,\&\, \neg\chi}{\varphi \,\&\, \neg\chi \underset{x}{\approx^{\bullet}} \psi}$$ соответствует $\langle A, B, C, D \rangle$,

$$\frac{\varphi \,\&\, \neg\chi \underset{x}{\approx^{\bullet}} \psi \vee \chi}{\varphi \underset{x}{\approx^{\bullet}} \psi \vee \chi}$$ соответствует $\langle A, B, C, D \rangle$;

$$\frac{\varphi \,\&\, \neg\chi \underset{x}{\approx^{\bullet}} \psi}{\varphi \,\&\, \neg\chi \underset{x}{\approx^{\bullet}} \psi \,\&\, \neg\chi}$$ соответствует $\langle A, B, C, D \rangle$.

ТЕОРЕМА I. I) Пусть дан язык L^{a}, описанный ранее, с одним а-квантором $\underset{x}{\approx}$, $\varphi \underset{x}{\approx} \psi$ и $\varphi_1 \underset{x}{\approx} \psi_1$ – чисто предваренные формулы в языке L^{a}. Выражение $(\varphi \underset{x}{\approx} \psi) \to (\varphi_1 \underset{x}{\approx} \psi_1)$ – схема а-общезначимых тогда и только тогда, когда формула $\varphi_1 \underset{x}{\approx} \psi_1$ выводима из формулы $\varphi \underset{x}{\approx} \psi$ по правилам DR^{a}.

2) Рассмотрим язык L^{i} с i-квантором $\underset{x}{\approx^{\bullet}}$, пусть $\varphi \underset{x}{\approx} \psi$, $\varphi_1 \underset{x}{\approx} \psi_1$ – чисто предваренные формулы в языке L^{i}. Предложение $(\varphi \underset{x}{\approx} \psi) \to (\varphi_1 \underset{x}{\approx} \psi_1)$ – схема i-общезначимых тогда и только тогда, когда формула $\varphi_1 \underset{x}{\approx} \psi_1$ выводима из $\varphi \underset{x}{\approx} \psi$ по правилам DR^{i}.

Доказательство очевидно из лемм I и 2.

Приступим теперь к рассмотрению более сложных схем ассоциативных и импликационных общезначимых формул. Для начала заметим, что простейших схем а-общезначимых (i-общезначимых) вида чисто предваренной формулы $\varphi \underset{x}{\approx} \psi$ ($\varphi \underset{x}{\approx} \psi$) или отрицания чисто предваренной формулы $\neg(\varphi \underset{x}{\approx} \psi)$ $[\neg(\varphi \underset{x}{\approx} \psi)]$, где φ и ψ – различные формулы в определенном ранее языке L^a (L^i), не существует. Этот факт имеет место, поскольку в определении схемы а-общезначимых (i-общезначимых) $\underset{x}{\approx}$ ($\underset{x}{\approx}$) – <u>произвольный</u> фиксированный а-квантор (i-квантор),а семантика каждого квантора определяется по-разному, поэтому заранее определить формулу указанного вида, которая будет истинна в любой модели из $\mathfrak{M}$ при любой интерпретации а-квантора (i-квантора), в принципе невозможно.

Согласно следствию леммы 3.13 из [2] любое предложение в рассматриваемых исчислениях логически эквивалентно конъюнкции элементарных дизъюнкций чисто предваренных формул и их отрицаний. Следовательно, предложение Φ представимо в следующем виде:

$$\Phi = \mathop{\&}_{i=1}^{k} D_i ,$$

где

$$D_i = (\varphi_{i_1} \underset{x}{\approx} \psi_{i_1})^{\varepsilon_1} \vee \ldots \vee (\varphi_{i_m} \underset{x}{\approx} \psi_{i_m})^{\varepsilon_m} ,$$

причем

$$(\varphi_{i_j} \underset{x}{\approx} \psi_{i_j})^{\varepsilon_j} = (\varphi_{i_j} \underset{x}{\approx} \psi_{i_j}), \text{ если } \varepsilon_j = 1,$$

$$(\varphi_{i_j} \underset{x}{\approx} \psi_{i_j})^{\varepsilon_j} = \neg(\varphi_{i_j} \underset{x}{\approx} \psi_{i_j}), \text{ если } \varepsilon_j = 0.$$

Очевидно, предложение Φ будет схемой а-общезначимых (i-общезначимых) тогда и только тогда, когда каждая элементарная дизъюнкция D_i , $i = \overline{1,k}$, является схемой а-общезначимых (i-общезначимых). В силу вышеизложенного замечания каждая дизъюнкция D_i не может состоять из одних только положительных формул вида ($\varphi \underset{x}{\approx} \psi$) или одних только отрицательных чисто предваренных формул вида $\neg(\varphi \underset{x}{\approx} \psi)$, а должна содержать по крайней мере одну отрицательную и одну положительную чисто предваренные формулы. Тогда каждую дизъюнкцию можно представить в виде импликации, в посылке которой стоит конъюнкция всех чисто предваренных формул, входивших в эту дизъюнкцию в качестве отрицательных членов, а в заключении - дизъюнкция всех положительных чисто предваренных формул. Каждая дизъюнкция D_i, $i = \overline{1,k}$, примет следующий вид:

$$(\varphi_{i_1} \underset{x}{\approx} \psi_{i_1}) \& \ldots \& (\varphi_{i_s} \underset{x}{\approx} \psi_{i_s}) \to [(\varphi_{i_{s+1}} \underset{x}{\approx} \psi_{i_{s+1}}) \vee \ldots \vee (\varphi_{i_m} \underset{x}{\approx} \psi_{i_m})]. \quad (1)$$

Вернемся к нашему исчислению I^a (I^i), язык которого содер - жит n унарных предикатов, связки &, $\vee$, $\to$, $\neg$ и один a-квантор (i-квантор) $\underset{x}{\approx}$ $(\underset{x}{\approx}^{i})$, произвольный, но фиксированный. Добавим к системе правил вывода DR^a (DR^i), корректных в каждом исчислении I^a (I^i), еще и правила введения и удаления логических связок (нату - рального вывода [5]). Полученную систему корректных правил вывода обозначим через $DR(I^a)$ $[DR(I^i)]$.

