МАШИННЫЙ АНАЛИЗ СЛОЖНЫХ СТРУКТУР
(Вычислительные системы)
1986 год Выпуск 118

УДК 512.875

ТОЧНОЕ (СИМВОЛЬНОЕ) РЕШЕНИЕ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ: ПРЯМОЙ И ОБРАТНЫЙ ХОД ИСКЛЮЧЕНИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ

С.Б.Пшеничников

Необходимость решения систем нелинейных алгебраических уравнений возникает во многих теоретических и прикладных дисциплинах. Достаточно сослаться на алгебраическую геометрию [1] и теорию сетей [2]. Предмет вычислительной математики состоит, как правило,в сведении задач к решению систем алгебраических уравнений [3].Наибольшие трудности встречаются в том случае, если уравнения нелинейны. В этом весьма распространенном случае общеупотребительные итерационные методы решения основываются почти исключительно на принципе аналитической линеаризации [4]. Аналитическая линеаризация, открывающая возможность применения вычислительных методов и схем линейной алгебры при решении систем нелинейных алгебраических уравнений, состоит в приближенном представлении левых частей уравнений линейными членами разложения в ряд Тейлора. Все итерационные методы предполагают выбор начального приближения. Общих правил выбора начального приближения при трех и более неизвестных пока нет [5,6]. Применение итерационных методов решения систем нелинейных алгебраических уравнений ограничено условием сходимости, выполнение которого практически невозможно проверить заранее. Это служит причиной того, что итерационные методы не гарантируют решения систем уравнений [7]. Однако проблема сходимости для итерационных вычислительных схем все же не является главной, хотя и препятствует широкому использованию таких схем при решении нелинейных задач. Главное в том, что итерационные схемы не гарантируют отыскания всех решений. Обеспечение сходимости вычислительного процесса еще не означает, что пределом последовательности уточнений окажется решение, имеющее физический смысл или являющееся глобальным экстремумом. Например, для уравнения $ax^2+bx+c=0$ при $a \to 0$ следует, что $x = -c/b$. Но для решений $x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{b^2-4ac})/2a$, $\lim_{a \to 0} x_{1,2} = \lim_{a \to 0} (-b \pm \sqrt{b^2-4ac})'/(2a)' = \pm c/b$.

Второй пример, иллюстрирующий опасность потери решений, можно привести из теории сетей. Пусть квадратичной зависимостью $h = sv^2$ описываются гидравлические сети [8,9], где h - напор, s - гидравлическое сопротивление, v - расход. Существует одноконтурная сеть с двумя сопротивлениями a_1 и a_2, источником напряжения V и втекающим-вытекающим внешним током I такая, что уравнения Кирхгофа для этой сети имеют вид $a_1x_1^2+a_2x_2^2 = V$; $x_2 + I = x_1$. Решение этой системы уравнений: $(x_2)_{1,2} = [a_1 I \pm \sqrt{a_1^2 I^2-(a_1+a_2)(a_1 I^2-V)}]/(a_1+a_2)$, $x_1 = x_2 + I$. Таким образом, данная система имеет два действительных положительных решения, одно из которых может оказаться физически осмысленным при $a_1^2 I^2 > (a_1+a_2)/(a_1 I^2-V)$, $a_1 I^2 \geq V$. В частности, система уравнений имеет два действительных положительных решения при $a_1 I^2 = V$.

В теории нелинейных сетей, кроме трудности решения соответствующих систем нелинейных алгебраических уравнений, имеется также проблема составления по законам Кирхгофа самих систем. Проблема заключается в том, что определение направлений потоков для нелинейных сетей (в отличие от линейного случая) представляет самостоятельную задачу. Считается, что сходимость последовательных приближений зависит от выбранных направлений в сети, а скорость сходимости - от близости к истинному решению начального приближения [8]. Для нелинейных сетей направления определяются величинами потоков, а численные значения решений зависят от выбранных направлений. Чтобы избавиться от проблемы нахождения направлений (точнее, находить направления, как и в линейном случае), заменяют квадратичную зависимость $h = sv^2$ на $h = sv|v|$. При этом достигается нечетность, используемая так же, как в теории линейных сетей, но левые части систем нелинейных алгебраических уравнений перестают быть дифференцируемыми. Правда, для некоторых авторов этой проблемы не существует. Например, в [10] для доказательства единственности действительного положительного решения сетевой системы уравнений с зависимостью $h = sv|v|$ смело используется матрица

Гесса вторых производных. Ясно, однако, что если система квадратных сетевых уравнений имеет несколько действительных положительных решений, то столько же решений будет и у соответствующей системы модульных уравнений.

