МАШИННЫЙ АНАЛИЗ СЛОЖНЫХ СТРУКТУР
(Вычислительные системы)
1986 год Выпуск II8

УДК 519

ТЕОРИИ, ИЗМЕРЕНИЯ И ТЕОРИИ ИЗМЕРЕНИЙ

И.В.Бахмутова, В.С.Меськов, К.Ф.Самохвалов

Назначение статьи - двойное: а) подвергнуть критическому анализу общепринятую точку зрения на природу и цели измерений; б) дать набросок альтернативных взглядов, которые в свете упомянутого анализа более адекватны нуждам научной практики.

В §I излагаются достаточно подробно и вполне традиционно основы общепринятой теории измерений. Чтобы выработать отправную точку зрения для оценки того, что изложено в нем, §2 посвящается неформальному методологическому анализу практики измерений. Точный вариант этого анализа составляет содержание §4. В §3 изложен подготовительный материал для проведения такого рода уточнения. Четвертым параграфом завершается выработка упомянутой отправной точки зрения для критической оценки общепринятой теории измерений. С другой стороны, § 2-4 в совокупности образуют некую связную концепцию, так называемую "утилитарную" теорию измерений. В §5 содержатся собственно критические замечания к общепринятой доктрине измерений. Авторы надеются, что эти замечания читателю должны быть понятны без каких-либо дополнительных усилий с его стороны, если он действительно примет содержание предыдущих трех параграфов как отправной пункт для критики теории, изложенной в §I.

§I. Репрезентационная теория измерений: основные положения

Под "общепринятой точкой зрения" подразумевается круг идей, образующих концепцию репрезентационной теории измерений. Прилагательное "репрезентационная" характеризует центральную идею этой концепции, состоящую в том, что измерение есть де приписывание чисел вещам таким образом, чтобы определенные операции и отношения между этими приписанными числами "соответствовали бы" (или "гомоморфно представляли бы") наблюдаемые операции и отношения между вещами, которым они приписаны (см.,например,[I,с.I25]). Эта идея достаточно отчетливо была высказана еще в 1887 году Гельмгольцем [2] и потом была развита усилиями Кэмпбелла [3], Коэна и Нагеля [4], Риза [5], Скотта и Саппса [6], Саппса и Зинеса [7], Эллиса [8], Стивенса [9,I0-I2], Льюса и Тьюки [I3], Крантца [I4], Пфанцагля [I5], Тверского [I6] и многих других. В I97I году появился в печати первый том фундаментальной коллективной монографии Крантца, Льюса, Саппса и Тверского [I7], трактующей измерения в рассматриваемой "репрезентационной" традиции. И наконец,в I979 году результаты всех этих усилий были подытожены в виде седьмого тома "Энциклопедии математики и ее приложений" под общей редакцией Дж.-К.Рота (составитель седьмого тома Ф.Робертс) [I8]. Эта книга - канонический источник сведений, лежащий в основе приводимого ниже изложения основных пунктов репрезентационной теории измерений.

I.I. Начнем с примеров, поясняющих суть дела.

ПРИМЕР I. Пусть B - множество объектов, а H - распознаваемое вами отношение "a тяжелее b". В согласии с рассматриваемой концепцией установить процедуру g для измерения веса означает: найти способ приписать действительное число $g(a)$ каждому $a \in B$ так, чтобы для всех $a, b \in B$

$$aHb \Leftrightarrow g(a) > g(b). \qquad (1)$$

ПРИМЕР 2. Предположим, что A - множество объектов и что бинарное отношение aWb выполняется тогда и только тогда, когда вы решили,что "a теплее b". В рамках рассматриваемой концепции установить измерительную процедуру f для измерения температуры означает: научиться приписывать действительное число $f(a)$ каждому $a \in A$ таким образом, чтобы для всех $a, b \in A$

$$aWb \Leftrightarrow f(a) > f(b). \qquad (2)$$

Заметим, что в действительности мы, как правило, хотим большего от наших измерительных процедур,чем это выражено в (I) или (2). На самом деле при измерении веса мы дополнительно хотим,чтобы функция g: $B \to Re$ была "аддитивна", т.е. чтобы совместный вес двух объектов был всегда равен сумме весов каждого из них по отдельности. Конечно, при этом, чтобы осмысленно говорить о "совместном весе", необходимо иметь в виду некоторую определенную наблюдаемую бинарную операцию "совмещения двух объектов в один", которую мы обозначим через $\bullet$. Таким образом, мы хотим, чтобы для всех $a,b \in B$ функция g: $B \to Re$ удовлетворяла не только условию (I), но и условию

$$g(a \bullet b) = g(a) + g(b) \qquad (3)$$

относительно предварительно заданной операции $\bullet$ на B .Эта операция проста, всем известна и, главное, часто осуществляема на практике: для любых двух объектов $a,b \in B$ объект $a \bullet b \in B$ есть тот, что получается одновременным помещением a и b на одну чашу весов (или на одну руку и т.д.).

В случае измерения обычной (не по Кельвину) температуры дело обстоит иначе. Нет никакой заслуживающей внимания (по практическим и научным соображениям) операции над объектами множества A, относительно которой стоило бы требовать аддитивности f . Но это вовсе не исключает возможности осмысленно и с пользой для дела в дополнение к условию (2) потребовать от f нечто еще, обратив внимание на какие-то другие практически важные отношения и/или операции над объектами, для которых определено отношение W .

I.2. Пусть $\mathfrak{A} = (A, R_1, \ldots, R_p; \bullet_1, \ldots, \bullet_q)$ - алгебраическая система конечной сигнатуры. Тип $\mathfrak{A}$ есть пара последовательностей (возможно пустых) натуральных чисел $(r_1, \ldots, r_p; s_1, \ldots, s_q)$ с длинами $p \geq 0$ и $q \geq 0$, где r_i , $i=1,\ldots,p$, равно m ,если R_i - m-арное отношение, а s_j , $j = 1,\ldots,q$, равно n ,если $\bullet_j$ - n-арная операция. Примеру I соответствует алгебраическая система $(B,H;\bullet)$ типа (2 ; 2). В примере 2 мы имеем дело с алгебраической системой (A,W) типа (2;). Алгебраическая система $(Re , >,\geq; +)$ имеет тип (2,2; 2). Она есть образец того, что называется числовой алгебраической системой, т.е. системой, носитель которой есть какое-то множество действительных чисел. Второй пример числовой алгебраической системы - система $(Re ,>, + , \times)$,которая имеет тип (2; 2,2).

Согласно п. I.I при измерениях начинают с наблюдаемой (или эмпирической) алгебраической системы $\mathfrak{A}$ и ищут отображение ее в числовую алгебраическую систему $\mathfrak{B}$, которое "сохраняет" все отношения и операции из $\mathfrak{A}$. Например, при измерении весов ищут отображение из $\mathfrak{A} = (B,H;\bullet)$ в $\mathfrak{B} = (Re , > , +)$,которое "сохраняет" отношение H и операцию $\bullet$. При измерении температуры ищут отображение из $\mathfrak{A} = (A, W)$ в $\mathfrak{B} = (Re, >)$, которое "сохраняет" отношение W. Отображение h из одной алгебраической системы $\mathfrak{A}$ в другую систему $\mathfrak{B}$, "сохраняющее" все отношения и операции, называется гомоморфизмом. Чтобы быть точными, предположим, что $\mathfrak{B} = (A', R'_1, \ldots, R'_p; \bullet'_1, \ldots, \bullet'_q)$ есть другая алгебраическая система того же типа, что и $\mathfrak{A}$ (с носителем A, отношениями $R_1, \ldots, R_p$ и операциями $\bullet_1, \ldots, \bullet_q$). Функция h: $A \to A'$ называется гомоморфизмом из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$, если для всех $a_1, \ldots, a_{r_i} \in A$

$$R_i(a_1, \ldots, a_{r_i}) \leftrightarrow R'_i(h(a_1), \ldots, h(a_{r_i})), \; i = 1, \ldots, p, \tag{4}$$

и для всех $a_1, \ldots, a_{s_j} \in A$

$$h(\bullet_j(a_1, \ldots, a_{s_j})) = \bullet'_j(h(a_1), \ldots, h(a_{s_j})), \; j = 1, \ldots, q. \tag{5}$$

(Функция h не обязана быть одно-однозначной или на.)

Одно-однозначный гомоморфизм назовем изоморфизмом. Если есть гомоморфизм из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$, мы говорим, что $\mathfrak{A}$ гомоморфна $\mathfrak{B}$. Если есть изоморфизм на, мы говорим, что $\mathfrak{A}$ изоморфна $\mathfrak{B}$.

Относительно определения гомоморфизма следует сделать одно замечание. Если $\bullet_j$ и $\bullet'_j$ рассматривать как (s_j+1)-арные отношения на A и A' соответственно, то условие, отвечающее (4), читалось бы как

$$(a_1, \ldots, a_{s_j+1}) \in \bullet_j \leftrightarrow (h(a_1), \ldots, h(a_{s_j+1})) \in \bullet'_j. \tag{6}$$

Но (6) влечет (5), хотя обратная импликация, вообще говоря, не имеет места. Покажем это на примере.

Пусть $A = \{x, y\}$ и пусть $\bullet$ – операция, определяемая следующим образом:

$$x \bullet x = x, \quad x \bullet y = x, \quad y \bullet x = x, \quad y \bullet y = y. \tag{7}$$

Тогда функция h такая, что $h(x) = h(y) = 0$ есть гомоморфизм из $(A; \bullet)$ в $(Re; +)$, т.е. она удовлетворяет (5). Однако h не удовлетворяет (6), так как $h(y) = h(x) + h(x)$, и все же $y \neq x \bullet x$. Подобным же образом, если R – пустое отношение на A, то h есть гомоморфизм из $(A, R; \bullet)$ в $(Re, >; +)$, хотя h нарушает (6).

Говорят, что задано первичное измерение, если указан некий гомоморфизм из эмпирической алгебраической системы $\mathfrak{A}$ в некоторую (обычно особенную) числовую алгебраическую систему $\mathfrak{B}$. Трудный философский (не математический) вопрос – выбор числовой системы $\mathfrak{B}$. Почему пытаются найти гомоморфизм в одну алгебраическую систему, а не в другую? Ответ зависит, вообще говоря, не только от свойств измеряемой эмпирической системы, но и от желаемых по тем или иным внешним причинам свойств числового приписывания. Вряд ли на рассматриваемом уровне общности этот ответ можно сделать более содержательным в рамках репрезентационной традиции.

Если искомый гомоморфизм h указан, то говорят также, что этот гомоморфизм дает <u>частное представление</u> $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$, и тройка ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, h) в этом случае называется <u>шкалой</u>. Иногда (не официально) мы будем называть шкалой саму функцию h (в п. I.I мы ее называли измерительной процедурой).

