МАШИННЫЙ АНАЛИЗ СЛОЖНЫХ СТРУКТУР
(Вычислительные системы)
1986 год Выпуск 118

УДК 513.811

ДВУМЕРНЫЕ И ТРЕХМЕРНЫЕ ГЕОМЕТРИИ В ТЕОРИИ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР

В.Х.Лев

В исследованиях по основаниям физики Ю.И.Кулаков [1,2] высказал предположение о существовании нового типа симметрии - ф е н о м е н о л о г и ч е с к о й симметрии. Новая симметрия выражает идею равноправия физических объектов некоторого рода по отношению к физическому закону, действующему для этих объектов. Изучение феноменологической симметрии составляет предмет теории физических структур.

Наглядно понятие физической структуры может быть описано следующим образом. Пусть даны произвольные множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ и функция $a: \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$, которая каждой паре элементов $\langle i, \alpha \rangle$, где $i \in \mathfrak{M}$, $\alpha \in \mathfrak{N}$, ставит в соответствие вещественное число $a(i\alpha) \in R$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что тройка $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, a \rangle$ образует бинарную физическую структуру ранга (r,s), если для любых элементов $i_1,\dots,i_r \in \mathfrak{M}$ и $\alpha_1,\dots,\alpha_s \in \mathfrak{N}$ выполняется равенство:

$$\Phi[a(i_1\alpha_1),\dots,a(i_1,\alpha_s),\dots,a(i_r\alpha_1),\dots,a(i_r,\alpha_s)] = 0, \qquad (1)$$

где $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ - топологические многообразия размерности соответственно $m = s-1$ и $n = r-1$, $a(i_p\alpha_q) = f(x_p^1,\dots,x_p^m,\xi_q^1,\dots,\xi_q^n)$ - достаточно гладкая функция, существенным образом зависящая от своих аргументов, и $\mathrm{grad}\ \Phi \neq 0$. Точные формулировки и доказательства приведены в работе [3]. Аналогично можно определить физическую структуру и на одном множестве.

Вопрос о существовании физических структур на двух множествах был полностью решен Г.Г.Михайличенко [4]. Там же он исследовал физическую структуру на одном множестве ранга $r = 4$. Для этой структуры был найден полный набор допустимых выражений функции

$a(ij) = f(x_i, y_i, x_j, y_j)$. Оказалось, что некоторые выражения $a(ij)$ совпадают с известными метриками двумерных геометрий (метрики пространств постоянной кривизны и различных плоскостей). Кроме того, были получены и неизвестные ранее двумерные метрики. Таким образом, геометрия двумерных метрических пространств дает нам пример бинарной физической структуры на одном множестве ранга $r = 4$. Естественно предположить, что геометрия n-мерных метрических пространств является конкретной интерпретацией бинарной структуры ранга $r=n+2$ на одном множестве.

Автором настоящей статьи был разработан общий параметрический метод для нахождения физических структур ранга $r>4$ на одном множестве. Этот метод, в частности, позволил значительно упростить нахождение структуры ранга $r=4$ и внести уточнения в вопрос о единственности решения. Для структуры ранга $r=4$ получено всего две формулы, которых охватывают все 10 геометрий, приведенных в работе [4]. Для структуры ранга $r=5$ впервые найдены все возможные трехмерные геометрии.

В общем случае показано, что каждой физической структуре соответствует система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, которая в некотором смысле имеет единственное решение. При исследовании этой системы и условий ее совместности возникают алгебры Ли соответствующей размерности.