Из-за упомянутых выше особенностей итерационных схем особое значение имеют прямые схемы, подобные методу Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений. К прямым методам относится схема метода Эйлера-Сильвестра-Кронекера, описанная, например, в [II,I2]. Этот метод позволяет в процессе прямого хода исключить n неизвестных системы нелинейных алгебраических уравнений из $n + 1$ уравнения. В случае n нелинейных алгебраических уравнений с n неизвестными из пар уравнений (например, первого-второго, первого-третьего и т.д.) составлением результанта исключается x_1. Затем из полученной системы из $n-1$ уравнения исключается x_2 и т.д. до получения уравнения с одной неизвестной x_n.

Достоинством метода Эйлера-Сильвестра-Кронекера является сведение многомерной задачи к одномерной. Для нахождения решений уравнения с одной неизвестной не нужно знать начальное приближение [I3]. К недостаткам следует отнести отсутствие однозначного обратного хода исключения, что является следствием приближенной аналитической линеаризации. По этому методу неизвестные $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_{n-1}$ находятся по x_n следующим образом. Численное значение x_n подставляется в предыдущую пару уравнений с двумя неизвестными x_{n-1} и x_n. Полученные два уравнения с одной неизвестной x_{n-1} решаются численными методами, и выбираются общие корни. При этом не всякая пара x_n и x_{n-1} является компонентом полного кортежа решений $(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$ исходной системы уравнений. Продолжая этот процесс, необходимо неоднократно решать пары уравнений на одну неизвестную. После окончания процедуры получения наборов $\{x_j\}$ нужно подстановкой в исходную систему уравнений исключить наборы $\{x_j\}$, не являющиеся решением исходной системы уравнений.

Существенно, что применение прямого метода решения систем нелинейных алгебраических уравнений неизбежно приводит к необходимости отыскания решений уравнения с одной неизвестной, причем степени тем более высокой, чем больше уравнений в исходной системе и выше степень их нелинейности. Однако решать множество уравнений с одной неизвестной, а затем каждый полученный набор $\{x_j\}$ подставлять в исходную систему для отыскания решения бывает практически невозможно.

Цель данной статьи - изложить метод исключения неизвестных в системе нелинейных алгебраических уравнений, свободный от трудностей метода Эйлера-Сильвестра-Кронекера. Метод основывается на точной линеаризации [14-16] исходной системы уравнений, позволяющей строить не только прямой, но и однозначный обратный ход исключения неизвестных. При этом численными методами решается только одно уравнение с одной неизвестной. Остальные неизвестные x_1, $x_2, \ldots, x_{n-1}$ однозначно находятся по каждому x_n.

Для удобства записи будем понимать под общим видом системы уравнений выражение

$$
\begin{aligned}
{}^{m}R_i \equiv a_{ij_1j_2\ldots j_m} x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_m} + \\
+ a_{ik_1k_2\ldots k_{m-1}} x_{k_1} x_{k_2} \ldots x_{k_{m-1}} + \ldots + a_{ip_1} x_{p_1} + a_i = 0,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $a_{(\ldots)}$ - коэффициенты, заданные на поле действительных чисел, а по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Для определенности систем i, j, k, p принимают значения от I до n. Например, система квадратных уравнений имеет вид

$$
{}^{2}R_i \equiv a_{ij_1j_2} x_{j_1} x_{j_2} + a_{ik_1} x_{k_1} + a_i = 0,
\tag{2}
$$

а система линейных уравнений ${}^{1}R_i \equiv a_{ij} x_j + a_i = 0$.

Идея точной линеаризации заключается в расщеплении правых частей (2) на сомножители B_i и Φ: ${}^{2}R_i \to B_i \Phi$.

Сомножитель B_i линеен по неизвестным x_j, а Φ - общий для всех уравнений

$$
B_i \Phi = 0,
\tag{3}
$$

соответствующих исходным уравнениям (2). Системы уравнений (2) и (3) равносильны. Достигнутая линейность в сомножителях B_i и общность Φ для всех уравнений позволяют при решении уравнений не прибегать к использованию второго сомножителя Φ, а получать решения исходных уравнений только с помощью B_i. При использовании явного вида B_i строится аналог метода Гаусса для системы нелинейных алгебраических уравнений (2). Соответствующие аналоги формул обратного хода исключения позволяют получить формулы однозначной связи между неизвестными в системе общего вида. Формулы эти позволяют восстановить весь кортеж решений $x_1\, x_2, \ldots, x_{n-1}$ по x_n, что нельзя сделать в методе Эйлера-Сильвестра-Кронекера. Для систем общего вида (I) подобные расщепления производятся $m-1$ раз так, что соответствующие ${}^{(m-1)}B_i$ также линейны по неизвестным x_j.