I.3. Первая основная проблема репрезентационной теории измерений – <u>проблема представления</u>: для данной конкретной числовой системы $\mathfrak{B}$ найти условия на наблюдаемую систему $\mathfrak{A}$, необходимые и, достаточные для существования гомоморфизма из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$. Ударение делается на нахождение достаточных условий. Если все условия, в совокупности достаточные, еще и необходимы, то тем лучше. Важно, кроме того, чтобы эти условия были "проверяемы" в некотором эмпирически значимом смысле (часто хотят в этой связи, чтобы эти условия формулировались в виде законов, выразимых средствами универсальных импликаций). Они обычно называются <u>аксиомами измерения</u>, а теорема, устанавливающая их достаточность, обычно называется <u>теоремой представления</u>. В некоторых работах, например в [I8], утверждается, что доказательство теоремы представления, если это возможно, должно быть <u>конструктивным</u>, чтобы "оно не только показывало, что представление возможно, но и показывало, как его построить фактически" [I8, с.54].

Типичным фрагментом доказательства теоремы представления является следующее рассуждение. Предположим, что мы ищем гомоморфизм f из (A, R) в (Re, >). Если такой гомоморфизм f существует, то из этого следует, что R транзитивно. Ибо если aRb и bRc, то f(a) > f(b) и f(b) > f(c). Отсюда f(a) > f(c) и, следовательно, aRc.

Таким образом, здесь аксиомой измерения является требование транзитивности R в (A, R).

Укажем формулировки некоторых основных теорем представления, на которые часты ссылки в литературе по теории измерений.

ТЕОРЕМА I.I. Пусть $\mathfrak{A}$ = (A, R), A – конечное множество, R – бинарное отношение на A. Пусть $\mathfrak{B}$ = (Re, >). Тогда существует гомоморфизм из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$, если и только если (A,R) - строгий слабый порядок.

ТЕОРЕМА I.2 (Кантор). Пусть $\mathfrak{A}$ = (A,R), A - счетное множество, R - бинарное отношение на A. Пусть $\mathfrak{B}$ = (Re, >). Тогда существует гомоморфизм из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$, если и только если (A,R) - строгий слабый порядок.

ТЕОРЕМА I.3 (Биркгоф-Мальграм). Пусть $\mathfrak{A}$ = (A,R) - строгий простой порядок. Пусть $\mathfrak{B}$ = (Re, >). Тогда существует гомоморфизм из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$, если и только если (A,R) имеет счетное порядково плотное подмножество.

ТЕОРЕМА I.4 (Гёльдер). Каждая архимедова упорядоченная группа гомоморфна (Re, >; +) .

ТЕОРЕМА I.5 (Робертс и Льюс). Пусть $\mathfrak{A}$ = (A,R; •) ; R - бинарное отношение на A ; • - бинарная операция на A . Пусть $\mathfrak{B}$ = = (Re, >; +). Тогда существует гомоморфизм $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$,если и только если $\mathfrak{A}$ есть экстенсивная структура.

Алгебраическая система (A,R; •) типа (2; 2) называется <u>экстенсивной структурой</u>, если она удовлетворяет следующим аксиомам:

EI (<u>слабая ассоциативность</u>). Для всех $a,b,c \in A$

$$(a\cdot(b\cdot c))\ E\ ((a\cdot b)\cdot c)\ ,$$

где E определяется условием $xEy \Leftrightarrow \neg xRy \ \&\ \neg yRx$;

E2. (A,R) - строгий слабый порядок;

E3 (<u>монотонность</u>). Для всех $a,b,c \in A$

$$aRb \Leftrightarrow (a\cdot c)R(b\cdot c) \Leftrightarrow (c\cdot a)R(c\cdot b)\ ;$$

E4 (<u>архимедовость</u>). Для всех $a,b,c,d \in A$, если aRb , то существует целое положительное n такое, что

$$(na\cdot c)R(nb\cdot d)\ ,$$

где nx - есть сокращение для $\underbrace{x\cdot\ldots\cdot x}_{n\ \text{раз}}$.

Приведенный список важных в теории измерений теорем представления можно, конечно, значительно расширить, если не бояться словесных и формульных громоздкостей.

I.4. Второй основной проблемой репрезентационной теории измерений является <u>проблема единственности</u>: в какой степени единствен гомоморфизм f из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$, если f вообще существует? Мы увидим ниже, что теоремы единственности говорят нам о том, какие имеются шкалы f , и обусловливают теорию осмысленности предложений, включающих шкалы. В частности, теоремы единственности (как считают многие пропоненты рассматриваемой концепции измерений) накладывают ограничения на математические манипуляции, которые можно выполнять над числами, возникающими как шкальные значения. Точнее говоря, выполнять математические операции над числами можно, конечно, всегда и любые, однако ключевой вопрос в том, можно ли всё еще дедуцировать истинные (или, лучше, осмысленные) предложения об измеренных объектах после того, как над полученными числами были произведены эти операции?

Рассмотрим вопрос подробнее.

Вполне возможно, что для данных двух алгебраических систем $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ одного и того же типа имеются несколько различных функций, отображающих гомоморфно $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$. А раз так, то всякое утверждение об измерении должно либо указывать, какая именно шкала (какой именно гомоморфизм) используется, либо быть истинным независимо от шкалы.

Вспомним, что шкала есть тройка $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, f)$, где $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ – алгебраические системы, а f – гомоморфизм из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$. Шкалу назовем <u>числовой,</u> если $\mathfrak{B}$ – числовая алгебраическая система. Будем говорить, что утверждение, включающее числовые шкалы, является <u>осмысленным,</u> если его истинность (или ложность) не изменяется при замене каждой шкалы $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, f)$, которую оно включает, другой (приемлемой) шкалой $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, g)$. Такие предложения недвусмысленны в своей интерпретации, и, в отличие от предложений, зависящих от частного произвольного выбора шкалы, они говорят нечто значимое об основных отношениях между измеряемыми объектами.

Пусть f – гомоморфизм из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ и пусть A, B – носители $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ соответственно. Предположим, что φ есть функция, которая отображает область значений функции f, т.е. множество $f(A) = \{ f(a) \mid a \in A \}$ в множество B. Тогда композиция φf есть функция из A в B. Если φf – гомоморфизм из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$, то функцию φ назовем <u>допустимым преобразованием шкалы</u>. Например, пусть $\mathfrak{A} = (N, >)$, $\mathfrak{B} = (Re, >)$ и $f: N \to Re$ задана соотношением $f(x) = 2x$. Тогда f – гомоморфизм из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$. Если $\varphi(x) = x + 5$, то φf есть также гомоморфизм из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$, так как $\varphi f(x) = 2x+5$ и $x > y \Leftrightarrow 2x + 5 > 2y+5$. Таким образом, $\varphi : f(A) \to B$ – допустимое преобразование шкалы. Однако, если $\varphi(x) = -x$ для всех $x \in f(A)$, то φ не является таковым, ибо в этом случае φf не есть гомоморфизм из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$.

Если $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, f)$ - шкала и $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, g)$ - другая шкала, то иногда возможно найти функцию $\varphi: f(A) \to B$ такую, что $g = \varphi f$. Например, если $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и f таковы, как указано выше, а $g(x) = 7x$, то $\varphi(x) = \frac{7}{2}x$ - именно то, что нужно. Если для каждой шкалы $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, g)$ существует преобразование $\varphi: f(A) \to B$ такое, что $g = \varphi f$, то шкалу $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, f)$ назовем <u>регулярной</u>. Если регулярен каждый гомоморфизм f из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ (каждая шкала $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, f)$ регулярна), мы говорим, что <u>представление $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$</u> (т.е. класс всех шкал вида $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, f)$) <u>регулярно</u>. Можно видеть, что представление $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ регулярно, если существуют допустимые преобразования двух любых данных шкал f и g друг в друга.

Есть более широкое понятие допустимого преобразования, чем только что использованное. Если $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, f)$ - шкала, то <u>допустимым в широком смысле преобразованием (относительно) шкалы $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, f)$</u> называется любое отображение функции f в функцию $\varphi(f)$: $A \to B$, такое, что $\varphi(f)$ есть также гомоморфизм из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$. Это определение было предложено Кранцем, и оно разрешает иметь в качестве допустимых преобразований (в широком смысле) все отображения $\varphi: \mathrm{hom}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \to \mathrm{hom}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, где $\mathrm{hom}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ - класс всех гомоморфизмов из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$. Следует заметить, что если шкала регулярна, то оба определения допустимого преобразования шкалы совпадают: каждое допустимое преобразование в широком смысле может рассматриваться как допустимое преобразование в первом смысле, и, очевидно, наоборот.

Приведенное выше определение осмысленности высказываний, относящихся к измерениям, эквивалентно теперь следующему: всякое утверждение об измерениях <u>осмысленно</u>, если и только если его истинность (или ложность) не изменяется при допустимых преобразованиях <u>в широком смысле</u> всех участвующих в нем шкал. Если каждая из этих шкал <u>регулярна</u>, то в этом случае рассматриваемое определение осмысленности превращается в технически более удобное: всякое высказывание об измерениях осмысленно тогда и только тогда, когда оно инвариантно относительно всех (просто) <u>допустимых</u> преобразований всех участвующих в его формулировке шкал.

Мы видим, что описание для каждой шкалы класса ее допустимых преобразований - важный для понимания и применения теории измерений вопрос. Поэтому естественно, что классификация шкал основывается на характеризации их соответствующими классами допустимых преобразований. А именно: если $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, f)$ - шкала и C_f - класс всех ее допустимых преобразований, то говорят, что $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, f)$ имеет тип C_f [x]. Всякая теорема, устанавливающая для данной шкалы ее тип, называется теоремой единственности. Прежде чем привести примеры подобных теорем, укажем несколько широко распространенных типов шкал (см. таблицу).

Таблица

Тип шкалы, т.е. класс C_f, и название допустимого преобразования из C_f	Название типа шкалы	Примеры величин, измеряемых в шкалах данного типа
$\{\varphi \mid \varphi: f(A) \to B, \varphi(x) = x\}$, тождественное преобразование	Абсолютный	Результат счета
$\{\varphi \mid \varphi: f(A) \to B, \varphi(x) = \alpha x, \alpha > 0\}$, преобразование подобия	Отношений	Масса, температура по Кельвину, время (интервалы), длина, коэффициент интеллектуальности
$\{\varphi \mid \varphi: f(A) \to B, \varphi(x) = \alpha x + \beta, \alpha > 0\}$, позитивное линейное преобразование	Интервалов	Температура по Фаренгейту, Цельсию и т.д., время (календарь)
$\{\varphi \mid \varphi: f(A) \to B, \varphi(x) > \varphi(y) \Leftrightarrow x > y\}$, (строго) монотонное возрастающее преобразование	Порядковый	Предпочтения, твердость по Моосу, степень умения
$\{\varphi \mid \varphi: f(A) \to B, x \neq y \Leftrightarrow f(x) \neq f(y)\}$, взаимно-однозначное преобразование	Номинальный	Коды, названия профессий и т.д.

Дадим несколько примеров теорем единственности.

ТЕОРЕМА I.6. Пусть $\mathfrak{A} = (A, R)$, где A - счетное множество, R - слабый порядок на A. Пусть $\mathfrak{B} = (Re, \geq)$. Тогда представле-

[x] Более узкое определение типа шкалы читатель найдет в работе [19] - элегантном изложении чисто математической стороны репрезентационного подхода.

ние $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ регулярно и каждая шкала $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, f)$ этого представления имеет порядковый тип.