ЛЕММА 3. Выражение вида (I) является схемой a-общезначимых (i-общезначимых) тогда и только тогда, когда существует такая пара формул $\varphi_{i_j} \underset{x}{\approx} \psi_{i_j}$ из посылки и $\varphi_{i_l} \underset{x}{\approx} \psi_{i_l}$ из заключения импликации (I), что чисто предваренная формула $\varphi_{i_l} \underset{x}{\approx} \psi_{i_l}$ выводима из формулы $\varphi_{i_j} \underset{x}{\approx} \psi_{i_j}$ по правилам DR^a (DR^i).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность. Допустим, что такая пара формул $\varphi_{i_j} \underset{x}{\approx} \psi_{i_j}$ и $\varphi_{i_l} \underset{x}{\approx} \psi_{i_l}$ нашлась в импликации (I). Тогда следую - щий вывод является корректным выводом формулы, суть которой общезначимая формула каждого исчисления I^a:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{(\varphi_{i_1} \underset{x}{\approx} \psi_{i_1}) \& \ldots \& (\varphi_{i_s} \underset{x}{\approx} \psi_{i_s})}{\varphi_{i_j} \underset{x}{\approx} \psi_{i_j}}\,(\&y)}{\vdots}\,(DR^a)}{\cfrac{\varphi_{i_l} \underset{x}{\approx} \psi_{i_l}}{(\varphi_{i_{s+1}} \underset{x}{\approx} \psi_{i_{s+1}}) \vee \ldots \vee (\varphi_{i_m} \underset{x}{\approx} \psi_{i_m})}\,(\vee в)}}{(\varphi_{i_1} \underset{x}{\approx} \psi_{i_1}) \& \ldots \& (\varphi_{i_s} \underset{x}{\approx} \psi_{i_s}) \to [(\varphi_{i_{s+1}} \underset{x}{\approx} \psi_{i_{s+1}}) \vee \ldots \vee (\varphi_{i_m} \underset{x}{\approx} \psi_{i_m})]}\,(\to в)$$

Необходимость докажем методом от противного. Пусть выражение (I) является схемой a-общезначимых, но не существует ни одной пары формул: $\varphi_{i_j} \underset{x}{\simeq} \psi_{i_j}$ из посылки и $\varphi_{i_l} \underset{x}{\simeq} \psi_{i_l}$ из заключения таких, что из чисто предваренной формулы $\varphi_{i_j} \underset{x}{\simeq} \psi_{i_j}$ по правилам DR^a выводилась бы чисто предваренная формула $\varphi_{i_l} \underset{x}{\simeq} \psi_{i_l}$.

Запишем импликацию (I) в виде дизъюнкции чисто предваренных формул и их отрицаний

$$D_i = \neg(\varphi_{i_1} \underset{x}{\simeq} \psi_{i_1}) \vee \ldots \vee \neg(\varphi_{i_s} \sim \psi_{i_s}) \vee (\varphi_{i_{s+1}} \underset{x}{\simeq} \psi_{i_{s+1}}) \vee \ldots \vee (\varphi_{i_m} \underset{x}{\simeq} \psi_{i_m}).$$

Теперь произвольным образом разобьем члены дизъюнкции D_i по парам так, чтобы в каждую пару вошла одна отрицательная и одна положительная формулы. В случае $s \neq m-s$ в "остатке" будут либо только положительные ($s < m-s$), либо только отрицательные ($s > m-s$) формулы. Каждая получившаяся пара представляется в виде импликации $(\varphi_{i_j} \underset{x}{\simeq} \psi_{i_j}) \to (\varphi_{i_l} \underset{x}{\simeq} \psi_{i_l})$. По теореме I такая импликация не является схемой a-общезначимых, так как, по нашему предположению, ни одна формула из посылки не выводит по правилам DR^a ни одну формулу из заключения. "Остаток", если существует, также не является схемой a-общезначимых в силу сделанного ранее замечания. Допустим теперь, что существует такое разбиение формул по парам в D_i, что хотя каждая из импликаций не является схемой a-общезначимых, но в совокупности они дают схему a-общезначимых формул D_i. Тогда, по лемме I и теореме I, в каждой паре осуществляется переход n-карт, не указанный в п. I определения 6. Очевидно, для каждого набора таких переходов (а их конечное число) можно найти конкретный a-квантор, для которого D_i будет ложной в некоторой модели из $\mathfrak{M}$. Получили противоречие.

Аналогично доказывается лемма для случая i-квантора.

ТЕОРЕМА 2. I. *Пусть Φ - предложение в рассматриваемом языке L^a (L^i) исчисления I^a (I^i). Тогда Φ есть схема a-общезначимых (i-общезначимых) тогда и только тогда, когда Φ - схема a-тавтологий (i-тавтологий) или Φ выводимы по правилам $DR(I^a)$ [$DR(I^i)$] из пустого множества посылок.*

2. *Для любого предложения Φ описанного выше исчисления I^a (I^i) мож-*

но за конечное число шагов распознать, является ли Φ схемой а-общезначимых (i-общезначимых) или нет.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. Так как любое предложение в языке L^a (L^i) представимо в виде конъюнкции элементарных дизъюнкций чисто предваренных формул, то для доказательства достаточности нужно показать, что каждая дизъюнкция в указанном разложении формулы Φ выводима из пустого множества посылок по правилам $DR(I^a)$ [$DR(I^i)$]. Последнее следует из леммы 3.

Необходимость очевидна.

2. Разложим за конечное число шагов предложение Φ в конъюнкцию элементарных дизъюнкций чисто предваренных формул $\Phi = \mathop{\&}_{i=1}^{k} D_i$, где $D_i = \neg(\varphi_{i_1} \underset{X}{\sim} \psi_{i_1}) \vee \ldots \vee \neg(\varphi_{i_s} \underset{X}{\sim} \psi_{i_s}) \vee (\varphi_{i_{s+1}} \underset{X}{\sim} \psi_{i_{s+1}}) \vee \ldots \vee (\varphi_{i_m} \underset{X}{\sim} \psi_{i_m})$.

Над каждой дизъюнкцией D_i, $i = \overline{1,k}$, проделаем следующие операции. Определим для каждого члена D_i вида $(\varphi_{i_j} \underset{X}{\sim} \psi_{i_j})$ четверку $r(\varphi_{i_j}, \psi_{i_j})$, а для каждого члена вида $\neg(\varphi_{i_1} \underset{X}{\sim} \psi_{i_1})$ – четверку $r'(\varphi_{i_1}, \psi_{i_1})$. Затем среди конечного числа четверок вида $r(\varphi_{i_j}, \psi_{i_j})$ найдем такую, которая будет с четверкой из конечного числа четверок вида $r'(\varphi_{i_1}, \psi_{i_1})$ в отношении: $r(\varphi_{i_j}, \psi_{i_j})$ а-лучше $r'(\varphi_{i_1}, \psi_{i_1})$. Если существует такая пара, то по лемме I и 3 и теореме I рассматриваемая дизъюнкция D_i будет схемой а-общезначимых, иначе D_i не является таковой. В случае если каждая элементарная дизъюнкция в разложении формулы Φ будет схемой а-общезначимых, то Φ – схема а-общезначимых, иначе не является схемой а-общезначимых.