Физическая структура ранга $r = 4$. Приведем краткую постановку задачи. Пусть даны произвольное множество $\mathfrak{M}$ с элементами i, $j, k, l, \ldots, \omega$ и функция a: $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$, которая ставит в соответствие каждой паре $\langle ij \rangle \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ вещественное число $a(ij) \in \mathbb{R}$. Потребуем, чтобы множество $\mathfrak{M}$ было топологическим многообразием размерности $n=2$. (Напомним, что $n = r-2$). Тогда функция $a(ij)$ будет иметь локальное представление: $a(ij) = f(x_i, y_i, x_j, y_j)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что пара $\langle \mathfrak{M}, a \rangle$ образует физическую структуру ранга $r = 4$, если для любых четырех точек i, j, $k, l \in \mathfrak{M}$ имеет место зависимость:

$$\Phi[a(ij), a(ik), a(il), a(jk), a(jl), a(kl)] = 0. \qquad (2)$$

Потребуем, чтобы функция $a(ij) = f(x_i, y_i, x_j, y_j)$ была достаточно гладкой и существенным образом зависела от своих аргументов. На функцию Φ наложим ограничение: $\operatorname{grad} \Phi \neq 0$.

Оказывается, что требование существования зависимости (2) однозначно определяет допустимый набор выражений $a(ij)$ и вид функции Φ. В настоящей работе мы будем искать явный вид функций $a(ij)$ и проследим, как возникают алгебры Ли в структуре ранга $r = 4$.

Продифференцируем соотношение (I) по всем восьми параметрам: $x_i, y_i, x_j, y_j, x_k, y_k, x_l, y_l$. Получим систему из восьми дифференциальных уравнений относительно шести частных производных функции Φ по каждому своему аргументу.

Матрица коэффициентов системы имеет вид:

$$\left\| \begin{matrix}
\frac{\partial f(ij)}{\partial x(i)} & \frac{\partial f(ik)}{\partial x(i)} & \frac{\partial f(il)}{\partial x(i)} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\partial f(ij)}{\partial y(i)} & \frac{\partial f(ik)}{\partial y(i)} & \frac{\partial f(il)}{\partial y(i)} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\partial f(ij)}{\partial x(j)} & 0 & 0 & \frac{\partial f(jk)}{\partial x(j)} & \frac{\partial f(jl)}{\partial x(j)} & 0 \\
\frac{\partial f(ij)}{\partial y(j)} & 0 & 0 & \frac{\partial f(jk)}{\partial y(j)} & \frac{\partial f(jl)}{\partial y(j)} & 0 \\
0 & \frac{\partial f(ik)}{\partial x(k)} & 0 & \frac{\partial f(jk)}{\partial x(k)} & 0 & \frac{\partial f(kl)}{\partial x(k)} \\
0 & \frac{\partial f(ik)}{\partial y(k)} & 0 & \frac{\partial f(jk)}{\partial y(k)} & 0 & \frac{\partial f(kl)}{\partial y(k)} \\
0 & 0 & \frac{\partial f(il)}{\partial x(l)} & 0 & \frac{\partial f(jl)}{\partial x(l)} & \frac{\partial f(kl)}{\partial x(l)} \\
0 & 0 & \frac{\partial f(il)}{\partial y(l)} & 0 & \frac{\partial f(jl)}{\partial y(l)} & \frac{\partial f(kl)}{\partial y(l)}
\end{matrix} \right\| \qquad (3)$$

Так как $\operatorname{grad} \Phi \neq 0$, то система имеет нетривиальное решение. Следовательно, любой определитель шестого порядка из матрицы (2) равен нулю. Рассмотрим определитель пятого порядка, отмеченный пунктиром. Можно показать, что он не равен нулю.

Из всех определителей шестого порядка, равных нулю, достаточно рассмотреть только те, которые окаймляют не равный нулю определитель пятого порядка. Таких определителей три. Выпишем их, разлагая по первому столбцу:

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial x(i)} A_1^{\text{Ч}}(ikl) \cdot A_0(jkl) + \frac{\partial f(ij)}{\partial y(i)} A_2^{\text{Ч}}(ikl) \cdot A_0(jkl) +$$

$$+\frac{\partial f(ij)}{\partial x(j)} A_1^{\mu}(jkl)\, A_0(ikl) + \frac{\partial f(ij)}{\partial y(j)} A_2^{\mu}(jkl)\, A_0(ikl) = 0, \qquad (4)$$