ТЕОРЕМА I.7. Пусть $\mathfrak{A} = (A, R)$, где R – строгий простой порядок на A, а A имеет счетное порядково плотное подмножество. Пусть $\mathfrak{B} = (Re, >)$. Тогда представление $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ регулярно и каждая шкала $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, f)$ этого представления имеет порядковый тип.

ТЕОРЕМА I.8. Пусть $\mathfrak{A} = (A, R; \bullet)$ – экстенсивная структура. Пусть $\mathfrak{B} = (Re, > ; +)$. Тогда представление $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ регулярно и каждая шкала $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, f)$ этого представления имеет тип отношений.

ТЕОРЕМА I.9. Пусть $\mathfrak{A} = (A, R)$, где $A = \{a, b, c\}$, $R = \{(a,b), (a,c), (b,c)\}$. Пусть $\mathfrak{B} = (Re, >)$. И пусть $f(a) = 3$, $f(b) = 2$, $f(c) = 1$. Тогда шкала $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, f)$ регулярна, имеет порядковый тип, но не принадлежит ни типу отношений, ни типу интервалов.

ТЕОРЕМА I.10. Пусть $\mathfrak{A} = (A, R)$, где $A = \{(r,s)\}$, $R = \{(r,s)\}$. Пусть $\mathfrak{B} = (Re, >)$. И пусть $f(r) = 1$, $f(s) = 0$. Тогда шкала $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, f)$ регулярна и одновременно имеет порядковый тип и тип интервалов.

ТЕОРЕМА I.11. Пусть $\mathfrak{A} = (A, R)$, где $A = \{r, s\}$, $R = \{(r,r), (s,s), (r,s), (s,r)\}$. Пусть $\mathfrak{B} = (Re, M)$, где M определено условием: $xMy \Leftrightarrow (x = y - 1 \vee y = x - 1 \vee x = y)$. И пусть $f(r) = 0$, $f(s) = 0$, $g(r) = 0$, $g(s) = 1$. Тогда представление $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ не регулярно; $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, f)$ и $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, g)$ – шкалы этого представления; $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, f)$ имеет порядковый тип, а $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, g)$ – нет.

ТЕОРЕМА I.12. Пусть $\mathfrak{A} = (A; \bullet)$, где $A = \{x, y\}$, а операция $\bullet$ удовлетворяет условиям (7). Пусть $\mathfrak{B} = (Re; \times)$. И пусть $f(x) = 0$, $f(y) = 1$. Тогда а) шкала $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, f)$ регулярна и имеет тип $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$, где $\varphi_1(0) = 0$, $\varphi_1(1) = 1$, $\varphi_2(0) = 0$, $\varphi_2(1) = 0$, $\varphi_3(0) = 1$, $\varphi_3(1) = 0$, $\varphi_4(0) = 1$, $\varphi_4(1) = 1$; б) представление $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ не регулярно.

I.5. Как мы уже сказали, критерий осмысленности высказываний об измерениях технически упрощается, когда речь идет о <u>регулярных шкалах</u>. А приведенные примеры теорем единственности внушают подозрение, что когда соответствующее каждой из этих регулярных шкал представление <u>тоже регулярно</u>, то тогда возникают дополнительные технические удобства. В значительной степени эта догадка подтверждается (и конкретизируется) следующими теоремами. Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ – однотипные алгебраические системы, причем $\mathfrak{B}$ – числовая. Представление $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ назовем <u>однородным</u>, если и только если для любых двух шкал $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, f)$, $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, g)$ из этого представления $C_f = C_g$. Пусть, кроме того,

$$\Phi_{\mathcal{A} \to \mathcal{B}} = \bigcup_{f \in \hom(\mathcal{A},\mathcal{B})} C_f .$$

ТЕОРЕМА I.14 [19]. Представление $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ однородно, если и только если $f(A) = g(A)$ для каждых $f, g \in \hom(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

ТЕОРЕМА I.15 [19]. Если представление $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ регулярно и однородно, $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, f_0)$ – произвольная шкала из этого представления, то C_{f_0} – группа (относительно суперпозиции) и $\Phi_{\mathcal{A} \to \mathcal{B}} = C_{f_0}$.

ТЕОРЕМА I.16 [20]. Если представление $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ регулярно, а $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, f)$, $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, g)$ – шкалы, то $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, f)$ имеет тип абсолютный, отношений, интервалов, порядковый или номинальный, если и только если $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, g)$ также имеет тип соответственно абсолютный, отношений, интервалов, порядковый или номинальный.

В связи с таким положением дел полезно располагать достаточными критериями регулярности представлений. Один из них задает

ТЕОРЕМА I.17 [21]. Для любых $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, если существует сюръективная шкала $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, f)$ (сюръективный гомоморфизм f из $\mathcal{A}$ на $\mathcal{B}$) номинального типа, то представление $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ регулярно.

Другой такой критерий обосновывается следующим образом. Для любой данной алгебраической системы $\mathcal{A} = (A\ R_1, \dots, R_p; \ \bullet_1, \dots, \bullet_q)$ будем говорить, что $a, b \in A$ <u>взаимно вполне подстановочны для отношения</u> R_i, $i = 1, \dots, p$, если выполняется условие: для любых двух m-ок $(a_1, \dots, a_m)$ и $(b_1, \dots, b_m)$ элементов из A, если $a_j \neq b_j$ влечет $\{a_j, b_j\} = \{a, b\}$, $j = 1, \dots, m$, то $R_i(a_1, \dots, a_m) \leftrightarrow R_i(b_1, \dots, b_m)$. Мы определяем для данной $\mathcal{A}$ отношение эквивалентности $E_{\mathcal{A}}$ на A, говоря, что $a\, E_{\mathcal{A}}\, b$ тогда и только тогда, когда a и b взаимно вполне подстановочны для всех отношений R_i, $i = 1, \dots, p$. Алгебраическая система $\mathcal{A}$ называется <u>неприводимой</u>, если каждый класс эквивалентности по $E_{\mathcal{A}}$ содержит точно один элемент. В противном случае $\mathcal{A}$ называется <u>приводимой</u>. Имеет место

ТЕОРЕМА I.18 [20]. Для любых $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ таких, что $\hom(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \neq \emptyset$, если $\mathcal{A}$ неприводима, то представление $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ регулярно.

Эта теорема также может служить искомым критерием. И хотя он, конечно, бесполезен в тех случаях, когда рассматриваемое измерение основывается на приводимой эмпирической системе $\mathfrak{A}$, некоторые видные сторонники репрезентационного подхода (например, Пфанцагль) считают, что можно несколько ослабить неприятные последствия указанного обстоятельства. Они предлагают заменять в каждом затруднительном случае исходную приводимую эмпирическую систему $\mathfrak{A}$ на ее фактор-систему $\mathfrak{A}^*$ по отношению $E_{\mathfrak{A}}$, если последнее оказывается отношением конгруэнтности для $\mathfrak{A}$. Можно показать, что получаемые таким образом системы $\mathfrak{A}^*$ всегда неприводимы, а это, согласно теореме I.18, гарантирует регулярность представлений $\mathfrak{A}^* \to \mathfrak{B}$. Разумеется, здесь возникает проблема оправдания подмены исходной эмпирической системы $\mathfrak{A}$ ее фактор-системой $\mathfrak{A}^*$, но мы не будем вдаваться в детали этого вопроса, так как они имеют второстепенный интерес для последующего изложения.

По этой же причине мы опускаем некоторые другие темы, например: вторичные (производные) измерения и связанные с ними системы единиц и размерностей; измерения, основанные на эмпирических системах с частичными операциями; представления $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, где $\mathfrak{B}$ не являются числовыми системами и т.д. Все эти темы предполагают незыблемым главное в репрезентационной теории - саму идею измерительных процедур как гомоморфизмов из эмпирической системы в некоторую символическую конструкцию специального вида. А мы намерены подвергнуть критике репрезентационный подход именно в этом центральном пункте.

Мы собираемся показать, что такое понимание измерений плохо согласовано с тем, что есть самого ценного в них для исследователя, - с операциями получения новых знаний о наблюдаемом мире.

§2. Практика измерений

Рассмотрим несколько детальнее те цели, для достижения которых используются измерения в научных исследованиях.

2.1. Как мы только что заметили, измерения проводятся ради получения сведений о действительности. Поэтому любой результат измерения мы должны уметь рассматривать как закодированную запись сообщения о наблюдениях, имевших место при получении этого результата. Например, результат измерения "интеллектуальных способностей" Петра, выражаемый фразой: "I.q.(коэффициент интеллектуальности) Петра равен 0,8", есть просто-напросто сообщение о том, что Пётр определенным образом вел себя в заданной процедуре тестиро -

вания. Если бы некий числовой результат измерения мы не могли декодировать в высказывание о наблюдениях, то этот числовой результат был бы нам совершенно не нужен, ибо в научном исследовании нас интересуют не числа (о числах мы могли бы высказываться в рамках чистой математики), а факты. Словом, первая цель любого измерения - осуществить определенное (быть может, очень сложное) наблюдение и зафиксировать полученный результат в некотором стандартном (как правило, числовом) коде. В этом смысле измерения являются частным видом опытного наблюдения, а их результаты - частным видом протоколов наблюдения.

2.2. Но это не все, что мы ждем и имеем от измерения в любой конкретной исследовательской ситуации. В самом деле, измерив, например, свой вес (допустим, он оказался равным 70 килограммам), вы получаете возможность с большой долей уверенности правильно предсказывать исходы некоторых наблюдений, которые вы еще не провели, но собираетесь или могли бы провести. В частности, вы уверенно предсказываете, что будет наблюдаться наклон коромысла весов в вашу сторону, если на противоположном конце коромысла поместить любой предмет весом в 50 килограммов. Это предсказание вы осуществляете на основании проведенного наблюдения и на основании той гипотетической связи между отдельными наблюдениями, которая предполагается известной вам, если вы понимаете смысл измерения веса. Словом, результат любого измерения - не просто код исхода отдельного наблюдения, но еще и знание совокупности предполагаемых связей между отдельными наблюдениями. Если упомянутый код обозначить через pr, а упомянутые знания - через H_μ, то результат измерения есть пара (pr, H_μ). Мы говорим, что задаем смысл измерения μ или, короче, задаем измерение μ, если каким-то образом фиксируем для себя H_μ. И мы говорим, что проводим измерение μ, если осуществляем отдельное наблюдение и кодируем его исход в виде pr. Если мы провели измерение, не задав его, мы имеем просто отчет о конкретном наблюдении и только - так иногда мы смотрим на показания совершенно неизвестных нам приборов. Если мы задали измерение, но не провели его, мы имеем просто совокупность предполагаемых связей между отдельными предполагаемыми наблюдениями - так иногда мы гадаем, тяжелее или легче нас наш приятель, не прибегая к взвешиванию. Если же мы провели измерение, предварительно задав его, мы получили возможность, опираясь на фактический исход конкретного наблюдения и пользуясь предполагаемыми связями, предсказать (настолько предположительно, насколько предположительны упомянутые связи) исходы некоторых других наблюдений. Уметь делать подобные предсказания в зависимости от проведенного наблюдения - вторая цель любого измерения.

