МАШИННЫЙ АНАЛИЗ СЛОЖНЫХ СТРУКТУР
(Вычислительные системы)
1986 год Выпуск 118

УДК 519.876

ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ ГАРМОНИЧНЫХ СИСТЕМ

Ю.Г. Косарев

В [1,2] были даны основные определения и доказано существование достаточно простой математической модели гармоничных систем, удовлетворяющей комплексу весьма жестких требований таких, как: оптимальность, устойчивость, иерархическая преемственность, простота реализации, измеримость и интерпретируемость [1,§1].

Цель данной работы – построить более общую модель, удовлетворяющую тем же требованиям. В основу модели положен более широкий взгляд на выбор целевой функции. Любая величина может быть объявлена целевой функцией (а все остальные – заданными), что позволяет расширить круг рассматриваемых задач и исследовать свойства модели, которые не зависят от выбора целевой функции.

Дальнейшее изложение опирается на работы [1,2] и, где это возможно, сохраняет преемственность определений и обозначений.

1. Схемы распределения ресурсов. Пусть системе из n элементов предоставлен $m+1$ вид ресурсов. Условимся вид ресурсов указывать индексом j ($j = \overline{1,m+1}$), а его количество обозначать X_j в случае системы и x_{ij} в случае i-го элемента системы. Иными словами, системе поставлен в соответствие вектор $(X_1, X_2, \ldots, X_{m+1})$, а ее i-му элементу – вектор $(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{i,m+1})$.

В данном разделе нас будут интересовать зависимости между одноименными составляющими указанных векторов, т.е. между X_j и $(x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{nj})$.

Ресурсы, используемые данной системой, по своим свойствам могут быть утилизируемыми системой (энергия, время, используемые материалы и т.п.) и неутилизируемыми (оборудование, трудовые коллективы и т.п.); делимыми на части (таковы, как правило, все утилизируемые ресурсы и многие из неутилизируемых) и неделимыми (например, уникальное и трудноперенаналаживаемое оборудование).

В согласии с этим могут быть выделены две схемы распределения ресурсов системы между ее элементами: первая S_0, когда каждому элементу системы предоставляется определенная доля данного ресурса, отведенного системе, и вторая S_1, когда каждому элементу предоставляется весь ресурс целиком. Первая схема возможна для всех ресурсов, делимых на части. Вторая - лишь для неутилизируемых системой ресурсов. (Например, для программных систем, в качестве элементов которых выступают отдельные программы, схема S_0 соответствует случаю, когда оперативная память и другие устройства распределяются между программами заранее, схема S_1 - случаю, когда в распоряжение каждой программы поочередно предоставляются все необходимые технические средства.)

Таким образом, каждый из используемых системой ресурсов можно отнести к одной из трех групп: к первой, когда применима лишь схема S_1, ко второй, когда применимы обе схемы, и к третьей, когда применима лишь схема S_0.

Для простоты перенумеруем ресурсы, отводя младшие номера для ресурсов первой группы, а старшие - для третьей[x]. Далее будем считать, что значениям индекса j, не превышающим значений некоторого параметра s, соответствует схема S_1, а остальным - схема S_0.

Формально свойства схем распределения ресурсов можно записать в виде ограничений:

$$S_1: \ x_{ij} \le X_j, \ 1 \le j \le s; \ i = \overline{1,n}, \tag{1}$$

$$S_0: \ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \le X_j, \ s+1 \le j \le m+1. \tag{2}$$

Значения параметра s удобно определить на отрезке $[0, m+1]$; тогда границам отрезка соответствуют случаи, когда все виды ресурсов распределяются по одной схеме: S_0 при $s=0$ или S_1 при $s = m+1$. Очевидно, что возможность варьирования параметром s определяется величиной r_{II} $(0 \le r_{II} < m+2)$ и может осуществляться в пределах отрезка $[r_I, m+1-r_{III}]$.