где $\mu = 1,2,3$; A_1^{μ}, A_2^{μ} - определители третьего порядка,

$$A_0(ikl) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f(ik)}{\partial x(i)} & \frac{\partial f(il)}{\partial x(i)} \\ \frac{\partial f(ik)}{\partial y(i)} & \frac{\partial f(il)}{\partial y(i)} \end{vmatrix}; \quad A_0(jkl) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f(jk)}{\partial x(j)} & \frac{\partial f(jl)}{\partial x(j)} \\ \frac{\partial f(jk)}{\partial y(j)} & \frac{\partial f(jl)}{\partial y(j)} \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

Можно показать, что ранг системы (4) равен трем. Разделим уравнения (4) на $A_0(ikl) \cdot A_0(jkl)$ и зафиксируем индексы k, l. Получим систему из трех независимых уравнений относительно функции $f(ij) = f(x_i, y_i, x_j, y_j)$:

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial x(i)} A_1^{\mu}(i) + \frac{\partial f(ij)}{\partial y(i)} A_2^{\mu}(i) + \frac{\partial f(ij)}{\partial x(j)} A_1^{\mu}(j) + \frac{\partial f(ij)}{\partial y(j)} A_2^{\mu}(j) = 0, \qquad (6)$$

где $\mu = 1,2,3$; $A_1^{\mu}(i) = A_1^{\mu}(x_i, y_i)$; $A_1^{\mu}(j) = A_1^{\mu}(x_j, y_j)$ и т.д.

Полученная система является полной. Действительно, находя уравнение совместности с помощью $[\mu, \nu]$-скобок для любой пары уравнений и присоединяя его к системе (4), получаем четыре уравнения относительно четырех неизвестных - частных производных функции $f(x_i, y_i, x_j, y_j)$ по своим аргументам, ни одна из которых не равна нулю. Определитель такой системы непременно равен нулю, т.е. уравнение совместности является линейной комбинацией уравнений (4), что и есть признак полноты системы (4). Уравнения совместности имеют вид, аналогичный уравнениям основной системы (4):

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial x(i)} B_1^{\nu}(i) + \frac{\partial f(ij)}{\partial y(i)} B_2^{\nu}(i) + \frac{\partial f(ij)}{\partial x(j)} B_1^{\nu}(j) + \frac{\partial f(ij)}{\partial y(j)} B_2^{\nu}(j) = 0, \qquad (7)$$

где $\nu = 1,2,3$; $B_1^{\nu}(i) = B_1^{\nu}(x_i, y_i)$; $B_1^{\nu}(j) = B_1^{\nu}(x_j, y_j)$ и т.д.

Как показано в [6], каждое уравнение совместности из (7) является линейной комбинацией с постоянными коэффициентами из уравнений основной системы (6). В операторной форме можно записать:

$$X_{\mu} f(ij) = 0 \text{ — система (6)}; \quad [X_{\mu}, X_{\nu}] f(ij) = 0 \text{ — система (7)};$$

$$[X_{\mu}, X_{\nu}] = c^{\varkappa}_{\mu\nu} X_{\varkappa}; \quad c^{\varkappa}_{\mu\nu} = -c^{\varkappa}_{\nu\mu};$$

$$[X_{\mu}, [X_{\nu}, X_{\varkappa}]] + [X_{\nu}, [X_{\varkappa}, X_{\mu}]] + [X_{\varkappa}, [X_{\mu}, X_{\nu}]] = 0, \qquad (8)$$

где $\mu, \nu, \varkappa = 1,2,3$.

Таким образом, структуре ранга $r = 4$ соответствуют трехпараметрические алгебры Ли, а $f(ij)$ можно рассматривать как двухточечный инвариант соответствующей трехпараметрической группы Ли.

В соотношениях (8) будем различать два случая: $|c^{\varkappa}_{\mu\nu}| \neq 0$; $|c^{\varkappa}_{\mu\nu}| = 0$. Решение системы (6), т.е. явный вид функции $f(ij)$, будет существенно различным в обоих случаях.