2.3. Так как любая связь между результатами наблюдений и определяется средствами наблюдения и, в свою, очередь, характеризует их (средства), то читатель уже догадался, что на второй элемент H_μ пары (pr,H_μ) можно смотреть как на совокупность предполагаемых свойств - теорию - измерительных приборов для μ. Правда, в свойствах любого данного измерительного прибора мы никогда не бываем уверены абсолютным образом. Но наша уверенность в них все-таки должна превышать уверенность в любой другой гипотезе, фигурирующей в рассматриваемом исследовании. Ибо благодаря этому измерения выполняют свою особую роль - служат источником исходных данных для всего исследования.

Такова - в общих чертах - практика (прагматика) измерений в исследовательской работе. Наше описание этой практики содержит, конечно, неясности и недомолвки. Но все же после соответствующих уточнений из него легко извлечь новый подход к изучению измерений, отличный от репрезентационного.

§3. Протоколы наблюдений и эмпирические теории*)

Собственно говоря, уточнению подлежат два понятия - понятие наблюдения и понятие теории измерительного прибора. Предварительно имеет смысл сделать несколько неформальных замечаний.

Мы уже сказали, что H_μ есть совокупность предполагаемых свойств измерительного прибора, причем свойств, как-то влияющих на его практическое использование. А это значит, что, каковы бы эти свойства ни были, они небезразличны нам ровно настолько, насколько их постулирование эквивалентно способу предположительно высказаться о тех или иных возможных наблюдениях. Поэтому мы ничего не потеряем в общности, полагая, что всякая теория H_μ есть просто предположение вида: если мы будем наблюдать мир определенным образом O (например, определенным образом манипулируя рас-

---

*) Ср. [22,23].

сматриваемым прибором), то никогда не получим наблюдений определенного типа Σ (например, определенных показаний прибора). При этом мы тогда и только тогда говорим, что данную теорию мы принимаем (а не просто излагаем), когда соглашаемся не ожидать событий типа Σ, если в нашей исследовательской деятельности мы не собираемся выходить за рамки осуществления способа наблюдений O. Согласившись чего-то не ждать, мы тем самым направляем ход исследования. Собственно говоря, задать измерение μ и означает принять теорию H_μ.

Разумеется, не исключено, что, приняв какую-то теорию о данном приборе, мы поступили опрометчиво, и когда это выясняется (в результате наблюдения события, которое мы согласились не ожидать), мы говорим, что теория прибора оказалась ошибочной, или, что то же, прибор оказался не тем.

Варьируя всевозможные описания какого-нибудь способа наблюдения O и какого-нибудь типа наблюдений Σ, мы пробегаем все мыслимые представления отдельной (соответствующей данным O и Σ) теории. Однако никогда нет нужды иметь дело сразу со всеми этими необозримыми классами сколь угодно разнообразных описаний каждой пары (O,Σ). Фактически достаточно выделить всего лишь один подходящий класс описаний всевозможных O и Σ, чтобы ничего не упустить из того, что нас по существу интересует в произвольных эмпирических теориях – теориях о произвольных (в частности, измерительных) приборах.

Такой канонический способ описывать O и Σ предлагается в п. 3.2. В п.3.3 излагается другой, так называемый аксиоматический подход к представлению эмпирических теорий. Хотя он значительно более специален, чем первый, он тем не менее все-таки достаточно общ, чтобы в его рамках умещались описания любых разумных (на данном этапе развития опытных наук) измерительных процедур. С другой стороны, он может до некоторой степени считаться привычным. По этим двум причинам именно его-то мы и выбираем в §4 в качестве основного способа представления теорий H_μ. Пункт 3.I содержит уточнение понятия наблюдения.

3.I. Если спросить себя, что собственно мы наблюдаем, когда мы что-то наблюдаем, то самый общий ответ заключается в следующем: мы наблюдаем всякий раз какую-то конечную конструкцию, состоящую из того, что мы называем объектами наблюдения, и того, что мы называем свойствами или связями этих объектов. И здесь имеется значительный простор для соглашений, по-разному уточняющих смысл того, что понимается под конечной конструкцией из объектов, их свойств и связей. В зависимости от конкретных целей можно выбирать то или иное конкретное понимание. В частности, в этой работе мы принимаем соглашение о том, что наблюдение есть $(k+1)$-ка $(A, P_1, \ldots, P_k)$, где A есть конечное (непустое) множество, а $P_1, \ldots, P_k$ - обычные отношения на A. То есть для нас наблюдения суть просто конечные модели конечных сигнатур[ж)].

Любую из этих моделей можно, разумеется, описать многими способами, и один вид таких описаний состоит из специальных языковых конструкций, которые мы сейчас определим под названием протоколов.

Пусть $\mathfrak{m}^v$ - класс всех конечных моделей сигнатуры $v = (\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_k)$. Пусть α - фиксированный счетный алфавит символов, отличных от $\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_k$. Для любой $\mathfrak{M}$ из $\mathfrak{m}^v$ пусть $D^{v,\alpha}(\mathfrak{M})$ есть диаграмма модели $\mathfrak{M}$, индивидные символы которой (диаграммы) принадлежат α.

Протоколом pr^v (в словаре v) будем называть произвольный элемент класса $\{D^{v,\alpha}(\mathfrak{M}) \mid \mathfrak{M} \in \mathfrak{m}^v\}$. Если мы хотим подчеркнуть, что для данных $\mathfrak{M}$ и pr^v имеет место равенство $pr^v = D^{v,\alpha}(\mathfrak{M})$, мы называем pr^v протоколом (в словаре v) наблюдения $\mathfrak{M}$ и пишем $pr^v(\mathfrak{M})$ вместо pr^v. Это как раз то, что выше мы подразумевали под pr.

Базисом $B(pr^v)$ данного протокола pr^v мы называем множество всех индивидных констант, участвующих в записи этого протокола. (Очевидно, для любого pr^v $B(pr^v) \subset \alpha$.)

Мощностью $\bar{\bar{B}}(pr^v)$ протокола pr^v называется мощность множества $B(pr^v)$.

Протоколы pr_1^v и pr_2^v изоморфны ($pr_1^v \approx pr_2^v$), если и только если они могут быть сделаны равными взаимно-однозначной переименовкой базиса одного из них. Ясно, что одному наблюдению $\mathfrak{M}$ соответствует счетное число изоморфных протоколов $pr^v(\mathfrak{M})$ этого наблюдения. С другой стороны, один и тот же протокол pr^v может описывать различные наблюдения $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$, лишь бы эти наблюдения были изоморфны как модели.

ж) Естественнее было бы считать, что наблюдение - это не только какая-то конечная модель, но и любая ее "часть" (понимаемая в очевидном смысле). Однако проведение этой точки зрения заметно загромождает изложение, ничего не меняя в принципиальной стороне дела.

3.2. Вернемся к понятию эмпирической теории. Еще раз подчеркнем, что как бы ни выглядела данная эмпирическая теория, о каких бы далеких от наблюдения материях в ней речь ни шла, она имеет практическую ценность ровно настолько, насколько она задает упомянутые ранее O и Σ . Это значит, что в рамках нашего соглашения о том, что такое наблюдение, мы можем всякую эмпирическую теорию H отождествлять с подходящей тройкой (v, obs^v, T^v) , где

а) v – конечное множество символов вида $\tilde{P}_1^{m_1}, \dots, \tilde{P}_k^{m_k}$. Каждый символ $\tilde{P}_i^{m_i}$, $i=1,\dots,k$, называется m_i-арным предикатным символом, а само множество v называется словарем (или сигнатурой) теории H ;

б) obs^v – инструкция о том, как и чем проводить наблюдения, чтобы они вообще относились к рассматриваемой теории. От этой инструкции требуются только две вещи:

б1) чтобы для любого наблюдения, как бы оно ни было проведено, мы могли сказать, получено ли оно в соответствии с инструкцией obs^v или в нарушение ее;

б2) чтобы любое наблюдение, если оно получено в соответствии с obs^v, было конечной моделью сигнатуры v и, следовательно, допускало описание каким-нибудь протоколом в словаре v *);

в) T^v – произвольный алгоритм (называемый тестовым) такой, что

в1) T^v определен на всяком протоколе pr^v в словаре v и принимает только два значения (0 или 1):

$$(\forall pr^v)(T^v(pr^v) = 0 \vee T^v(pr^v) = 1);$$

в2) на изоморфных протоколах T^v принимает равные значения:

$$(\forall pr_1^v)(\forall pr_2^v)(pr_1^v \approx pr_2^v \to T^v(pr_1^v) = T^v(pr_2^v));$$

---

*) Заметим, что инструкция obs^v не синтаксический объект, так как она есть не бессодержательный набор символов, а осмысленный текст, который мы должны понимать. Когда два человека один и тот же такой текст трактуют по-разному, то они имеют дело с различными obs-ами. Заметим еще, что $obs_1^{v_1} = obs_2^{v_2}$ есть сокращение для: "инструкции $obs_1^{v_1}$, $obs_2^{v_2}$ текстуально совпадают и понимаются одинаково".

в3) T^v хоть на одном протоколе принимает значение I: $(\exists pr^v)(T^v(pr^v) = 1)$.

Пусть задана какая-то теория H в виде тройки (v, obs^v, T^v): $H = (v, obs^v, T^v)$. Тогда ее эмпирический смысл вполне определяется следующим соглашением: для всякой конечной модели $\mathfrak{M}$ считается, что H опровергается наблюдением $\mathfrak{M}$, если и только если модель $\mathfrak{M}$ есть наблюдение, полученное в соответствии с obs^v (и, следовательно, $\mathfrak{M}$ имеет сигнатуру v), а $T^v(pr(\mathfrak{M})) = 0$ [ж)]. Если H не опровергается наблюдением $\mathfrak{M}$, то считается, что H согласуется с $\mathfrak{M}$. Ясно, что требования бI и б2 на obs^v и требование вI на T^v гарантируют для произвольной конечной модели $\mathfrak{M}$ (неважно, каким путем полученной и какой конечной сигнатуры) установление ответа на вопрос: опровергается H наблюдением $\mathfrak{M}$ или H согласуется с этим наблюдением? В силу условия в2 факт опровержения (или согласия) теории (с) наблюдением не зависит от нашего произвола в наименовании объектов наблюдения при записи протокола $pr^v(\mathfrak{M})$. А в силу в3 факт опровержения теории каким-либо наблюдением не может быть установлен заранее, до проведения всяких наблюдений. Кроме того, определение теории согласуется с "принципом фальсификации": теория H может быть опровергнута одним единственным наблюдением (если T^v хоть на одном протоколе pr^v принимает значение 0), но никогда не может быть доказана раз и навсегда.

Все это можно выразить иначе: теория $H = (v, obs^v, T^v)$ высказывается (предположительно) о том, что если мы будем наблюдать мир определенным образом O, а именно в соответствии с инструкцией obs^v, то никогда не получим наблюдений определенного типа Σ, а именно тех, на протоколах которых тестовый алгоритм T^v принимает значение 0 .

Представление теории в виде тройки (v, obs^v, T^v) будем называть каноническим.

3.3. Каноническое представление является одним из двух, рассматриваемых в настоящей статье способов задавать эмпирические теории. Второй из них есть так называемый "аксиоматический подход" к описанию теорий. В его рамках эмпирическая теория задается тройкой (v, obs^v, S^{Ω}), первые два члена которой имеют те же смыслы,

---

ж) Мы предполагаем (ничем при этом не рискуя), что любая конечная модель любой конечной сигнатуры рассматривается как результат какого-то наблюдения, понимаемого, если нужно, очень широко.