2. Особенности математической модели. Наша главная цель - нахождение такого распределения предоставленных системе ресурсов

x) Очевидно, что таких способов нумерации может быть $r_I! \, r_{II}! \, r_{III}!$, где r_k - мощность k-й группы ресурсов.

между ее элементами, которое обеспечивает наилучшее качество функционирования системы.

Естественно, выбор фактора, который определяет это качество, зависит от конкретных условий. Чаще всего таким фактором служит время. Время, затрачиваемое на выпуск изделия, на решение какой-либо задачи на ЭВМ и т.д. Но в других ситуациях, когда, например, нужно что-либо сделать к определенному сроку (а не за минимальное время), качество функционирования может определяться какой-либо другой величиной. Например, трудозатратами. Время изготовления в этом случае играет роль ресурса.

С этих позиций удобно считать, что качество функционирования - это не что-то особое, а количественная характеристика некоторого выделенного ресурсного свойства. Иными словами, ресурсные свойства системы могут выступать в двух ипостасях: собственно ресурсных, когда на них налагаются определенные ограничения, и целевых, когда они являются объектом оптимизации.

Такой подход обладает бо́льшей общностью по сравнению с тем, который заранее устанавливает грань между целевыми и ресурсными свойствами[ж)]. Эта общность проявляется, прежде всего, в возможности установить для данной системы зависимости между различными случаями выбора целевой функции. Или, иными словами, в выделении тех характеристик системы, которые не зависят от того, какое именно из ее ресурсных свойств берется в качестве целевого.

Практически это означает, что если ранее при построении математической модели за основу брались функции явного вида $y = f(x_1, \dots, x_m)$, где y - значение целевой функции, а x_j - значения ресурсов, то теперь мы отдадим предпочтение функциям неявного вида: $\varphi(x_1, \dots, x_{m+1}) = 0$, где значения целевой функции и ресурсов выступают как равноправные величины.

В [I] было доказано, что всем указанным выше требованиям к математической модели можно удовлетворить, если связь между величинами, входящими в модель, определяется степенными функциями.

Применительно к неявному заданию функций это означает, что связь между количествами ресурсов для i-го элемента системы определяется как

$$\prod_{j=1}^{m+1} x_{ij}^{q_i} = a_i, \quad i = \overline{1,m}, \tag{3}$$

ж) Именно такой подход и развивался нами ранее в [I].

а для всей системы:

$$\prod_{j=1}^{m+1} X_j^{q_j} = A_s \ . \qquad (4)$$

Здесь X_j и x_{ij} - положительные действительные числа, интерпретируемые как количества ресурса j-го вида, выделенные системе и ее i-му элементу; x_{ij} связаны с X_j зависимостями вида (I), если индекс j принадлежит отрезку натурального ряда чисел $[1, s]$, либо вида (2), если j принадлежит отрезку $[s+1, m+1]$.

Показатели системы q_j - положительные рациональные числа; A_s и a_i - положительные действительные числа, интерпретируемые как весовые коэффициенты системы и ее i-го элемента. Физический смысл весовых коэффициентов легко установить следующим образом. Пусть качество функционирования (эффективность) системы определяется l-м видом ресурсов. Иными словами, у системы заданы m значений X_j, кроме X_l, значение которого отыскивается в процессе оптимизации. Тогда получаем, что

$$\overset{o}{X}_l = A_s^{1/q_l} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq l}}^{m+1} X_j^{-q_j/q_l}, \quad l \in [1, m+1]. \qquad (5)$$

Величины A_s^{1/q_l} и a_i^{1/q_l} можно трактовать как удельные эффективности системы и ее i-го элемента по l-му виду ресурса. При этом эффективность характеризуется расходом некоторого (выделенного) ресурса. Эффективность тем лучше, чем меньше этот расход, т.е. чем меньше величина весового коэффициента.

3. Основная теорема. Докажем следующее важное утверждение.