Рассмотрим случай $|c^{\varkappa}_{\mu\nu}| \neq 0$. Обращаясь к другому базису $X'_{\rho} = a_{\rho\nu}X_{\nu}$, где $a_{\rho\nu}$ – неособенная матрица, можно перейти к коммутационным соотношениям в виде:

$$[X_1, X_2] = k_1 X_2; \quad [X_3, X_1] = k_1 X_3; \quad [X_2, X_3] = k_2 X_1, \tag{9}$$

где $k_1 = \sqrt{b_0}$; b_0, k_2 – действительные числа. Решая систему (6) с учетом соотношений (9), получим $f(ij) = \chi[\Psi(ij)]$, где χ – произвольная функция, а $\Psi(ij)$ – интеграл системы:

$$\Psi(ij) = (\bar{y}_j^2+\delta_j)\exp k_1(\bar{x}_i-\bar{x}_j)+(\bar{y}_i^2+\delta_i)\exp[-k_1(\bar{x}_i-\bar{x}_j)]-2\bar{y}_i\bar{y}_j, \tag{10}$$

где δ_i, δ_j – константы. Интеграл можно преобразовать к виду:

$$\Psi(ij) = \frac{(\tilde{y}_i-\tilde{y}_j)^2 + \delta_i\tilde{x}_i^2 + \delta_j\tilde{x}_j^2}{\tilde{x}_i\cdot\tilde{x}_j}, \tag{11}$$

где $\tilde{y} = \bar{y}\exp(-k_1\bar{x})$; $\tilde{x} = \exp(-k_1\bar{x})$. Заметим, что (II) обычно трактуется как модель Клейна плоскости Лобачевского (при $\delta_i=\delta_j > 0$), либо двумерного однополостного гиперболоида при $\delta_i=\delta_j< 0$ (см.[4]).

Это верно при действительном k_1. Но при $k_1 \in \mathbb{C}$ получим выражение, которое назовем моделью Клейна для сферы.

Действительно, выражение (I0) можно преобразовать так, что получим традиционный вид метрик пространств постоянной кривизны:

$$\Psi(ij) = \operatorname{sh}\sqrt{a_0}y_i \operatorname{sh}\sqrt{a_0}y_j \operatorname{ch}\sqrt{b_0}(x_i-x_j) - \operatorname{ch}\sqrt{a_0}\, y_i \operatorname{ch}\sqrt{a_0}y_j, \tag{12}$$

где a_0, b_0 – действительные числа. В зависимости от знака a_0, b_0 получаем метрики различных двумерных пространств постоянной кривизны.

Если в (11) $\delta_i=\delta_j=0$, то:

$$\Psi^{1/2}(ij) = x_i y_j - x_j y_i, \tag{13}$$

где $x = \tilde{y}\tilde{x}^{-1/2}$; $y=\tilde{x}^{-1/2}$. Выражение (I3) дает метрику симплектической плоскости.

Если в коммутационных соотношениях (9) $k_2 = 0$, то из (10) можно получить:

$$\Psi(ij)\Big|_{k_2=0} = (x_i-x_j)^2 \pm (y_i-y_j)^2, \qquad (14)$$

где "+" соответствует евклидовой плоскости, а "-" - псевдоевклидовой. Других решений в случае $|c^{\nu}_{\mu\nu}| \neq 0$ нет.

Приведенные решения (II)-(I4) получаются из общего решения (I0) при различных значениях входящих в него констант.

Рассмотрим случай $|c^{\nu}_{\mu\nu}| = 0$. Аналогично соотношения (8), переходя к подходящему базису, можно привести к виду:

$$[X_1,X_2] = b_2X_2+X_3; \quad [X_1,X_3]=b_1X_2; \quad [X_2,X_3] = 0, \qquad (15)$$

где b_1, b_2 - действительные числа.