Аналогично для схемы i-общезначимых.

Между схемами ассоциативных и импликационных общезначимых формул существует связь, которая отражается в следующем утверждении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $(\varphi \underset{X}{\sim} \psi)$ и $(\varphi_1 \underset{X}{\sim} \psi_1)$ – чисто предваренные формулы в языке L^a описанного выше исчисления I^a; $(\varphi \underset{X}{\sim} \psi)$ и $(\varphi_1 \underset{X}{\sim} \psi_1)$ – чисто предваренные формулы в языке L^i исчисления I^i. Тогда импликация $(\varphi \underset{X}{\sim} \psi) \to (\varphi_1 \underset{X}{\sim} \psi_1)$ есть схема а-общезначимых тогда и только тогда, к о г д а ф о р м у л ы $(\varphi \underset{X}{\simeq} \psi) \to (\varphi_1 \underset{X}{\overset{\bullet}{\simeq}} \psi_1)$ и $(\neg\varphi \underset{X}{\simeq} \neg\psi) \to (\neg\varphi_1 \underset{X}{\overset{\bullet}{\simeq}} \neg\psi_1)$ е с т ь с х е м ы i-о б щ е з н а ч и м ы х.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. <u>Необходимость</u>. Допустим, $(\varphi \underset{X}{\simeq} \psi) \to (\varphi_1 \underset{X}{\simeq} \psi_1)$ – схема a-общезначимых. Тогда по теореме I формула $(\varphi_1 \underset{X}{\simeq} \psi_1)$ выводима по правилам DR^a из чисто предваренной формулы $(\varphi \underset{X}{\simeq} \psi)$. Среди целого ряда систем правил вывода, эквивалентных системе DR^a, существует и система

$$DR^i = DR^a \cup \left\{ \frac{\varphi \,\&\, \neg\chi \underset{X}{\overset{\bullet}{\simeq}} \psi \,\&\, \neg\chi}{\varphi \,\&\, \neg\chi \underset{X}{\overset{\bullet}{\simeq}} \psi \vee \chi} \right\} .$$

Следовательно, по выводу формулы $\varphi_1 \underset{X}{\simeq} \psi_1$ из $\varphi \underset{X}{\simeq} \psi$ по правилам DR^a можно вывести и формулу $\varphi_1 \underset{X}{\overset{\bullet}{\simeq}} \psi_1$ из $\varphi \underset{X}{\overset{\bullet}{\simeq}} \psi$ по правилам DR^i.

Далее рассмотрим чисто предваренные формулы $\varphi \underset{X}{\simeq} \psi$ и $\neg\varphi \underset{X}{\simeq} \neg\psi$. Нетрудно заметить, что если $r(\varphi,\psi) = \langle A, B, C, D\rangle$, то $r(\neg\varphi, \neg\psi) = \langle D, C, B, A\rangle$. Следовательно, по выводу формулы $\varphi_1 \underset{X}{\simeq} \psi_1$ из формулы $\varphi \underset{X}{\simeq} \psi$ по правилам DR^a параллельно можно построить вывод формулы $\neg\varphi_1 \underset{X}{\simeq} \neg\psi_1$ из $\neg\varphi \underset{X}{\simeq} \neg\psi$, заменив при этом каждое применение правила из DR^a в исходном выводе на применение правила из DR^a, согласно следующему перечню замен:

правило $\langle \overparen{A}, B, C, D \rangle$ заменится на правило $\langle A\; B\; \overparen{C\; D} \rangle$,

правило $\langle \overparen{A, B}, C, D \rangle$ заменится на правило $\langle A, \overparen{B, C, D} \rangle$,

правило $\langle A, \overparen{B, C}, D \rangle$ заменится на правило $\langle \overparen{A, B, C}, D \rangle$,

правило $\langle A, B, \overparen{C, D} \rangle$ заменится на правило $\langle \overparen{A}, B, C, D \rangle$.

<u>Достаточность</u>. Пусть $(\varphi \underset{X}{\overset{\bullet}{\simeq}} \psi) \to (\varphi_1 \underset{X}{\overset{\bullet}{\simeq}} \psi_1)$ и $(\neg\varphi \underset{X}{\overset{\bullet}{\simeq}} \neg\psi) \to (\neg\varphi_1 \underset{X}{\overset{\bullet}{\simeq}} \neg\psi_1)$ – схемы i-общезначимых. По теореме I существуют выводы формулы $\varphi_1 \underset{X}{\overset{\bullet}{\simeq}} \psi_1$ из чисто предваренной формулы $\varphi \underset{X}{\overset{\bullet}{\simeq}} \psi$ и формулы $\neg\varphi_1 \underset{X}{\overset{\bullet}{\simeq}} \neg\psi_1$ из $\neg\varphi \overset{\bullet}{\sim} \neg\psi$ по правилам DR^i. Покажем, что среди всех таких выводов существуют выводы, не содержащие применения правил из $DR^i \setminus DR^a$. Обозначим через $r(\varphi,\psi) = \langle A, B, C, D \rangle$, тогда $r(\neg\varphi, \neg\psi) = \langle D, C, B, A \rangle$, $r(\varphi_1, \psi_1) = \langle A_1, B_1, C_1, D_1 \rangle$ и $r(\neg\varphi_1, \neg\psi_1) = \langle D_1, C_1, B_1, A_1 \rangle$.

В силу леммы I и нашего предположения о том, что $(\varphi \underset{X}{\overset{\bullet}{\simeq}} \psi) \to (\varphi_1 \underset{X}{\overset{\bullet}{\simeq}} \psi_1)$ и $(\neg\varphi \underset{X}{\overset{\bullet}{\simeq}} \neg\psi) \to (\neg\varphi_1 \underset{X}{\overset{\bullet}{\simeq}} \neg\psi_1)$ – схемы i-общезначимых, имеем следующие соотношения:

$r(\varphi_1,\psi_1)$ i-лучше $r(\varphi,\psi)$, т.е. $A \subseteq A_1$, $B_1 \subseteq B$;

$r(\neg\varphi_1,\neg\psi_1)$ i-лучше $r(\neg\varphi,\neg\psi)$, т.е. $D \subseteq D_1$, $C_1 \subseteq C$.