3.I. ТЕОРЕМА. В соотношениях вида (3), (4) при фиксированных значениях X_j ($j \neq l$, $j = \overline{1, m+1}$) наименьшее возможное значение $\overset{o}{X}_l$ величины X_l достигается, каково бы ни было $l = \overline{1, m+1}$, тогда и только тогда, когда

$$A_s = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{1/d_s} \right)^{d_s}, \qquad (6)$$

где

$$d_s \rightleftharpoons \sum_{j=s+1}^{m+1} q_j \ , \qquad (7)$$

а относительные значения величин

$$\underline{x}_{ij} \doteqdot x_{ij}/X_j\,, \quad i=\overline{1,n}\,, \quad j=\overline{1,m+1}\,, \tag{8}$$

определяются отношениями:

$$\overset{\circ}{\underline{x}}_{ij} = 1\,, \quad i=\overline{1,n}\,, \quad j=\overline{1,s}\,, \tag{9}$$

$$\overset{\circ}{\underline{x}}_{ij} = \underline{a}_i^{1/d_s}\,, \quad i=\overline{1,n}\,, \quad j=\overline{s+1,m+1}\,, \tag{10}$$

где $\underline{a}_i$ – относительный вес i-го элемента:

$$\underline{a}_i \doteqdot a_i/A_s\,, \qquad i=\overline{1,n}. \tag{11}$$

3.2. Доказательство теоремы можно было бы получить с помощью той же лагранжевой техники, которая применялась в [I] при доказательстве аналогичной теоремы для функций явного вида (то, что рассмотрение велось для менее общего случая, не существенно). Однако представляет определенный интерес провести это доказательство на принципиально иной основе – используя аппарат нелинейных неравенств [3].

Укажем некоторые соотношения, на которые будет опираться доказательство теоремы.

3.2.I. Обобщенное неравенство Гёльдера [3]:

$$\prod_j \Big(\sum_i x_{ij}\Big)^{\alpha_j} \geq \sum_i \prod_j x_{ij}^{\alpha_j}\,, \tag{12}$$

где $x_{ij}>0$, $\alpha_j>0$, $\sum_j \alpha_j = 1$.

Равенство достигается тогда и только тогда, когда

$$\frac{x_{i1}}{\sum_i x_{i1}} = \frac{x_{i2}}{\sum_i x_{i2}} = \ldots = \frac{x_{i,m+1}}{\sum_i x_{i,m+1}}\,. \tag{13}$$

Если при этом

$$\sum_i \prod_j x_{ij}^{\alpha_j} = \mathrm{const}\,, \text{ то } \prod_j \Big(\sum_i x_{ij}\Big)^{\alpha_j} = \inf \prod_j \Big(\sum_i x_{ij}\Big)^{\alpha_j}\,, \tag{14}$$

а если

$$\prod_j \Big(\sum_i x_{ij}\Big)^{\alpha_j} = \mathrm{const}\,, \text{то } \sum_i \prod_j x_{ij}^{\alpha_j} = \sup \sum_i \prod_j x_{ij}^{\alpha_j}\,. \tag{15}$$

3.2.2. Очевидные свойства наименьшего и наибольшего значений

$$b(\inf Z)^c = b \inf(Z^c) = \inf(bZ^c), \qquad (16)$$

$$b(\sup Z)^c = b \sup(Z^c) = \sup(bZ^c), \qquad (17)$$

где $b>0$ и $c>0$ – константы, $Z>0$.