что и ранее, а третий есть уже не тестовый алгоритм T^v, а некая аксиоматическая система S^Ω (в логике первого порядка с равенством) конечной сигнатуры Ω, объемлющей словарь v*).

Теперь сигнатурой (всей) теории H называется множество Ω, а его часть v называется словарем (сигнатурой) терминов наблюдения (теории H). Сигнатурный предикатный символ $\tilde{P}_i^{m_i}$ называется термином наблюдения (теории H), если $\tilde{P}_i^{m_i} \in v$; в противном случае он называется теоретическим термином (теории H). Если $\Omega = v$, то H называется теорией без теоретических терминов.

Теоретические термины теории не называют (в отличие от терминов наблюдения) какие-либо наблюдаемые в соответствии с данной инструкцией obs^v отношения. В этом смысле они вообще лишены эмпирической значимости. Однако они играют определенную роль в контексте вопросов, связанных с удобствами технического (не принципиального) характера. Конкретнее об этом говорится в [22,23].

Аксиоматическая система S^Ω в рассматриваемом описании эмпирической теории играет роль, аналогичную той, которую играл ранее тестовый алгоритм T^v. Чтобы быть точными, введем некоторые дополнительные понятия. Пусть $\mathfrak{M}^\Omega$ - произвольная модель (конечной) сигнатуры Ω и пусть $v \subseteq \Omega$. Тогда через $\mathfrak{M}^\Omega|_v$ мы обозначаем модель сигнатуры v, получаемую из модели $\mathfrak{M}^\Omega$ выбрасыванием тех отношений, названия которых не принадлежат v. Будем говорить, что модель $\mathfrak{M}^v$ (сигнатуры v) есть конечный редукт к v модели $\mathfrak{M}^\Omega$, если и только если $\mathfrak{M}^v$ конечна и изоморфно вложима в $\mathfrak{M}^\Omega$, т.е.

$$(\exists \mathfrak{M}_1^\Omega)(\mathfrak{M}_1^\Omega \text{ - подмодель } \mathfrak{M}^\Omega \,\&\, \mathfrak{M}_1^\Omega|_v \approx \mathfrak{M}^v \,\&\, \mathfrak{M}^v \text{ конечна}).$$

Пусть $m(S^\Omega)$ - класс всех моделей аксиоматической системы S^Ω. Назовем $m^v(S^\Omega)$-классом класс всех моделей сигнатуры v, являющихся конечными редуктами к v хотя бы для одной модели $\mathfrak{M}^\Omega$ аксиоматической системы S^Ω. То есть пусть $m^v(S^\Omega) = \{\mathfrak{M}^v | (\exists \mathfrak{M}^\Omega)(\mathfrak{M}^\Omega \in m(S^\Omega) \,\&\, \mathfrak{M}^v$ есть конечный редукт к v модели $\mathfrak{M}^\Omega)\}$.

Прежде мы говорили, что наблюдение $\mathfrak{M}$ опровергает теорию $H = (v, obs^v, T^v)$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ получено в рамках инструкции obs^v, а протокол $pr^v(\mathfrak{M})$ таков, что $T^v(pr^v(\mathfrak{M})) = 0$. Теперь, при аксиоматическом подходе, говорим, что наблюдение $\mathfrak{M}$ опровергает эмпирическую теорию $H = (v, obs^v, S^\Omega)$, если и только

*) Без ограничения общности мы можем полагать, что Ω не содержит функциональных символов и индивидных констант.

если $\mathfrak{M}$ получено в соответствии с инструкцией obs^v и $\mathfrak{M}$ не принадлежит $m^v(S^\Omega)$-классу. В любом другом случае $\mathfrak{M}$ согласуется с H. Аналогия между употреблениями T^v и S^Ω в соответствующих представлениях эмпирических теорий налицо. Следует только отметить, что аналогом требования в3 является требование непротиворечивости S^Ω, а аналог требования в2 выполняется автоматически, поскольку класс моделей любой аксиоматической системы замкнут относительно изоморфизмов. Однако без дополнительных ограничений на S^Ω нельзя говорить о том, что при аксиоматическом описании эмпирических теорий выполняется требование, аналогичное требованию вI.

В общем случае проблема, принадлежит ли данная конечная модель $\mathfrak{M}$ классу $m^v(S^\Omega)$, не является эффективно разрешимой, и поэтому не для всех систем S^Ω условие $\mathfrak{M} \in m^v(S^\Omega)$ допускает проверку некоторым алгоритмом. Это означает, в свою очередь, что не всякая тройка вида (v, obs^v, S^Ω) вполне осмысленна как эмпирическая теория. Поэтому сразу возникает вопрос: для каких S^Ω условие $\mathfrak{M} \in m^v(S^\Omega)$ является эффективно разрешимым? К сожалению, - и в этом большой недостаток аксиоматического подхода, - не известна удобная и исчерпывающая характеризация аксиоматических систем S^Ω с эффективно разрешимыми $m^v(S^\Omega)$-классами[x]. Известно только, какие более или менее удобные в употреблении ограничения на S^Ω являются достаточными для эффективной разрешимости $m^v(S^\Omega)$-класса. Мы будем говорить об этом ниже в §4, а пока заметим лишь, что задание теории H в виде тройки (v, obs^v, S^Ω) предполагает разрешимость соответствующего $m^v(S^\Omega)$-класса.

Представление H в виде (v, obs^v, S^Ω) походит (но несколько отличается) на то, что обычно понимают под аксиоматической эмпирической теорией в методологической литературе. С традиционной точки зрения аксиоматическая эмпирическая теория H есть пара (S^Ω, m^*), где S^Ω - аксиоматическая система (сигнатуры Ω), а m^* - некий собственный подкласс класса $m(S^\Omega)$ всех возможных моделей аксиоматической системы S^Ω. Элементы m^* - подразумеваемые интерпретации ("возможные миры") теории H. Так как m^* - собственный подкласс

[x] Обращаем внимание читателя на то, что всюду, где мы говорим об эффективной разрешимости или неразрешимости (абстрактных) классов конечных моделей, мы принимаем следующее соглашение: произвольный класс N^v конечных моделей сигнатуры v эффективно разрешим тогда и только тогда, когда разрешим класс $\{D^{v,\alpha}(\mathfrak{N}) \mid \mathfrak{N} \in N^v\}$.

класс класса всех возможных моделей системы S^{Ω}, то он не может быть задан одними лишь средствами S^{Ω}, чем как раз и определяется естественнонаучный (не чисто математический) характер H. Считается при этом, что такого рода теории нам нужны для того, чтобы знать (с известной долей определенности), какова "подлинная картина мира". Представитель подобных взглядов принимает теорию $H = (S^{\Omega}, m^*)$ тогда и только тогда, когда он полагает, что тот фрагмент реальности, который его интересует в связи с данной H, действительно совпадает с одним из (точно не известно, с каким именно) элементов класса m^*.

Такое представление неудовлетворительно по нескольким причинам. Например, одна из них состоит в том, что при таком подходе к аксиоматическим эмпирическим теориям становится труднообъяснимой роль аксиом - роль первого элемента пары (S^{Ω}, m^*). Вторая же - и главная - причина неудовлетворительности традиционного понимания аксиоматических эмпирических теорий заключается в том, что для многих теорий вида (S^{Ω}, m^*) труднообъяснима роль класса m^* - роль второго элемента пары (S^{Ω}, m^*).

Что касается первого затруднения, то дело здесь в следующем. Если мы уже знаем, каков подкласс m^* класса $m(S^{\Omega})$, то зачем нам еще знать, учитывая традиционное воззрение на назначение теории (S^{Ω}, m^*), каков сам класс $m(S^{\Omega})$ (какова аксиоматика S^{Ω})? Если же мы не знаем, каков m^*, то знание аксиоматики S^{Ω} никак не делает теорию $H = (S^{\Omega}, m^*)$ хоть в какой-то степени более значимой, чем просто чисто математическая дисциплина. Иными словами, если класс m^* задан, то задание аксиоматики S^{Ω} является излишним для достижения традиционно понимаемых целей построения эмпирической теории. А если класс m^* не задан, то задание аксиоматики S^{Ω} бесполезно для тех же целей.

Вторая трудность связана с тем, что никакие высокие речи о "подлинных картинах мира" не избавляют нас от необходимости усматривать в теориях вида (S^{Ω}, m^*) какую-то практическую ценность. А это вновь означает, что мы должны уметь извлекать из рассматриваемого представления теории H описание подходящей пары (O, Σ). К сожалению, на практике системы S^{Ω} часто таковы, что они вообще не допускают конечных моделей. Но тогда возникает вопрос: как же все-таки класс m^* (теория (S^{Ω}, m^*)) связан(а) с наблюдениями? Ведь наблюдать-то бесконечные модели, т.е. бесконечные "возможные миры", мы заведомо не в состоянии? Если оставить этот вопрос без внимания, то – настойчиво подчеркнем еще раз – мы лишаемся возможности гарантировать хоть какую-то практическую значимость теориям вида (S^{Ω}, m^{*}). А если попытаться ответить на него в том привычном направлении мысли, что, мол-де, возможные с точки зрения данной теории наблюдения суть конечные "клочки" пусть даже бесконечных "возможных миров", то мы естественным образом придем к представлению аксиоматической эмпирической теории в виде тройки (v, obs^{V}, S^{Ω}).

3.4. Хотя бóльшая специальность аксиоматических представлений эмпирических теорий по сравнению с их каноническими представлениями видна без каких бы то ни было комментариев, все-таки полезно выразить этот факт точным образом. Тем более, что для этого мы собираемся ввести понятия, нужные нам и по другим причинам.

Для любых двух конечных моделей (наблюдений) $\mathfrak{M}_1 = (A_1, P_1, \ldots$ $\ldots, P_{k_1})$ и $\mathfrak{M}_2 = (A_2, R_1, \ldots, R_{k_2})$ будем писать $\mathfrak{M}_1 \overset{e}{\approx} \mathfrak{M}_2$, если и только если $A_1 = A_2$. И будем говорить, что произвольные две теории H_1 и H_2 <u>эмпирически равноценны</u> $(H_1 \overset{E}{\approx} H_2)$, если и только если всякая модель $\mathfrak{M}_1$ опровергает H_1 в точности тогда, когда существует модель $\mathfrak{M}_2$ такая, что $\mathfrak{M}_2$ опровергает H_2 и $\mathfrak{M}_2 \overset{e}{\approx} \mathfrak{M}_1$ x).

Легко видеть из этих определений, что подобно $\overset{e}{\approx}$ отношение $\overset{E}{\approx}$ является эквивалентностью. А раз так, то <u>эмпирическое содержание</u> произвольной теории H в той мере, в какой оно не зависит от нашего произвола в выборе конкретного представления теории, можно отождествить с классом эквивалентности $[H]$, которому принадлежит H в разбиении множества всех интересующих нас теорий на смежные классы по $\overset{E}{\approx}$.