А это означает, что четверка $r(\varphi_1,\psi_1)$ a-лучше четверки $r(\varphi,\psi)$. Тогда, по лемме I и теореме I, $(\varphi \underset{x}{\sim} \psi) \to (\varphi_1 \underset{x}{\sim} \psi_1)$ – схема a-общезначимых.

Таким образом, явно определены системы правил вывода DR^a и DR^i, корректные в каждом исчислении I^a и I^i соответственно, в которых есть хотя бы один a-квантор и i-квантор. Заметим, что если язык исчисления содержит a-кванторы и i-кванторы, то для нахождения всех схем a-общезначимых и схем i-общезначимых, достаточно взять систему DR^i, ибо она включает систему DR^a.

Наконец, отметим, что классы a-кванторов и i-кванторов, помимо указанных ранее интересных конкретных кванторов, содержат целый ряд конкретных статистических кванторов, а именно: I) классу a-кванторов принадлежат $\sim_\alpha$ – квантор Фишера, $\sim^2_\alpha$ – χ_2-квантор на уровне α; 2) классу i-кванторов принадлежат $\underset{p,\alpha}{\Rightarrow}?$ – квантор подозрительной p-импликации, $\underset{p,\alpha}{\Rightarrow}!$ – квантор вероятной p-импликации [2].

§2. Несколько примеров исчислений с конкретными кванторами

Приступим к рассмотрению исчислений с конкретными кванторами. Возьмем классическое исчисление I предикатов первого порядка с языком L, в котором, кроме кванторов $\forall$ и $\exists$, есть еще $\underset{x}{\Rightarrow}$ – квантор импликации Черча. Сигнатура языка L содержит n унарных предикатных символов. Формулы в языке L определяются обычным способом. Напомним лишь определение формулы для $\underset{x}{\Rightarrow}$-квантора: если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – формулы в L, то $\varphi(x) \underset{x}{\Rightarrow} \psi(x)$ есть формула L.

Семантика $\underset{x}{\Rightarrow}$-квантора определялась ранее.

Очевидно, в исчислении I с введением нового квантора появятся и новые логически эквивалентные формулы в дополнение тем, которые были в классическом исчислении.

Приведем некоторые из новых эквивалентностей:

$$\forall x(\varphi(x) \to \psi(x)) \equiv (\varphi(x) \underset{x}{\Rightarrow} \psi(x)) \equiv \neg\exists x\neg(\varphi(x) \to \psi(x)) \equiv$$

$$\equiv (1 \underset{x}{\Rightarrow} \neg\varphi(x) \vee \psi(x)) \equiv (\varphi(x) \& \neg\psi(x) \underset{x}{\Rightarrow} 0) \equiv$$

$$\equiv (\varphi(x) \& \neg\psi(x) \underset{x}{\Rightarrow} \neg\varphi(x) \vee \psi(x));$$

$$\forall x\ \varphi(x) \equiv (1 \underset{x}{\Rightarrow} \varphi(x)); \quad \exists x\ \varphi(x) \equiv \neg(\varphi(x) \underset{x}{\Rightarrow} 0).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Квантор является определимым в исчислении I , если для всякой формулы Φ, содержащей этот квантор, можно найти логически эквивалентную формулу, не содержащую данный квантор.

Нетрудно заметить, что в рассматриваемом исчислении I каждые два квантора определимы через оставшийся один квантор. Следовательно, достаточно рассматривать исчисление с одним из трех кванторов, чтобы иметь исчисление, равное по выразительной силе вышеописанному обогащенному классическому исчислению предикатов.

Итак, рассмотрим исчисление $I^{\underset{x}{\Rightarrow}}$ с $\underset{x}{\Rightarrow}$-квантором. Из определения $\underset{x}{\Rightarrow}$-квантора следует, что он принадлежит классу i-кванторов. Следовательно, система правил вывода $DR^{\underset{x}{\Rightarrow}}$ исчисления $I^{\underset{x}{\Rightarrow}}$ содержит систему DR^{i}. Кроме правил DR^{i}, в состав $DR^{\underset{x}{\Rightarrow}}$ входят следующие правила вывода:

$$\frac{\varphi \vee \chi \underset{x}{\Rightarrow} \psi \vee \chi}{\varphi \& \neg\chi \underset{x}{\Rightarrow} \psi \vee \chi}$$ соответствует переходу $\langle A, B, C, D \rangle$,

$$\frac{\varphi \vee \chi \underset{x}{\Rightarrow} \psi \vee \chi}{\varphi \& \neg\chi \underset{x}{\Rightarrow} \psi \& \neg\chi}$$ соответствует переходу $\langle A, B, C, D \rangle$,

$$\frac{\varphi \underset{x}{\Rightarrow} \psi}{\neg(1 \underset{x}{\Rightarrow} \varphi \& \neg\psi)}; \quad \frac{\varphi_1 \underset{x}{\Rightarrow} \psi_1,\ \varphi_2 \underset{x}{\Rightarrow} \psi_2}{(\varphi_1 \& \neg\psi_1 \vee \varphi_2 \& \neg\psi_2) \underset{x}{\Rightarrow} \neg(\varphi_1 \& \neg\psi_1 \vee \varphi_2 \& \neg\psi_2)}.$$

Корректность правил вывода доказывается по прежней схеме. Например, для правила $\dfrac{\varphi \underset{x}{\Rightarrow} \psi}{\neg(1 \underset{x}{\Rightarrow} \varphi \& \neg\psi)}$ . ..

Рассмотрим произвольную непустую модель M из $\mathfrak{M}$. Пусть $r(\varphi,\psi) = \langle A, B, C, D \rangle$, тогда $r(1, \varphi \& \neg\psi) = \langle B, A \cup C \cup D, \emptyset, \emptyset \rangle$. Допустим, что чисто предваренная формула $\varphi \underset{x}{\Rightarrow} \psi$ истинна в M . Следовательно, все n-карты из множества B отобразились в модели M в число 0. Тогда как n-карты из $A \cup C \cup D$ в силу того, что $M \neq \emptyset$, отобразились в число, не равное 0. Но это означает, что формула $1 \underset{x}{\Rightarrow} \varphi \& \neg\phi$ ложна в M, т.е. $\neg(1 \underset{x}{\Rightarrow} \varphi \& \neg\phi)$ истинна. Для того, чтобы получить независимую систему правил вывода $DR^{\overset{\Rightarrow}{x}}$, необходимо исключить из состава $DR^{\overset{\Rightarrow}{x}}$ одно из приведенных первых двух правил вывода. К примеру, правило $\dfrac{\varphi \vee \chi \underset{x}{\Rightarrow} \phi \vee \chi}{\varphi \& \neg\chi \underset{x}{\Rightarrow} \phi \vee \chi}$.