Решая систему (6) с учетом соотношений (I5) при $b_1, b_2 \neq 0$, получим:

$$\Psi(ij) = \ln\{(\bar{x}_i-\bar{x}_j)^2 - [\sqrt{\Delta}(\bar{y}_i-\bar{y}_j)]^2\} - \frac{2b_2}{\sqrt{\Delta}} \operatorname{Arcth} \frac{\bar{x}_i-\bar{x}_j}{\sqrt{\Delta}(\bar{y}_i-\bar{y}_j)}, \qquad (16)$$

где $\Delta = b_2^2 + 4b_1$. При $\Delta > 0$ из (I6) можно получить:

$$\Psi(ij) = (\tilde{x}_i-\tilde{x}_j)^{m_1}(\tilde{y}_i-\tilde{y}_j)^{m_2}, \qquad (17)$$

где $m_1, m_2 \neq 0$ - действительные числа. При $\Delta = 0$ выражение (I6) приводится к виду:

$$\Psi(ij) = \ln(x_i-x_j) + \frac{y_i-y_j}{x_i-x_j}. \qquad (18)$$

Если в соотношениях (I5) $b_1 = 0$, то интеграл (I6) приводится к виду:

$$\Psi(ij) = (x_i-x_j)+(\delta_i-\delta_j)\ln(y_i-y_j), \qquad (19)$$

где $\delta_i, \delta_j = const$.

И наконец, при $b_2 = 0$ из (I6) можно получить:

$$\Psi(ij) = (\delta_i-\delta_j)(\bar{x}_i-\bar{x}_j) - \frac{1}{2}(\bar{y}_i-\bar{y}_j)^2. \qquad (20)$$

Других невырожденных метрик в этом случае нет.

Таким образом, две формулы (I0) и (I6) включают в себя все I0 геометрий, приведенных в [4]. Структура ранга $r = 4$ рассмотрена полностью.

Физическая структура ранга $r = 5$. Постановка задачи аналогична задаче о структуре ранга $r = 4$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пара $\langle \mathfrak{M}, a \rangle$ образует физическую структуру ранга $r = 5$, если для любых пяти точек $i, j, k, l, m \in \mathfrak{M}$ имеет место зависимость:

$$\Phi[a(ij), a(ik), a(il), a(im), a(jk), a(jl), a(jm), a(kl), a(km), a(lm)] = 0, \tag{21}$$

где $\mathfrak{M}$ - топологическое многообразие размерности $n = 3$, $a(ij) = f(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j)$ - достаточно гладкая функция, существенным образом зависящая от своих аргументов, и $\operatorname{grad} \Phi \neq 0$.

Методом, аналогичным случаю $r = 4$, из (2I) можно извлечь систему из шести уравнений относительно функции $f(ij)$:

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial x(i)} A_1^{\mu}(i) + \frac{\partial f(ij)}{\partial y(i)} A_2^{\mu}(i) + \frac{\partial f(ij)}{\partial z(i)} A_3^{\mu}(i) + \frac{\partial f(ij)}{\partial x(j)} A_1^{\mu}(j) + \frac{\partial f(ij)}{\partial y(j)} A_2^{\mu}(j) + \frac{\partial f(ij)}{\partial z(j)} A_3^{\mu}(j) = 0, \tag{22}$$

где $\mu = 1, \dots, 6$, $A_1^{\mu}(i) = A_1^{\mu}(x_i, y_i, z_i)$, $A_1^{\mu}(j) = A_1^{\mu}(x_j, y_j, z_j)$ и т.д.

Ранг системы равен пяти. Как и в случае $r = 4$, легко доказать, что любая подсистема из пяти уравнений будет полной. Уравнения совместности имеют вид:

$$\frac{\partial f(ij)}{\partial x(i)} B_1^{\nu}(i) + \frac{\partial f(ij)}{\partial y(i)} B_2^{\nu}(i) + \frac{\partial f(ij)}{\partial z(i)} B_3^{\nu}(i) + \frac{\partial f(ij)}{\partial x(j)} B_1^{\nu}(j) + \frac{\partial f(ij)}{\partial y(j)} B_2^{\nu}(j) + \frac{\partial f(ij)}{\partial z(j)} B_3^{\nu}(j) = 0, \tag{23}$$

где $\nu = 1, \dots, 10$.