3.3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы. Рассмотрим поочередно оба случая определения наименьшего значения $X_l = \overset{\circ}{X}_l$:

$$\overset{\circ}{X}_l = \inf_{(1),(2)} (\sum_i x_{il}), \quad l > s, \qquad (18)$$

и

$$\overset{\circ}{X}_l = \inf_{(1),(2)} (\sup_i \{ x_{il} \}), \quad l \le s. \qquad (19)$$

В (18) и (19) инфинум ищется при ограничениях в виде неравенств (1),(2), но поскольку мы имеем дело с функциями,строго монотонно изменяющимися с ростом каждого из аргументов, то инфинуму будут соответствовать граничные значения. Это позволяет заменить (1),(2) равенствами:

$$x_{ij} = X_j, \quad 1 \le j \le s, \quad i = \overline{1,n}, \qquad (1^*)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = X_j, \quad s+1 \le j \le m+1. \qquad (2^*)$$

3.3.1. Случай $l > s$. В согласии с (1^*) будем считать значения всех x_{ij} для $j=\overline{1,s}$ фиксированными и равными X_j, т.е.

$$(3) \overset{(1^*)}{\Rightarrow} \prod_{j=s+1}^{m+1} x_{ij}^{q_j} = a_i \prod_{j=1}^{s} X_j^{-q_j}, \quad i = \overline{1,n}. \qquad (20)$$

Обозначим

$$(7) \Rightarrow q_j/d_s \rightleftharpoons \alpha_j, \quad j = \overline{1,m+1}, \quad \sum_{j=s+1}^{m+1} \alpha_j = 1, \qquad (21)$$

$$(20) \overset{(21)}{\Rightarrow} \prod_{j=s+1}^{m+1} x_{ij}^{\alpha_j} = a_i^{1/d_s} \prod_{j=1}^{s} X_j^{-\alpha_j}, \quad i = \overline{1,n}, \qquad (22)$$

$$(22) \overset{\Sigma}{\Rightarrow} \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=s+1}^{m+1} x_{ij}^{\alpha_j} = \sum_i a_i^{1/d_s} \prod_{j=1}^{s} X_j^{-\alpha_j}. \qquad (23)$$

Согласно обобщенному неравенству Гёльдера:

$$\overset{(12)}{\Rightarrow} \prod_{j=s+1}^{m+1} (\sum_i x_{ij})^{\alpha_j} \geq \sum_i \prod_{j=s+1}^{m+1} x_{ij}^{\alpha_j}, \tag{24}$$

$$\overset{(23)}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i^{1/d_s} \prod_{j=1}^{s} X_j^{-\alpha_j} = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=s+1}^{m+1} x_{ij}^{\alpha_j} \underset{(14)}{=} \prod_{j=s+1}^{m+1} (\sum_i \overset{\circ}{x}_{ij})^{\alpha_j} =$$

$$= \inf \prod_{j=s+1}^{m+1} (\sum_i x_{ij})^{\alpha_j} \overset{(16)}{=} (\inf \sum_i x_{i1})^{\alpha_1} \prod_{j=s+1 (j \neq 1)}^{m+1} X_j^{\alpha_j} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^{1/d_s} \prod_{j=1}^{s} X_j^{-\alpha_j}, \tag{25}$$

$$\overset{(25)}{\underset{(18)}{\overset{(21)}{=}}} \prod_{j=1}^{m+1} X_j^{q_j} = (\sum_{i=1}^{n} a_i^{1/d_s})^{d_s} \doteq A_s, \quad 1 = \overline{s+1, m+1}, \tag{26}$$

где значению индекса $j = 1$ соответствует величина X_1, минимизируемая по формуле (18).

Соотношение (9) следует из (Г*), а (10) – из (13) как условия превращения неравенства Гёльдера в равенство. Случай $1 > s$ рассмотрен.