В исчислении $I^{\overset{\Rightarrow}{x}}$ существуют аксиомы простейшего вида чисто предваренной формулы: схема аксиом $\varphi \& \chi \underset{x}{\Rightarrow} \phi \vee \varphi$.

Обозначим через $DR(I^{\overset{\Rightarrow}{x}})$ систему корректных правил вывода, объединяющую систему $DR^{\overset{\Rightarrow}{x}}$, правила введения и удаления логических связок.

Рассмотрим исчисление I, язык которого содержит n унарных предикатов, связки $\&, \vee, \rightarrow, \neg$, кванторы большинства Wx и аддитивной ассоциации $\overset{+}{\underset{x}{\sim}}$.

Семантика $\overset{+}{\underset{x}{\sim}}$-квантора вводилась ранее.

Определим семантику Wx-квантора: пусть модель M из $\mathfrak{M}$, e интерпретация свободных переменных, тогда

$$\|Wx\,\varphi(x)\|_M[e] = 1 \Leftrightarrow m_1 > n_0,$$

где m_i – мощность $\{m \mid m \in |M|, \|\varphi(m)\|_M[e]=i\}$, $i \in \{0,1\}$

В исчислении I истинны следующие эквивалентности:

$$Wx\ \varphi(x) \equiv 1 \overset{+}{\underset{x}{\sim}} \varphi(x);$$

$$\varphi(x) \overset{+}{\underset{x}{\sim}} \phi(x) \equiv 1 \overset{+}{\underset{x}{\sim}} (\varphi \& \phi \vee \neg\varphi \& \neg\phi).$$

Этот список можно продолжить, но достаточно первой эквивалентности, чтобы утверждать об определимости кванторов Wx и $\overset{+}{\underset{x}{\sim}}$ друг через друга. Следовательно, не уменьшая выразительности исчисления I, можно рассматривать исчисление $I^{\overset{+}{\underset{x}{\sim}}}$ с одним $\overset{+}{\underset{x}{\sim}}$-квантором.

Так как $\overset{+}{\underset{x}{\sim}}$-квантор принадлежит классу а-кванторов, то все правила из DR^a входят в состав $DR^{\overset{+}{\underset{x}{\sim}}}$-правил для $\overset{+}{\underset{x}{\sim}}$-квантора исчисления $I^{\overset{+}{\underset{x}{\sim}}}$. Кроме системы DR^a, систему $DR^{\overset{+}{\underset{x}{\sim}}}$ составляют следующие правила вывода:

1) $\dfrac{\varphi \vee \chi \overset{+}{\underset{x}{\sim}} \psi \vee \chi}{\varphi \,\&\, \neg\chi \overset{+}{\underset{x}{\sim}} \psi \,\&\, \neg\chi}$ соответствует переходу $\langle A, B, C, D \rangle$;

2) $\dfrac{\varphi \,\&\, \neg\chi \overset{+}{\underset{x}{\sim}} \psi \,\&\, \neg\chi}{\varphi \vee \chi \overset{+}{\underset{x}{\sim}} \psi \vee \chi}$ соответствует переходу $\langle A, B, C, D \rangle$;

3) $\dfrac{\varphi \vee \chi \overset{+}{\underset{x}{\sim}} \psi \,\&\, \neg\chi}{\varphi \,\&\, \neg\chi \overset{+}{\underset{x}{\sim}} \psi \vee \chi}$ соответствует переходу $\langle A, B, C, D \rangle$;

4) $\dfrac{\varphi \,\&\, \neg\chi \overset{+}{\underset{x}{\sim}} \psi \vee \chi}{\varphi \vee \chi \overset{+}{\underset{x}{\sim}} \psi \,\&\, \neg\chi}$ соответствует переходу $\langle A, B, C, D \rangle$.

Эти правила вместе с правилами DR^a образуют зависимую систему (проверка осуществляется с помощью построения графа, см. лемму 2). Можно найти целый ряд независимых систем правил вывода, эквивалентных системе $DR^a \cup \{1, 2, 3, 4\}$. Приведем одну из них:

$\dfrac{\varphi \vee \chi \overset{+}{\underset{x}{\sim}} \psi \,\&\, \neg\chi}{\varphi \overset{+}{\underset{x}{\sim}} \psi}$ соответствует $\langle A, B, C, D \rangle$;

$\dfrac{\varphi \,\&\, \neg\chi \overset{+}{\underset{x}{\sim}} \varphi \vee \chi}{\varphi \overset{+}{\underset{x}{\sim}} \psi}$ соответствует $\langle A, B, C, D \rangle$;

$$\frac{\varphi \overset{\dot\sim}{\underset{x}{+}} \psi}{\varphi \& \neg\chi \overset{\dot\sim}{\underset{x}{+}} \psi \& \neg\chi}$$ соответствует $\langle A, B, C, D \rangle$;

$$\frac{\varphi \overset{\dot\sim}{\underset{x}{+}} \psi}{\varphi \vee \chi \overset{\dot\sim}{\underset{x}{+}} \psi \vee \chi}$$ соответствует $\langle A, B, C, D \rangle$.

Заметим, что в приведенной выше системе правил вывода производными, или допустимыми [4], являются следующие правила вывода из [2]:

$$\frac{\varphi \overset{\dot\sim}{\underset{x}{+}} \psi}{\psi \overset{\dot\sim}{\underset{x}{+}} \varphi}$$ соответствует переходу в-карт $\langle A, B, C, D \rangle$ (B и C меняются местами),

$$\frac{\varphi \overset{\dot\sim}{\underset{x}{+}} \psi}{\neg\psi \overset{\dot\sim}{\underset{x}{+}} \neg\varphi}$$ соответствует переходу $\langle A, B, C, D \rangle$.