Аксиоматическое представление эмпирических теорий проигрывает в общности каноническому в следующем точном смысле. Для всякой теории H вида (v, obs^{V}, S^{Ω}) (с эффективно разрешимым, напоминаем, $m^{V}(S^{\Omega})$-классом) всегда найдется теория H' вида (v, obs^{V}, T^{V}) с

---

x) Как правило, мы не знаем, эмпирически равноценны или нет произвольные две теории H_1 и H_2; но в некоторых специальных случаях, например, когда obs рассматриваемых теорий одинаковы, этот вопрос подлежит математическому исследованию, и мы можем надеяться тогда даже <u>доказать</u>, что $H_1 \overset{E}{\approx} H_2$ (или, что не $H_1 \overset{E}{\approx} H_2$).

тем же самым эмпирическим содержанием. Но не для всякой теории H' вида (v,obs^{v},T^{v}) существует теория H вида (v,obs^{v},S^{Ω}) такая,что $[H] = [H']$.

§4. Утилитарная теория измерений

Эпитет "утилитарная" подчеркивает наше стремление иметь в качестве теории измерений достаточно строгое и подходящим образом обобщенное изложение практики измерений. До сих пор наше описание этой практики страдало неточностями, но сейчас, опираясь на содержание предыдущего параграфа, мы в состоянии их устранить.

4.I. Вспомним, что любая эмпирическая теория есть теория каких-то приборов (понимаемых, если надо, очень широко).Поэтому возникает вопрос: какова специфика теорий не каких угодно, а именно измерительных приборов? А так как от нас самих зависит, использовать ли любой данный прибор в качестве измерительного или нет, то реальный смысл поставленного вопроса заключается вот в чем: какими эмпирическими теориями удобно манипулировать в научных исследованиях как исходными данными? Жизнь показывает, что есть три общих требования к теориям, соблюдение которых существенно в этой связи. Во-первых, теории измерительных приборов должны быть аксиоматическими без теоретических терминов.Во-вторых,эти теории должны допускать возможность измерения любого конечного числа измеряемых объектов. В-третьих, они должны быть согласованы с предположением: для всякого наблюдения (модели) $\mathfrak{M}$, если $\mathfrak{M}$ не опровергает данную теорию, то любое поднаблюдение (подмодель) $\mathfrak{M}$ также не опровергает ее. Условимся говорить, что эмпирическая теория H является:

(i) измерительной в широком смысле, если она удовлетворяет второму из перечислимых требований;

(ii) стандартной измерительной, если H - измерительная в широком смысле и удовлетворяет третьему требованию;

(iii) измерительной в узком смысле, или обычной, если она удовлетворяет всем трем перечисленным требованиям.

Название "обычная" мотивируется тем, что этот тип теорий измерительных приборов широко распространен и привычен в наиболее развитой к настоящему времени эмпирической дисциплине - физике. Что же касается природы различий между классами стандартных измерительных и измерительных в широком смысле теорий, то по этому поводу читатель отсылается к работе [24, с.131-134].

Сейчас мы приведем точные определения измерительных в широком смысле и стандартных измерительных теорий. И мы дадим точное описание достаточно интересного и широкого подкласса класса обычных измерительных теорий. Теории этого подкласса предлагается называть простыми.

Эмпирическая теория H называется измерительной в широком смысле, если и только если $H = (v, obs^v, T^v)$ и тестовый алгоритм T^v удовлетворяет (в дополнение к требованиям "в1"-"в-3") требованию

в4) $(\forall n)(\exists pr^v)(T^v(pr^v) = 1 \;\&\; \bar{\bar{B}}(pr^v) = n)$;

и эмпирическая теория H называется стандартной измерительной, если и только если $H = (v, obs^v, T^v)$ и тестовый алгоритм T^v удовлетворяет еще одному дополнительному (к "в1"-"в4") требованию

в5) $(\forall pr^v_1)(\forall pr^v_2)(T^v(pr^v_1) = 1 \;\&\; pr^v_2 \subseteq pr^v_1 \to T^v(pr^v_2) = 1)$,

где $pr^v_2 \subseteq pr^v_1$ означает, что протокол pr^v_2 есть подпротокол (подмножество, являющееся протоколом) протокола pr^v_1.

Пусть σ - наименьший класс аксиоматических систем такой, что

а) всякая конечно-аксиоматизируемая универсальная аксиоматическая система конечной предикатной сигнатуры (в логике первого порядка с равенством), имеющая модели любой конечной мощности, принадлежит σ;

б) если S^v принадлежит σ, то $S^v \cup \{(\exists z_{a_1})\ldots(\exists z_{a_n}) pr^v_{\&}(\mathfrak{M})\}$ также принадлежит σ (здесь $\mathfrak{M}$ - произвольная конечная модель для S^v; $pr^v_{\&}$ - конъюнкция элементов протокола pr^v; $\{z_{a_1}, \ldots, z_{a_n}\} = B(pr^v(\mathfrak{M}))$). Легко убедиться, что если $S^v \in \sigma$, то $m^v(S^v)$-класс эффективно разрешим.

Эмпирическая теория H называется простой измерительной, если и только если $H = (v, obs^v, S^v)$ и $S^v \in \sigma$. Почти очевидно (проверку оставляем читателю), что класс обычных измерительных теорий объемлет класс простых. Относительно обратного включения мы ничего не утверждаем, хотя выглядит весьма правдоподобной гипотеза, что оно также имеет место. Но в любом случае класс простых измерительных теорий сам по себе достаточно обширен, чтобы быть интересным с прикладной точки зрения. Более того, вообще трудно указать конкретный практически используемый (не специально придуманный) измерительный прибор, который нельзя было бы описать простой измерительной теорией. Именно это мы имели в виду, когда в начале предыдущего параграфа заметили, что аксиоматическое описание измерительных приборов мы выбираем в качестве основного способа представления теорий H_μ.

Впрочем, мы не собираемся ограничить общность нашего рассмотрения, ссылаясь на указанное обстоятельство как на оправдание такого ограничения. Заметим, кстати, что эмпирическую теорию H мы будем называть просто измерительной, если H либо измерительная в широком смысле, либо стандартная измерительная, либо простая измерительная, и нам почему-то не важно, какая именно.

Пусть H - эмпирическая теория и $\mathfrak{M}$ - наблюдение, проведенное в соответствии с obs H, но не опровергающее H. Тогда пару $(pr^{v}(\mathfrak{M}), H)$ будем называть допустимой. Первое уточнение нашего описания практики измерений состоит в том, что отныне результатом измерения μ будем называть допустимую пару $(pr^{v\mu}(\mathfrak{M}), H_\mu)$, где H_μ - измерительная теория (задающая измерение μ).

4.2. Перейдем к дальнейшим уточнениям. Как мы только что сказали, результат любого измерения μ есть допустимая пара $(pr^{v\mu}(\mathfrak{M}), H_\mu)$. Немедленно возникает вопрос: ну и что? Мало ведь иметь результат измерения, нужно еще уметь им воспользоваться на будущее. А это значит нужно уметь делать предсказания (в виде подходящей эмпирической теории H_ν) в зависимости от пары $(pr^{v\mu}(\mathfrak{M}), H_\mu)$. Если мы из одних и тех же результатов измерений "извлекаем" для себя разные ожидания на будущее (разные теории H_ν), то, собственно говоря, мы имеем дело с различными практиками измерений. Поэтому точное описание практики измерений сводится к заданию отображения f: $\pi \to \vartheta$, где π - некий класс результатов измерений, а ϑ - некий класс эмпирических теорий. При этом предполагается, что если $H_\nu = f(pr^{v\mu}(\mathfrak{M}), H_\mu)$, то эмпирическая теория H_ν принимается нами всякий раз, когда принимается измерительная теория H_μ, а протокол $pr^{v\mu}(\mathfrak{M})$ описывает фактически проведенное (а не воображаемое) наблюдение $\mathfrak{M}$. Всякое отображение f указанного вида будем называть принципом практики измерений.

Принципы практики измерений должны удовлетворять определенным ограничениям, если мы хотим гарантировать наличие у практики измерений некоторых желательных особенностей или хотим гарантировать отсутствие у нее некоторых нежелательных свойств. Мы рассмотрим три набора таких ограничений и, следовательно, три класса принципов практики измерений.

Предварительно введем несколько служебных понятий.

Будем говорить, что эмпирические теории H_1 и H_2 формально канонически равны ($H_1 \overset{FC}{=} H_2$), если и только если $H_1 = (v_1, obs_1^{v_1}, T_1^{v_1})$, $H_2 = (v_2, obs_2^{v_2}, T_2^{v_2})$, $v_1 = v_2$, $T_1^{v_1} = T_2^{v_2}$. И мы говорим, что H_1, H_2 формально аксиоматически равны ($H_1 \overset{FA}{=} H_2$), если и только если $H_1 = (v_1, obs_1^{v_1}, S_1^{\Omega_1})$, $H_2 = (v_2, obs_2^{v_2}, S_2^{\Omega_2})$, $v_1 = v_2$, $S_1^{\Omega_1} = S_2^{\Omega_2}$. Аналогичным образом допустимые пары $(pr_1^{v_1}(\mathfrak{M}_1), H_1)$, $(pr_2^{v_2}(\mathfrak{M}_2), H_2)$ формально канонически равны $((pr_1^{v_1}(\mathfrak{M}_1), H_1) \overset{fc}{=} (pr_2^{v_2}(\mathfrak{M}_2), H_2))$ или формально аксиоматически равны $(pr_1^{v_1}(\mathfrak{M}_1), H_1) \overset{fa}{=} (pr_2^{v_2}(\mathfrak{M}_2), H_2))$, если и только если $pr_1^{v_1}(\mathfrak{M}_1) \approx pr_2^{v_2}(\mathfrak{M}_2)$, и соответственно $H_1 \overset{FC}{=} H_2$ или $H_1 \overset{FA}{=} H_2$.

Отношение $\overset{FC}{=}$ - эквивалентность на любом классе канонических эмпирических теорий, $\overset{FA}{=}$ - эквивалентность на любом классе аксиоматических эмпирических теорий, отношения $\overset{fc}{=}$ и $\overset{fa}{=}$ - эквивалентности на соответствующих классах допустимых пар.

Если H - эмпирическая теория, то пусть

$$PR_H = \begin{cases} \{pr^v \mid T^v(pr^v) = 1\}, \text{ если } H = (v, obs^v, T^v); \\ \{pr^v(\mathfrak{M}) \mid \mathfrak{M} \in m^v(S^\Omega)\}, \text{ если } H = (v, obs^v, S^\Omega). \end{cases}$$

Условимся говорить, что эмпирическая теория H_1 сильнее (строго сильнее), чем эмпирическая теория H_2, если и только если PR_{H_1} есть подмножество (собственное подмножество) множества PR_{H_2}. Мы пишем $H_1 \succeq H_2$, если H_1 сильнее H_2; и пишем $H_1 \succ H_2$, если H_1 строго сильнее H_2.

Отношения $\succeq$, $\succ$ - частичные порядки на любом классе эмпирических теорий. Их интуитивный смысл таков: если $H_1 \succeq H_2$ ($H_1 \succ H_2$), то

H_1 высказывается о возможных наблюдениях не менее (более) определенно, чем H_2. Иными словами, принятие H_1 позволяет в общем более точно (хотя и более рискованно) направить ход научного исследования, чем принятие H_2.