3.3.2. Случай $1 \leq s$. Как и при $1 > s$, проделаем все преобразования (20)-(24). Но теперь минимизируемая величина находится в другой части равенства (23) и в неравенстве Гёльдера (24) постоянной оказывается бо́льшая из величин. В согласии с (15)

$$\overset{(23)}{\overset{(15)}{=}} \left\{ \sum_i a_i^{1/d_s} \prod_{j=1}^{s} X_j^{-\alpha_j} \right\} = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=s+1}^{m+1} x_{ij}^{\alpha_j} \right\} =$$

$$= \prod_{j=s+1}^{m+1} (\sum_i x_{ij})^{\alpha_j} \underset{(2^*)}{=} \prod_{j=s+1}^{m+1} X_j^{\alpha_j} = \text{const} =$$

$$= \left\{ \sum_i a_i^{1/d_s} \prod_{j=1 (j \neq 1)}^{s} X_j^{-\alpha_j} \right\} \Big/ \inf X_1^{\alpha_1} = \prod_{j=s+1}^{m+1} X_j^{\alpha_j}, \tag{25*}$$

$$\overset{(25^*)}{\underset{(1^*)}{\overset{(21)}{=}}} \prod_{j=1}^{m+1} X_j^{q_j} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{1/d_s} \right)^{d_s} \doteq A_s, \; 1 = \overline{1, s}, \tag{26*}$$

где минимизируемая величина

$$X_1 = \overset{\circ}{X}_1 = \inf(x_{11} = x_{21} = \ldots = x_{n1}), \quad 1 = \overline{1, s}. \tag{27}$$

аналогично выполняются и соотношения (9) и (I0). Теорема доказана в предположении справедливости замены ограничений в виде неравенств (I),(2) равенствами вида (I*), (2*). Правомочность такой замены видна из (26) и (26*). Действительно, при замене любого из X_j на $X_j^* < X_j$, $j \neq 1$, может происходить только увеличение минимизируемой величины X_1.

4. Прокомментируем полученный результат.

4.I. Как в случае, когда оптимизируемый ресурс распределяется между элементами системы по схеме S_1, так и в случае его распределения по схеме S_0, несмотря на то, что этим схемам соответствуют различные способы оптимизации (I8) или (I9), выражения (6), (7), (9), (I0) имеют один и тот же вид.

Таким образом, для неявного вида Н-функций можно говорить не о наборе Н-операций (число которых равно числу схем распределения ресурсов), а лишь об одной единственной Н-операции Н для всех схем распределения ресурсов:

$$H\left(\left\{\prod_{j=1}^{m+1} x_{ij}^{q_j} = a_i / i=\overline{1,n}\right\},\ \{X_j / j \neq 1,\ j=\overline{1,m+1}\}, s, 1\right) =$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{m+1} X_j^{q_j} = A,\ X_1 = \overset{\circ}{X}_1,\ \{\overset{\circ}{x}_{ij} / i=\overline{1,n}, j=\overline{1,m+1}\}\right). \qquad (28)$$

Н-операцию удобно представить в виде последовательно применяемых операций Н1 и Н2:

$$H1\left(\{a_i / i=\overline{1,n}\};\ d_s = q_{s+1} + \ldots + q_{m+1}; s\right) =$$

$$= \left(A; \{\overset{\circ}{\underline{x}}_{ij} / i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m+1}\}\right), \qquad (29)$$

$$H2\left(A; \{X_j / j \neq 1,\ j=\overline{1,m+1}\};\ 1; \{\overset{\circ}{\underline{x}}_{ij} / i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m+1}\}\right) =$$

$$= \left(X_1 = \overset{\circ}{X}_1; \{\overset{\circ}{x}_{ij} / i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m+1}\}\right). \qquad (30)$$

Операция Н1 вычисляет по формуле (6) величину А – коэффициента результирующей Н-функции, и по формулам (9), (I0) определяет относительные значения аргументов $\overset{\circ}{\underline{x}}_{ij}$ исходных Н-функций (относительные доли ресурсов), соответствующие оптимуму. Операция Н2 вычисляет значение целевой функции X_1 по формуле (5) и по формуле (8) – абсолютные значения аргументов $\overset{\circ}{x}_{ij}$ исходных Н-функций.