Введем в состав системы $DR^{\overset{\dot\sim}{x}}$ следующее правило вывода

$$\frac{\varphi \overset{\dot\sim}{\underset{x}{+}} \psi}{\neg(\neg\varphi \overset{\dot\sim}{\underset{x}{+}} \psi)}$$ или эквивалентное правило $$\frac{\varphi \overset{\dot\sim}{\underset{x}{+}} \psi}{\neg(\varphi \overset{\dot\sim}{\underset{x}{+}} \neg\psi)}.$$

Системой аксиом вида чисто предваренных формул $I^{\overset{\dot\sim}{x}}$ являются аксиомы $\varphi \overset{\dot\sim}{\underset{x}{+}} \varphi$.

Обозначим через $DR(I^{\overset{\dot\sim}{x}})$ систему правил вывода $DR^{\overset{\dot\sim}{x}}$, объединенную с правилами введения и удаления логических связок.

Рассмотрим исчисление $I^{\overset{\dot\sim}{x}}$ с одним $\overset{\dot\sim}{x}$-квантором простой ассоциации. Ранее приводилась семантика $\overset{\dot\sim}{x}$-квантора. Непосредственно из его определения следует принадлежность $\underset{x}{\dot{\simeq}}$-квантора классу а-кванторов. Следовательно, правилами исчисления $I^{\underset{x}{\dot{\simeq}}}$ являются и правила DR^{a}.

Очевидно, с конкретизацией а-квантора появятся и новые конкретные правила вывода, а именно:

1) $\dfrac{\varphi \vee \chi \underset{x}{\dot{\simeq}} (\varphi \vee \psi) \& \neg\chi}{\varphi \& \neg\chi \underset{x}{\dot{\simeq}} \varphi \vee \psi \vee \chi}$ соответствует $\langle \overset{\emptyset}{A}, \overset{\frown}{B, C}, D \rangle$ (все множество B переходит в C),

2) $\dfrac{(\varphi \vee \psi) \& \neg\chi \underset{x}{\dot{\simeq}} \varphi \vee \chi}{\varphi \vee \psi \vee \chi \underset{x}{\dot{\simeq}} \varphi \& \neg\chi}$ соответствует $\langle A, \overset{\frown}{B, C}, \overset{\emptyset}{D} \rangle$;

3) $\dfrac{\varphi \underset{x}{\dot{\simeq}} \psi}{\psi \underset{x}{\dot{\simeq}} \varphi}$ соответствует $\langle A, \overset{\frown}{B, C}, D \rangle$;

4) $\dfrac{\varphi \underset{x}{\dot{\simeq}} \psi}{\neg\psi \underset{x}{\dot{\simeq}} \neg\varphi}$ соответствует $\langle \overset{\frown}{A, B, C, D} \rangle$.

Полученная система $DR^{a} \cup \{1, 2, 3, 4\}$ зависима, так как множество следствий, извлеченных с помощью правила I (2), можно получить с помощью правил 2 и 4 (I и 4). Следовательно, необходимо оставить три правила вывода из четырех, например $\{2, 3, 4\}$.

В исчислении $I^{\underset{x}{\dot{\simeq}}}$ корректным является следующее правило:

$$\frac{\varphi \underset{x}{\dot{\simeq}} \psi}{\neg(\neg\varphi \underset{x}{\dot{\simeq}} \psi)} \quad \text{или эквивалентное правило} \quad \frac{\varphi \underset{x}{\dot{\simeq}} \psi}{\neg(\varphi \underset{x}{\dot{\simeq}} \neg\psi)}.$$

Обозначим систему $DR^{a} \cup \{2, 3, 4\} \cup \dfrac{\varphi \underset{x}{\dot{\simeq}} \psi}{\neg(\neg\varphi \underset{x}{\dot{\simeq}} \psi)}$ через $DR^{\underset{x}{\dot{\simeq}}}$.

Заметим, что простейших аксиом вида положительных чисто предваренных формул в $I^{\underset{x}{\dot{\simeq}}}$ не существует.

Схема аксиом в исчислении $I^{\dot{\tilde{x}}}$ одна, а именно $\neg(\varphi \vee \psi \underset{x}{\dot{\sim}} \neg\psi \vee \chi)$ или эквивалентная ей $\neg(\varphi \,\&\, \psi \underset{x}{\dot{\sim}} \neg\psi \& \chi)$. Введем в исчислений $I^{\dot{\tilde{x}}}$ правила введения и удаления связок. Полученную систему всех правил вывода исчисления $I^{\dot{\tilde{x}}}$ обозначим $DR(I^{\dot{\tilde{x}}})$.

Приступим к рассмотрению интересного исчисления $I^{\overrightarrow{p,a}}$ с одним i-квантором обоснованной p-импликации, где $p \in [0,1]$, p - рациональное число; $a \in N$, N – натуральный ряд. Так как $_{\overrightarrow{p,a}}$-квантор принадлежит классу i-кванторов, то все правила вывода из системы DR^{i} будут корректными и в исчислении $I^{\overrightarrow{p,a}}$ с любыми фиксированными p и a.

Введем еще одно правило вывода:

$$\frac{\varphi_1 \underset{p,a}{\Rightarrow} \psi_1;\ \varphi_2 \& \neg\varphi_1 \& \neg\psi_1 \underset{p,a}{\Rightarrow} \psi_2 \& \neg\varphi_1 \& \neg\psi_1}{\varphi_1 \vee (\varphi_2 \& \neg\psi_1) \underset{p,a}{\Rightarrow} \psi_1 \vee (\neg\varphi_1 \& \psi_2)}. \qquad (2)$$

Это правило позволяет получать сложные формулы из двух формул $\varphi_1 \underset{p,a}{\Rightarrow} \psi_1$ и $\psi_2 \underset{p,a}{\Rightarrow} \psi_2$, находящихся в соотношении $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, где $r(\varphi_1,\psi_1) = \langle A_1, B_1, C_1, D_1 \rangle$ и $r(\varphi_2,\psi_2) = \langle A_2, B_2, C_2, D_2 \rangle$.

Для исчисления $I^{\overrightarrow{p,a}}$ с $p \in (\frac{1}{2}, 1]$ будет корректным правило $\dfrac{\varphi \underset{p,a}{\Rightarrow} \psi}{\neg(\varphi \underset{p,a}{\Rightarrow} \neg\psi)}$.