Вернемся к принципам практики измерений. Пусть ϑ_τ - класс всех измерительных теорий в широком смысле и пусть π_τ - класс всех допустимых пар $(\mathrm{pr}^{\overset{\vee}{}\mu}(\mathfrak{M}), H_\mu)$ таких, что $H_\mu \in \vartheta_\tau$. Тогда первый из трех упомянутых ранее наборов ограничений на функции f состоит из следующих требований:

RI.1) $f: \pi_\tau \to \vartheta_\tau$;

RI.2) если $H_\nu = f(\mathrm{pr}^{\overset{\vee}{}\mu}(\mathfrak{M}), H_\mu)$, $H_\mu = (v_\mu, \mathrm{obs}_\mu^{\overset{\vee}{\mu}}, T_\mu^{\overset{\vee}{\mu}})$,

$H_\nu = (v_\nu, \mathrm{obs}_\nu^{\overset{\vee}{\nu}}, T_\nu^{\overset{\vee}{\nu}})$, то $v_\mu = v_\nu$, $\mathrm{obs}_\mu^{\overset{\vee}{\mu}} = \mathrm{obs}_\nu^{\overset{\vee}{\nu}}$;

RI.3) если $H_\nu = f(\mathrm{pr}^{\overset{\vee}{}\mu}(\mathfrak{M}), H_\mu)$, то $(\mathrm{pr}^{\overset{\vee}{}\mu}(\mathfrak{M}), H_\nu)$ - допустимая пара;

RI.4) если $H_\nu = f(\mathrm{pr}^{\overset{\vee}{}\mu}(\mathfrak{M}), H_\mu)$, то $H_\nu \succeq H_\mu$;

RI.5) существует такая допустимая пара $(\mathrm{pr}^{\overset{\vee}{}\mu}(\mathfrak{M}), H_\mu) \in \pi_\tau$, что $f(\mathrm{pr}^{\overset{\vee}{}\mu}(\mathfrak{M}), H_\mu) \succ H_\mu$;

RI.6) если $H_\nu = f(\mathrm{pr}^{\overset{\vee}{}\mu}(\mathfrak{M}), H_\mu)$, $H_\varkappa = f(\mathrm{pr}^{\overset{\vee}{}\lambda}(\mathfrak{N}), H_\lambda)$,

$\mathfrak{M} \cong \mathfrak{N}$, $H_\mu \overset{E}{\approx} H_\lambda$, то $H_\nu \overset{E}{\approx} H_\varkappa$;

RI.7) если $H_\nu = f(\mathrm{pr}^{\overset{\vee}{}\mu}(\mathfrak{M}), H_\mu)$, $H_\varkappa = f(\mathrm{pr}^{\overset{\vee}{}\lambda}(\mathfrak{N}), H_\lambda)$,

$(\mathrm{pr}^{\overset{\vee}{}\mu}(\mathfrak{M}), H_\mu) \overset{fc}{=} (\mathrm{pr}^{\overset{\vee}{}\lambda}(\mathfrak{N}), H_\lambda)$, то $H_\nu \overset{FC}{=} H_\varkappa$.

Принципы практики измерений, удовлетворяющие этим требованиям, условимся называть <u>τ-регулярными</u>. Среди этих требований есть как те, что отвечают нашим <u>субъективным</u> оценкам практики измере -

ний (могли бы поступать иначе, но не хотим из-за каких-то неудобств, капризов и т.д.), так и те, которые ответственны за соблюдение объективных условий познавательной ценности наших манипуляций с измерительными приборами и их теоретическими описаниями (могли бы поступать иначе, но это было бы неоправданно с познавательной точки зрения). Требование первого типа – RI.I, остальные требования RI.2-RI.7 относятся ко второму типу. Не вдаваясь в обоснование этих заявлений (читатель найдет его в работе [23,с.27-38]), заметим лишь, что требования RI.2-RI.7 весьма естественны; они даже необходимы для того, чтобы какой-либо принцип практики измерений f, удовлетворяющий RI.I, вообще мог претендовать на роль небесполезного в познавательном отношении.

Совершенно аналогичные замечания можно было бы сделать по отношению к следующим ниже требованиям RП.I-RП.7 и RШ.I-RШ.7.

Пусть $\vartheta_{\sigma\tau}$ – класс всех измерительных стандартных теорий и пусть $\pi_{\sigma\tau}$ – класс всех допустимых пар $(pr^{v}(\mathfrak{M}),H_{\mu})$ таких, что $H_{\mu}\in\vartheta_{\sigma\tau}$. Тогда второй набор ограничений RП.I-RП.7 получается из набора RI.I-RI.7 заменой в нем всякого вхождения π_{τ} на $\pi_{\sigma\tau}$, а ϑ_{τ} – на $\vartheta_{\sigma\tau}$. Принципы практики измерений, удовлетворяющие RП.I-RП.7, условимся называть $\sigma\tau$-регулярными.

Третий набор ограничений на f получается из набора RI.I-RI.7 заменой в нем всюду $\overset{v}{T}{}_{\mu}^{\mu}$ на $\overset{v}{S}{}_{\mu}^{\mu}$, $\overset{v}{T}{}_{\nu}^{\nu}$ – на $\overset{v}{S}{}_{\nu}^{\nu}$, $\overset{fc}{=}$ – на $\overset{fa}{=}$, $\overset{FC}{=}$ на $\overset{FA}{=}$, π_{τ} – на π_{σ}, ϑ_{τ} – на ϑ_{σ}, где ϑ_{σ} – класс всех простых измерительных теорий; π_{σ} – класс всех допустимых пар $(pr^{\overset{v}{\mu}}(\mathfrak{M}),H_{\mu})$ таких, что $H_{\mu}\in\vartheta_{\sigma}$. Принципы практики измерений, удовлетворяющие этим новым требованиям RШ.I-RШ.7, будем называть σ-регулярными.

4.3. Как устроены классы τ-, $\sigma\tau$-, σ-регулярных принципов практики измерений? Оказывается, весьма просто (ср.[23,гл.П,§2]).

Пусть Θ – класс всех тестовых алгоритмов, П – класс всех протоколов. Определим отображение F_1: $\Theta\times\Pi\to\Theta$ условием: для любой пары (T_0^v,pr_0^v) из $\Theta\times\Pi$ и любого протокола pr^v из П имеет место соотношение:

$$F_1(T_0^v,pr_0^v)(pr^v)=\begin{cases}1, \text{ если } \bar{\bar{B}}(pr^v)=\bar{\bar{B}}(pr_0^v) \text{ и } pr^v\approx pr_0^v;\\ 0, \text{ если } \bar{\bar{B}}(pr^v)=\bar{\bar{B}}(pr_0^v) \text{ и } pr^v\not\approx pr_0^v;\\ T_0^v(pr^v), \text{ если } \bar{\bar{B}}(pr^v)\neq\bar{\bar{B}}(pr_0^v).\end{cases}\qquad(8)$$

Легко показать, что если $H_\mu = (v_\mu, \overset{v}{obs}{}_\mu^\mu, \overset{v}{T}{}_\mu^\mu) \in \vartheta_\tau, (\overset{v}{pr}{}^\mu(\mathfrak{M}), H_\mu) \in \pi_\tau$, то $(v_\mu, \overset{v}{obs}{}_\mu^\mu, F_1(\overset{v}{T}{}_\mu^\mu, \overset{v}{pr}{}^\mu(\mathfrak{M}))) \in \vartheta_\tau$. Отсюда следует, что функция $f_1 : \pi_\tau \to \vartheta_\tau$, определяемая равенством

$$f_1(\overset{v}{pr}{}^\mu(\mathfrak{M}), H_\mu) = (v_\mu, \overset{v}{obs}{}_\mu^\mu, F_1(\overset{v}{T}{}_\mu^\mu, \overset{v}{pr}{}^\mu(\mathfrak{M}))), \tag{9}$$

является τ-регулярным принципом практики измерений (проверка предоставляется читателю).

Пусть, далее, запись $pr_1^v = pr_2^v \restriction D$ означает: $pr_1^v \subseteq pr_2^v$ и $B(pr_1^v) = D$. Зададим отображение $F_2 : \Theta\times\Pi \to \Theta$ условием: для любой пары (T_0^v, pr_0^v) из $\Theta\times\Pi$ и любого протокола pr^v из Π имеет место соотношение:

$$F_2(T_0^v, pr_0^v)(pr^v) = \begin{cases} 1, \text{ если } T_0^v(pr^v) = 1,\ \bar{\bar{B}}(pr^v) < \bar{\bar{B}}(pr_0^v) \\ \quad \text{и существует } D \subset B(pr_0^v) \text{ такое, что} \\ \quad pr^v \approx pr_0^v \restriction D; \\ 1, \text{ если } T_0^v(pr^v) = 1,\ \bar{\bar{B}}(pr^v) \geq \bar{\bar{B}}(pr_0^v) \\ \quad \text{и для всякого } D \subseteq B(pr^v) \text{ выполняется} \\ \quad \bar{\bar{D}} = \bar{\bar{B}}(pr_0^v) \to pr^v \restriction D \approx pr_0^v; \\ 0 - \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \tag{10}$$

Опять легко показать, что если $H_\mu = (v_\mu, \overset{v}{obs}{}_\mu^\mu, \overset{v}{T}{}_\mu^\mu) \in \vartheta_{\sigma\tau}, (\overset{v}{pr}{}^\mu(\mathfrak{M}), H_\mu) \in \pi_{\sigma\tau}$, то $(v_\mu, \overset{v}{obs}{}_\mu^\mu, F_2(\overset{v}{T}{}_\mu^\mu, \overset{v}{pr}{}^\mu(\mathfrak{M}))) \in \vartheta_{\sigma\tau}$. Можно показать, (ср. [24, с.136]), что функция $f_2 : \pi_{\sigma\tau} \to \vartheta_{\sigma\tau}$, определяемая на $\pi_{\sigma\tau}$ равенством

$$f_2(\overset{v}{pr}{}^\mu(\mathfrak{M}), H_\mu) = (v_\mu, \overset{v}{obs}{}_\mu^\mu, F_2(\overset{v}{T}{}_\mu^\mu, \overset{v}{pr}{}^\mu(\mathfrak{M}))), \tag{11}$$

есть $\sigma\tau$-регулярный принцип практики измерений.

Наконец, определим функцию $f_3 : \pi_\sigma \to \vartheta_\sigma$ условием: для всякой пары $(\overset{v}{pr}{}^\mu(\mathfrak{M}), H_\mu)$ из π_σ имеет место соотношение

$$f_3(\overset{v}{pr}{}^\mu(\mathfrak{M}), H_\mu) = (v_\mu, \overset{v}{obs}{}_\mu^\mu, \overset{v}{S}{}_\mu^\mu \cup \{(\exists z_{a_1}) \ldots (\exists z_{a_n}) pr_{\&}^\mu(\mathfrak{M})\}), \tag{12}$$

где $H_\mu = (v_\mu, \overset{v}{obs}{}_\mu^\mu, \overset{v}{S}{}_\mu^\mu)$.

Читатель без труда сможет убедиться, что f_3 есть σ-регулярный принцип практики измерений.

Имеет место следующая основная

ТЕОРЕМА 4.I.

I) Класс всех τ-регулярных принципов практики измерений состоит ровно из одного члена – функции f_1, описываемой соотношениями (8),(9).