Как и в случае $r = 4$, можно доказать, что любое уравнение совместности из системы (23) является линейной комбинацией с постоянными коэффициентами из уравнений основной системы (22). В операторном виде можно записать:

$$X_{\mu} f(ij) = 0 \quad \text{- система (22)},$$

$$[X_{\mu}, X_{\nu}] f(ij) = 0 \quad \text{- система (23)},$$

$$[X_{\mu}, X_{\nu}] = c_{\mu\nu}^{\varkappa} X_{\varkappa}. \tag{24}$$

где $\mu, \nu, \varkappa = 1,\ldots,6$; $c^{\varkappa}_{\mu\nu}$ – вещественные числа, $c^{\varkappa}_{\mu\nu} = -c^{\varkappa}_{\nu\mu}$ и $[X_\mu,[X_\nu,X_\varkappa]] + [X_\nu,[X_\varkappa,X_\mu]] + [X_\varkappa,[X_\mu,X_\nu]] = 0$ – из свойств уравнений совместности.

Таким образом, физической структуре ранга $r = 5$ соответствуют шестимерные алгебры Ли.

Явный вид функции $f(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j)$ находим из системы (22), используя соотношения (24). Не приводя полных выкладок, выпишем решения, удовлетворяющие системе (22): $f(ij) = \chi[\Psi(ij)]$, где χ – произвольная функция одного аргумента, а $\Psi(ij)$ – интеграл системы (22). Интеграл системы $\Psi(ij)$ может иметь вид:

$$\Psi_1(ij) = \cos(\sqrt{b_3}\bar{z}_i)\cos(\sqrt{b_3}\bar{z}_j)\{\cos(\sqrt{b_2}\,\bar{y}_i)\cos(\sqrt{b_2}\bar{y}_j)\cos[\sqrt{b_1}(\bar{x}_i - \bar{x}_j)] + \sin(\sqrt{b_2}\bar{y}_i)\sin(\sqrt{b_2}\bar{y}_j)\} + \sin(\sqrt{b_3}z_i)\sin(\sqrt{b_3}z_j), \quad (25)$$

где b_1, b_2, b_3 – вещественные числа, которые могут быть $>, <, =$ нулю.

При равенстве нулю одной из величин b_1, b_2, b_3 имеем:

$$\Psi_2(ij) = (\tilde{x}_i - \tilde{x}_j)^2 + (\tilde{y}_i - \tilde{y}_j)^2 + b(\tilde{z}_i - \tilde{z}_j)^2\,, \quad (26)$$

где $b \neq 0$,

и, наконец, $$\Psi_3(ij) = x_i y_j - x_j y_i + z_i - z_j. \quad (27)$$

Других интегралов у системы (22) нет.

Формула (25) дает метрику трехмерных пространств постоянной кривизны; (26) дает метрику трехмерного евклидова пространства при $b > 0$ и псевдоевклидова при $b < 0$, и (27) дает антисимметричную метрику в трехмерном пространстве.

Полученные выражения для геометрий могут представлять не только теоретический, но и практический интерес. Появляется принципиальная возможность разработать метод, позволяющий для конкретных экспериментальных данных определить, какая из геометрий им соответствует.

В заключение автор выражает благодарность Кулакову Ю.И. и Михайличенко Г.Г. за полезные замечания и обсуждения, а также доктору технических наук Косареву Ю.Г. за помощь и поддержку в работе.

Литература

1. КУЛАКОВ Ю.И. Элементы теории физических структур. - Новосибирск, 1968, с. 3-174.

2. КУЛАКОВ Ю.И. О новом виде симметрии, лежащем в основании физических теорий феноменологического типа. - Докл. АН СССР, 1971, т.201, №3, с.570-572.

3. МИХАЙЛИЧЕНКО Г.Г. Решение функциональных уравнений в теории физических структур. -Докл. АН СССР, 1972, т.206, №5,с.1056-1058.

4. МИХАЙЛИЧЕНКО Г.Г. Двумерные геометрии. -Докл.АН СССР,1981, т.260, №4, с.803-805.

5. КАМКЕ Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. -М.: Наука, 1966, с.62-63.

6. ЛЕВ В.Х. Алгебры Ли в теории физических структур.-В кн.: Моделирование в пленочной электромеханике (Вычислительные системы, вып. 110). Новосибирск, 1985, с.89-94.

Поступила в ред.-изд.отд.
10 сентября 1985 года