Обозначим множество $DR^{i} \cup \{1\}$ через $DR^{\overrightarrow{p,a}}(p \in (0, \frac{1}{2}])$, множество $DR^{i} \cup \{1,2\}$ через $DR^{\overrightarrow{p,a}}(p \in (\frac{1}{2}, 1])$. Введем в исчисления $I^{\overrightarrow{p,a}}(p > \frac{1}{2})$, $I^{\overrightarrow{p,a}}(p \in (0, \frac{1}{2}])$ правила введения и удаления логических связок, и полученные системы вместе с правилами $DR^{\overrightarrow{p,a}}(p \in (0, \frac{1}{2}])$ и $DR^{\overrightarrow{p,a}}(p > \frac{1}{2})$ обозначим соответственно через $DR(I^{\overrightarrow{p,a}}, p \in (0, \frac{1}{2}])$ и $DR(I^{\overrightarrow{p,a}}, p > \frac{1}{2})$.

ТЕОРЕМА 3. I. Пусть L-язык сигнатуры $\sigma = \langle P^1_1, \ldots, P^1_n \rangle$ с одним $\overset{\ell}{x}$-квантором простой ассоциации, Φ-предложение в языке L. В этом случае Φ-общезначимая формула тогда и только тогда, когда Φ доказуема в исчислении $I^{\overset{\ell}{x}}$ по правилам $DR(I^{\overset{\ell}{x}})$, т.е. когда Φ-тавтология исчисления $I^{\overset{\ell}{x}}$.

2. Допустим, L-язык той же сигнатуры σ с одним $\overset{\pm}{x}$-квантором аддитивной ассоциации. Пусть Φ-формула в языке L. В этом случае Φ есть общезначимая формула тогда и только тогда, когда Φ выводима из пустого множества посылок по правилам $DR(I^{\overset{\pm}{x}})$.

3. Пусть L-язык сигнатуры $\sigma = \langle P^1_1, \ldots$ $\ldots, P^1_n \rangle$ с одним $\overset{\Rightarrow}{x}$-квантором импликации Черча, Φ-предложение в языке L. Формула Φ общезначима тогда и только тогда, когда Φ доказуема в исчислении $I^{\overset{\Rightarrow}{x}}$ по правилам $DR(I^{\overset{\Rightarrow}{x}})$.

4. Допустим, L (L')-язык сигнатуры $\sigma = \langle P^1_1, \ldots, P^1_n \rangle$ с одни $\overset{\Rightarrow}{p,a}$-квантором, $p \in (0, \frac{1}{2}]$ ($\overset{\Rightarrow}{p,a}$-квантором, $p \in (\frac{1}{2}, 1]$). Пусть Φ-предложенние в языке L (L'). Формула Φ является общезначимой тогда и только тогда, когда Φ доказуема в исчислении $I^{\overset{\Rightarrow}{p,a}}(p \in (0, \frac{1}{2}])$ $[I^{\overset{\Rightarrow}{p,a}}, p > \frac{1}{2}]$ по правилам $DR(I^{\overset{\Rightarrow}{p,a}}, p \in (0, \frac{1}{2}])$ $[DR(I^{\overset{\Rightarrow}{p,a}}, p > \frac{1}{2})]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО данной теоремы аналогично доказательству теоремы 2 с помощью леммы 3. К примеру, рассмотрим доказательство п.3.

Достаточность. Так как каждое правило вывода из $DR(I^{\vec{X}})$ корректно, то, очевидно, доказанная в исчислении $I^{\vec{X}}$ формула будет общезначимой.

Необходимость. Допустим, Φ – общезначимая формула исчисления $I^{\vec{X}}$. Разложим Φ в конъюнкцию элементарных дизъюнкций чисто предваренных формул и их отрицаний, т.е. $\Phi = \mathop{\&}\limits_{i=1}^{k} D_i$. Каждая дизъюнкция D_i должна быть общезначимой формулой.

Проверка дизъюнкции на общезначимость производится по следующей схеме.

Шаг I. Рассмотрим четверки $r(\varphi_j, \psi_j) = \langle A_j, B_j, C_j, D_j \rangle$ всех положительных чисто предваренных формул $\varphi_j \underset{X}{\Rightarrow} \psi_j$, входящих в D_i. Если среди четверок $r(\varphi_j, \psi_j)$ оказалась четверка вида $\langle A_j, \emptyset, C_j, D_j \rangle$, то D_i общезначима, иначе шаг 2.

Шаг 2. Рассмотрим четверки $r(\varphi_s, \psi_s) = \langle A_s, B_s, B_s, D_s \rangle$ всех отрицательных чисто предваренных формул $\neg(\varphi_s \underset{X}{\Rightarrow} \psi_s)$ из D_i. Если нашлась пара четверок $\langle A_{s_1}, B_{s_1}, C_{s_1}, D_{s_1} \rangle$ и $\langle A_{s_2}, B_{s_2}, C_{s_2}, D_{s_2} \rangle$ таких, что $B_{s_1} = A_{s_2} \cup C_{s_2} \cup D_{s_2}$, то D_i общезначима, иначе шаг 3.

Шаг 3. Если среди четверок положительных и отрицательных чисто предваренных формул нашлась такая пара $\langle A_j, B_j, C_j, D_j \rangle$ и $\langle A_s, B_s, C_s, D_s \rangle$ соответственно формулы $\varphi_j \underset{X}{\Rightarrow} \psi_j$ и $\neg(\varphi_s \underset{X}{\Rightarrow} \psi_s)$ из D_i, что $B_j \subseteq B_s$, то D_i – общезначимая формула, иначе шаг 4.

Шаг 4. Если среди четверок отрицательных чисто предваренных формул нашлось такое множество $\{\langle A_{s_1}, B_{s_1}, C_{s_1}, D_{s_1} \rangle, \ldots, \langle A_{s_l}, B_{s_l}, C_{s_l}, D_{s_l} \rangle\}$, что $A_1 \cap A_{s_2} = \emptyset, \ldots, A_{s_{l-1}} \cap A_{s_l} = \emptyset$, а среди четверок положительных чисто предваренных формул нашлась четверка $\langle A_j, B_j, C_j, D_j \rangle$ такая, что $\bigcup\limits_{i=1}^{l} A_{s_i} \subseteq A_j$, $B_j \subseteq \{\bigcup\limits_{i=1}^{l} B_{s_i} \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{l} A_{s_i}\}$, то D_i общезначима, иначе D_i необщезначима.

Нетрудно заметить, что шаг I выявляет наличие аксиом в D_i, а шаг 2 находит такие пары чисто предваренных формул, что $\dfrac{\varphi \underset{X}{\Rightarrow} \psi}{\neg(\varphi \underset{X}{\Rightarrow} \neg\psi)}$.