2) Класс всех $\sigma\tau$-регулярных принципов практики измерений состоит ровно из одного члена – функции f_2, описываемой соотношениями (I0)-(II).

3) Класс всех σ-регулярных принципов практики измерений состоит ровно из одного члена-функции f_3, описываемой соотношением (I2)[*].

Последнее утверждение этой теоремы говорит о том, что каждый шаг практического использования измерений, полученных с помощью приборов с простыми измерительными теориями, должен состоять в приписывании к имеющимся аксиомам $(\overset{v}{S}{}_{\mu}^{\mu})$ новой аксиомы $((\exists z_{a_1})\ldots$ $\ldots(\exists z_{a_n})\ \overset{v}{pr}{}_{\&}^{\mu}(\mathfrak{M}))$ – отчета об исходе проведенного измерения (наблюдения). Это приписывание столь обычное дело, что в нормальных обстоятельствах у нас не возникает побудительного мотива осознать те предпосылки, которые делают подобный шаг разумным с познавательной точки зрения. Только попытки трактовать измерения в расширительном смысле, например, как измерения с помощью приборов, отвечающих стандартным измерительным или – особенно – измерительным в широком смысле теориям, делают этот вопрос актуальным. И тогда мы убеждаемся, основываясь на п.I и 2 теоремы 4.I, что в общем-то случае, оказывается, практика измерений должна быть другой, чем обычно, хотя все-таки по-прежнему однозначно определенной.

К этому стоит добавить, что если бы нам вздумалось трактовать измерения уж совсем широко – так, например, чтобы считать измерительным вообще любой прибор и, следовательно, считать измери-

---

*) Доказательство каждого из трех утверждений теоремы есть по существу повторение с соответствующими измерениями доказательства теоремы, приведенной в [23,с. 38].

тельной вообще любую эмпирическую теорию, - то соответствующие такой трактовке принципы практики измерений перестают быть однозначно определенными и образуют некий бесконечный (впрочем, просто устроенный) класс. Этот класс совпадает с тем, что в работе [23, с.38] называется классом регулярных методов индукции, и такое совпадение говорит, что надежные методы индукции - это те, которые являются обобщениями методов измерений.

4.4. Мы закончили описание основ утилитарной теории измерений. Дальнейшее ее развитие зависит уже от частных запросов научных исследований и должно, вообще говоря, состоять в том, чтобы для тех или иных конкретных H_μ и f_i $(i = 1,2,3)$ изучать теории из $\mathcal{F}_{i\mu}$, где

$$\mathcal{F}_{i\mu} = \{f_i(\mathrm{pr}^{\overset{\vee}{}\mu}(\mathfrak{M}), H_\mu) \mid \mathrm{pr}^{\overset{\vee}{}\mu}(\mathfrak{M}) \in \mathrm{PR}_{H_\mu}\}.$$

Здесь мы не пытаемся заранее указать объем понятия "изучать", так как выбор задач, лежащих в соответствующем русле, зависит, повторяем, от трудно предвидимых внешних обстоятельств. Несомненно все же то, что в случае, когда $i = 3$, одним из важнейших аспектов такого изучения является поиск эффективных методов логической обработки (в разных отношениях) аксиоматических систем вида σ. В самое последнее время успешно развивается область математической логики, обещающая, в частности, дать готовый инструментарий на уровне программ для подобных логических исследований - теорию семантического программирования GES [25,26,27]. Поэтому утилитарный подход к измерениям можно считать математически обеспеченным вплоть до принципиальной возможности выхода на ЭВМ.

§5. Репрезентационная теория измерений. Критические замечания

Вернемся к репрезентационному подходу. Прежде всего бросается в глаза следующая странная особенность работ в этом русле. Их авторы не задают себе прямых вопросов типа: зачем вообще нужны измерения, понимаемые так, как они ими понимаются? зачем нужно какую-либо эмпирическую систему, известную нам с точностью до постулируемых аксиом измерения, предварительно гомоморфно отобразить в некоторую специальную числовую, чтобы в конечном итоге, изучив массу математических фактов об этом гомоморфизме (теоремы представления, теоремы единственности, типы шкал и т.д.), вернуться все-таки к утверждениям об исходной эмпирической системе (высказывания, инвариантные относительно допустимых преобразований)? почему бы эти утверждения ни получить прямым образом как следствия аксиом измерения, раз уж все равно последние необходимы? чем такое опосредованное изучение эмпирической системы удобнее по сравнению с прямой дедукцией следствий постулированных аксиом? что нового узнаем мы о действительности в результате установления той или иной теоремы представления или единственности? кстати, должны ли мы рассматривать в качестве изучаемого фрагмента действительности подразумеваемую в данном измерении эмпирическую систему? если да, то в каком смысле эта действительность соотносится с наблюдениями в случае бесконечной эмпирической системы? если же эмпирические системы, лежащие в основании измерений, являются эмпирическими только по названию,а на самом деле считаются идеализациями, выходящими за пределы возможных наблюдений, то каким конкретно образом изучение этих идеализаций (или числовых гомоморфных образов этих идеализаций) связано все-таки с изучением действительности?

Нет и речи о том,что читатель обнаружит в литературе по репрезентационному подходу систематически разработанные ответы на эти (даже не поставленные явно) вопросы. Следовательно, в рамках этого подхода отсутствуют ясные указания на связь предлагаемых теоретических воззрений с практикой. Восполнить этот пробел значит, по существу, переформулировать в репрезентационных терминах содержание §4. А для этого необходимо переосмыслить в утилитаристском духе весь фундамент репрезентационной теории,как он изложен в §I.

Авторы настоящей статьи намерены в последующих публикациях наметить контуры требуемых здесь видоизменений репрезентационной теории. Но независимо от того, каковыми последние окажутся, остается все-таки непреложной истиной тот факт, что нужна <u>дополнительная</u> работа уже даже для того, чтобы просто прояснить, на какие, собственно, практические познавательные цели ориентирована теория измерений, понимаемая так, как она понимается в сложившейся репрезентационной традиции. К тому же заранее можно утверждать, что, буде эта работа выполнена, она в принципиальном отношении даст не больше чем просто некий "функционально-числовой" вариант уже известной читателю утилитарной теории измерений.

Правда, следует ожидать, что этот вариант в техническом (математическом) отношении покажется большинству читателей более знакомым, чем логически ориентированное изложение в §4, или, например, что он еще раз задним числом подтвердит правильность обращения с результатами измерений инженеров и физиков. Но это им (физикам и инженерам) известно и без всякой теории измерений. Что же касается возможных технических преимуществ функционально-числового представления практики измерений применительно к другим наукам (таким, как психология, социология и пр.), то эти преимущества небесспорны - особенно,если учесть, что имеется в наше время возможность вести развернутую логическую обработку данных этих наук на ЭВМ.

Словом, бурный рост за последние годы числа публикаций по репрезентационной теории измерений (еще одна теорема представления, еще одна теорема единственности, еще один тип шкалы и т.п.) не выглядит, выразимся осторожно, жизненно необходимым для развития науки на современном этапе.

Авторы выражают благодарность Ю.Г.Косареву за плодотворные обсуждения первоначального варианта настоящей статьи.

Литература

I. ADAMS E.W. On the nature and purpose of measurement. - Synthese,1966,v.16, N 2,p.125-169.

2. HELMHOLTZ H.V. Zählen und Messen.- In: Philosophische Aufsätze, Fues's Verlag, Leipzig,1887,p.17-52.

3. CAMPBELL N.R. An account of the principles of measurement and calculation.-London,1928.

4. COHEN M.R., NAGEL E. An introduction to logic and scientific method. - New York.1934.

5. REESE T.W. The application of the theory of physical measurement to the measurement of psychological magnitudes,with three experimental examples. - Psychol.Monogr.,1943,v.55, p.1-89.

6. SCOTT D., SUPPES P. Fundamental aspects of theories of measurement. - J.Symbolic Logic,1958,v.23,p.113-128.

7. SUPPES P., ZINNES J. Basic measurement theory.- In: Luce R.D., Bush R.R., Galanter E. (eds.) Handbook of mathematical psychology. Vol.1. 1963,p.1-76.

8. ELLIS B. Basic concepts of measurement.- London,1966.

9. STEVENS S.S. On the theory of scales of measurement.-Science,1946,v.103,p.677-680.

10. STEVENS S.S. Mathematics, measurement and psychophysics.- In: Handbook of experimental psychology. New York,1951,p.1-49.

11. STEVENS S.S. Measurement, psychophysics and utility.- In: Churchman C.W., Ratoosh P. (eds.) Measurement: definitions and theories. New York, 1959, p.18-63.

12. STEVENS S.S. Measurement, statistics and schemapiric view. - Science, 1968, vol.161, p.849-856.

13. LUCE R.D., TUKEY J.W. Simultaneous conjoint measurement: a new type of fundamental measurement.- J.Math.Psychol., 1964, v.1, p.1-27.

14. KRANTZ D.H. A survey of measurement theory.- In: Mathematics of decision sciences. Part 2. Dantzig G.B., Veinott A.F., Jr. (eds.). Vol.12 of Lectures in Applied Mathematics, AMS, Providence, Rhode Island, 1968, p.314-350.

15. PFANZAGL J. Theory of measurement.- New York, 1968.

16. TVERSKY A. A general theory of polynomial conjoint measurement.- J.Math.Psychol., 1967, v.4, p.1-20.

17. KRANTZ D.H., LUCE R.D., SUPPES P., TVERSKY A. Foundations of measurement. I.- New York, 1971.

18. ROBERTS F.S. Measurement theory.-New York, 1979.

19. BROMEK T., MOSZYŃSKA M., PRAŹMOWSKI K. Concerning basic notions of measurement theory.- Czechoslovak Math.J., 1984, v. 34 (109), p.570-587.

20. ROBERTS F.S., FRANKE C.H. On the theory of uniqueness in measurement.-J.Math.Psychol., 1976, v.14, p.211-218.

21. RUDNIK K. On regularity of scales.- Bull.Acad.Polon.Sci. Math., 1986, v.34, N 1-2, p.7-10.

22. САМОХВАЛОВ К.Ф. Об аксиоматическом представлении эмпирических теорий. -В кн.: Эмпирическое предсказание и распознавание образов (Вычислительные системы, вып. 76). Новосибирск, 1978, с.15-26.

23. ЗАГОРУЙКО Н.Г., САМОХВАЛОВ К.Ф., СВИРИДЕНКО Д.И. Логика научных исследований. -Новосибирск, 1978. - 65 с.

24. НУДЕЛЬМАН А.С. Об одном методе индукции над стандартными эмпирическими теориями. -В кн.: Методы анализа данных (Вычислительные системы, вып. 111). Новосибирск, 1985, с. 128-139.

25. ГОНЧАРОВ С.С., СВИРИДЕНКО Д.И. Математические основы семантического программирования. -ДАН, 1986, т. 289, № 6, с.1324-1328.

26. GONCHAROV S.S., ERSHOV Yr.L., SVIRIDENKO D.I. Semantic programming.-Information processing, 1986, v.86, p.1093-1100.

27. GONCHAROV S.S., SVIRIDENKO D.I. Theoretical aspects of Σ-programming.-LNCS, 1986, N 215, p.169-179.

Поступила в ред.-изд.отд.
27 октября 1986 года