4.2. Рассмотрим весь спектр возможных значений параметров l и s (см.таблицу). Каждой строке таблицы для всех значений пара-

Таблица

s	l							
	1	2	3	...	m	m+1	A_s	d_s
0	A_0^1	A_0^2	A_0^3	...	A_0^m	A_0^{m+1}	A_0	d_0
1	A_1^1	A_1^2	A_1^3	...	A_1^m	A_1^{m+1}	A_1	d_1
2	A_2^1	A_2^2	A_2^3		A_2^m	A_2^{m+1}	A_2	d_2
...	...	...	...	...	...	...	...	...
m	A_m^1	A_m^2	A_m^3	...	A_m^m	A_m^{m+1}	A_m	d_m

S_1 S_0

метра l соответствует одно и то же значение весового коэффициента A_s. Поскольку в согласии с (7) с увеличением параметра s величина суммарного показателя степени d_s уменьшается, а, следовательно, в соответствии со свойством степенных сумм (см. [2]) уменьшается и величина A_s, то

$$A_0 > A_1 > \ldots > A_m . \tag{31}$$

Это означает, что для повышения эффективности системы величину параметра s нужно выбирать наибольшей из возможных. Естественно, что такая возможность выбора имеет место только для второй группы ресурсов (см.п.2). Только такие ресурсы можно распределять как по схеме S_0, так и по схеме S_1. Схема S_1 оказывается предпочтительнее по эффективности, но требует по сравнению со схемой S_0 работы элементов в области бóльших значений x_{ij} (поскольку в этом случае каждый элемент получает все ресурсы системы). Иными словами, за более высокую эффективность схемы S_1 приходится расплачиваться более тяжелыми требованиями к элементам-атомам.

4.3. Выбор в качестве целевой функции затрат того или иного ресурса может, вообще говоря, наложить запрет на использование некоторых сочетаний значений l и s . Так, если целевая функция определяет затраты времени (только такие целевые функции и рассматривались нами ранее [I,2]), то из рассмотрения исключаются все сочетания с $1 \le s$ (лежащие под диагональю таблицы), кроме одной единственной $1 = s = 1$, которой соответствует схема, названная в [I] параллельной.

4.4. Величина суммарного показателя степени d_s, уменьшаясь с ростом s, может стать, начиная с некоторого $s = s^*$, меньше I. А это, в свою очередь, означает, что при $s = s^*$ изменяется прямо на противоположное влияние распределений $\{a_i\}$ на величину степенной суммы (6), так как в согласии с [2]:

$$\begin{aligned} A_s(D_T) < A_s(D) \le A_s(D_E), \quad & d_s > 1, \\ A_s(D_E) \le A_s(D) < A_s(D_T), \quad & d_s < 1, \\ A_s(D) = A_s(D_T), \quad & d_s = 1, \end{aligned} \tag{32}$$

где D_E, D_T и D - равномерное, сосредоточенное в точке и произвольное распределения $\{a_i\}$.

Таким образом, в зависимости от значения d_s надо выбирать различные стратегии совершенствования систем: для систем с $d_s > 1$ надо стремиться сделать все a_i, кроме одного, возможно меньше, для систем с $d_s < 1$ - наоборот, нужно постараться сделать все a_i одинаковыми, а для систем с $d_s = 1$ ничего предпринимать не нужно.

Литература

I. КОСАРЕВ Ю.Г. О математической модели гармоничных систем. Ч.I. -В кн.: Математическое обеспечение ВС из микро-ЭВМ (Вычислительные системы, вып. 96). Новосибирск, 1983, с. 3-28.

2. КОСАРЕВ Ю.Г. О математической модели гармоничных систем. Ч.П. -В кн.: Анализ разнотипных данных (Вычислительные системы, вып. 99). Новосибирск, 1983, с.15-38.

3. ХАРДИ Г.Г., ЛИТТЛЬВУД Д.Е., ПОЛИА Г. Неравенства.-М.: ИЛ, 1948. - 456 с.

Поступила в ред.-изд.отд.
17 ноября 1986 года