Тогда, очевидно, вывод

$$
\left]\quad \cfrac{\cfrac{\varphi \underset{\vec{X}}{\Rightarrow} \psi}{\neg(\varphi \to \neg\psi)}}{(\varphi \underset{\vec{X}}{\Rightarrow} \psi) \to \neg(\varphi \underset{\vec{X}}{\Rightarrow} \neg\psi)}\right. \quad (\to \text{в})
$$

доказывает общезначимость D_i, в котором есть импликация $(\varphi \underset{\vec{X}}{\Rightarrow} \psi) \to$ $\to \neg(\varphi \underset{\vec{X}}{\Rightarrow} \neg\psi)$.

Шаг 3 находит пары чисто предваренных формул $\neg(\varphi_s \underset{\vec{X}}{\Rightarrow} \psi_s)$ и $(\varphi_j \underset{X}{} \psi_j)$ таких, что из чисто предваренной формулы $\varphi_s \underset{\vec{X}}{\Rightarrow} \psi_s$ выводима формула $(\varphi_j \underset{\vec{X}}{\Rightarrow} \psi_j)$ по правилам $DR^{\vec{X}}$. Тогда вывод

$$
\left]\quad \begin{array}{c} \varphi_s \underset{\vec{X}}{\Rightarrow} \psi_s \\ \hline \vdots \\ \hline \varphi_j \underset{\vec{X}}{\Rightarrow} \psi_j \\ \hline (\varphi_s \underset{\vec{X}}{\Rightarrow} \psi_s) \to (\varphi_j \underset{\vec{X}}{\Rightarrow} \psi_j) \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} (DR^{\vec{X}}) \\ \\ (\to \text{в}) \end{array}
$$

доказывает общезначимость дизъюнкции D_i, содержащей чисто пред - варенные формулы $\neg(\varphi_s \underset{\vec{X}}{\Rightarrow} \psi_s)$ и $(\varphi_j \underset{\vec{X}}{\Rightarrow} \psi_j)$.

Шаг 4 выявляет наличие группы чисто предваренных формул $\neg(\varphi_{s_1} \underset{\vec{X}}{\Rightarrow} \psi_{s_1}),\ldots,\neg(\varphi_{s_l} \underset{\vec{X}}{\Rightarrow} \psi_{s_l})$ и $(\varphi_j \underset{\vec{X}}{\Rightarrow} \psi_j)$ таких, что из формул $(\varphi_{s_1} \underset{\vec{X}}{\Rightarrow} \psi_{s_1}),\ldots,(\varphi_{s_l} \underset{\vec{X}}{\Rightarrow} \psi_{s_l})$ выводима формула $(\varphi_j \underset{\vec{X}}{\Rightarrow} \psi_j)$ по правилу (2) и $DR^{\vec{X}}$. Тогда вывод

$$
\left]\quad \begin{array}{c}
(\varphi_{s_1} \underset{\vec{X}}{\Rightarrow} \psi_{s_1}) \& \ldots \& (\varphi_{s_l} \underset{\vec{X}}{\Rightarrow} \psi_{s_l}) \\ \hline
\varphi_{s_1} \underset{\vec{X}}{\Rightarrow} \psi_{s_1};\ \varphi_{s_2} \underset{\vec{X}}{\Rightarrow} \psi_{s_2} \\ \hline
\varphi_{s_1} \vee (\varphi_{s_2} \& \neg\varphi_{s_1}) \underset{\vec{X}}{\Rightarrow} \psi_{s_1} \vee (\neg\varphi_{s_1} \& \psi_{s_2});\ \varphi_{s_3} \underset{\vec{X}}{\Rightarrow} \psi_{s_3} \\ \hline
\vdots \\ \hline
\varphi_{s_1} \vee (\varphi_{s_2} \& \neg\varphi_{s_1}) \vee \ldots \vee (\varphi_{s_l} \& \neg\varphi_{s_{l-1}}) \ldots) \underset{\vec{X}}{\Rightarrow} (\psi_{s_1} \vee \ldots \vee (\neg\varphi_{s_{l-1}} \& \psi_{s_l}) \ldots) \\ \hline
\vdots \\ \hline
\end{array}\right. \quad \begin{array}{l} (\&\text{у}) \\ (1) \\ (1) \\ (1) \\ (DR \underset{\vec{X}}{\Rightarrow}) \end{array}
$$

$$\frac{\varphi_j \underset{x}{\rightrightarrows} \psi_j}{(\varphi_{s_1} \underset{x}{\rightrightarrows} \psi_{s_1})\&\ldots\&(\varphi_{s_l} \underset{x}{\rightrightarrows} \psi_{s_l}) \rightarrow (\varphi_j \underset{x}{\rightrightarrows} \psi_j)} \qquad (\rightarrow\text{в})$$

доказывает общезначимость D_1.

Иначе D_1 не может быть общезначимой, так как оставшиеся соотношения между четверками чисто предваренных формул, входящих в D_1, приводят к не всюду истинным формулам (см.лемму 3).

Остальные пункты доказываются аналогично.

СЛЕДСТВИЕ. Каждое из приведенных исчислений $I^{\tilde{x}}, I^{\dot{x}}, I^{\vec{x}}, I^{p,\vec{a}}(p \in (0,\frac{1}{2}]), I^{p,\vec{a}}(p > \frac{1}{2})$ является разрешимым.

В заключение отметим, что одним из возможных приложений вышерассмотренных исчислений является построение автоматических методов поиска эмпирических закономерностей с использованием логических правил вывода.

Автор благодарит Д.И.Свириденко и Е.Е.Витяева за ценные советы и конструктивные замечания.

Литература

1. ЗАГОРУЙКО Н.Г., САМОХВАЛОВ К.Ф., СВИРИДЕНКО Д.И. Логика эмпирических исследований. - Новосибирск, 1978. - 66 с.

2. ГАЕК П., ГАВРАНЕК Т. Автоматическое образование гипотез. -М.: Наука, 1984. - 277 с.

3. ВИТЯЕВ Е.Е. Метод обнаружения закономерностей и метод предсказания. -В кн.: Эмпирическое предсказание и распознавание образов (Вычислительные системы, вып. 67). Новосибирск, 1976, с. 54-68.

4. ЕРШОВ Ю.Л., ПАЛЮТИН Е.А. Математическая логика. -М.: Наука, 1979. - 320 с.

5. СМИРНОВ В.А. Формальный вывод и логические исчисления. -М.: Наука, 1972. - 270 с.

Поступила в ред.-изд.отд.
22 января 1986 года