Расщепим на линейные сомножители B_1 и Φ уравнения с одной неизвестной: ${}^2R_1 \equiv ax^2+bx + c = 0$ или в форме: ${}^2R_1 \equiv x(ax+b)+c=0$. Введем матрицу $B_1 = \omega_1^1 x + \omega_2^1(ax+b) + \alpha_1\sqrt{c}$, где

$$\omega_1^1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{Vmatrix} 0 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1 & 0\end{Vmatrix};\quad \omega_2^1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0\end{Vmatrix};\quad \alpha_1=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{Vmatrix}.$$

Поставим в соответствие квадратному уравнению уравнение $B_1\Phi \equiv [\omega_1^1x+\omega_2^1(ax+b) + \alpha_1\sqrt{c}]\,\Phi=0$, где Φ – отличный от нуля четырехкомпонентный вектор-столбец. Можно проверить, что $\det B_1=({}^2R_1)^4$. Неравенство нулю столбца Φ следует из равенства $\det B_1 = 0$. Но тогда ${}^2R_1 = 0$. Тем самым показано, что уравнения ${}^2R_1=0$ и $B_1\Phi= 0$ равносильны.

Уравнение $B_1\Phi = 0$ можно переписать в виде $x\Phi = C_1\Phi$. Тогда можно говорить, что мы переформулировали задачу решения ${}^2R_1=0$ в задачу на собственные значения, причем здесь x – собственное значение матрицы C_1, а Φ – собственный вектор, $C_1=-(\omega_1^1 + \omega_2^1 a) \times (\omega_2^1 b + \alpha_1\sqrt{c})/a$.

Правило расстановки коэффициентов типа α и ω в B_1 таковы, что коэффициенты типа ω позволяют разложить произведение $x(ax+b)$ на сумму сомножителей. Индекс у ω обозначает номер слагаемого, верхний индекс у ω – номер произведения, нижний – номер сомножителя этого произведения. Коэффициенты типа α позволяют "извлекакать" квадратный корень из отдельных слагаемых*).

Коэффициенты типа α и ω являются образующими ассоциативных алгебр унипотентных и нильпотентных альтернионов, свойства которых и алгоритм представления матрицами образующих описаны в [I4-I6].

Уравнениям вида (2) ставится в соответствие система уравнений (7) из [I6], а уравнениям вида:

---

*) Подобный прием "извлечения корня" из одного линейного дифференциального уравнения второго порядка с помощью матриц типа α впервые был использован П.А.Дираком [I7].

$$ {}^2R_i \equiv x_1(a_{i11}x_1+\ldots+a_{i1n}x_n + a_{i1}) + \ldots + x_{n-1}(a_{i,n-1,n-1}x_{n-1} + $$

$$ + a_{i,n-1,n}x_n + a_{i,n-1}) + x_n(a_{inn}x_n + a_{in}) + a_i = 0 \qquad (4) $$

– линеаризованная система уравнений ($\Phi \neq 0$):

$$ B_i\Phi \equiv [\omega_1^{i11}x_1 + \omega_2^{i11}(a_{i11}x_1+\ldots+a_{i1n}x_n + a_{i1}) + \ldots $$

$$ \ldots+\omega_1^{i,n-1,n-1}x_{n-1}+\omega_2^{i,n-1,n-1}(a_{i,n-1,n-1}x_{n-1}+a_{i,n-1,n}x_n+a_{i,n-1})+ $$

$$ +\omega_1^{inn}x_n + \omega_2^{inn}(a_{inn}x_n+a_{in}) + \alpha_i\sqrt{a_i}]\Phi = 0. \qquad (5) $$

Коэффициенты $\omega_{1,2}^{(\ldots)}$ пронумерованы с помощью сквозной для всех уравнений системы нумерации по формуле $\omega_{1,2}^{ikk} = \omega_{1,2}^{(i-1)n+k}$. Образующие α_i и ω_p^t удовлетворяют по построению перестановочным соотношениям: определяющим соотношениям алгебр унипотентных и нильпотентных альтернионов

$$ \alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij}\, e \quad (i,j = 1,\ldots,n); \qquad (6) $$

$$ \omega_p^{t_1}\omega_2^{t_2} + \omega_r^{t_2}\omega_p^{t_1} = \delta_{pr}\delta^{t_1t_2}e \quad (t_k = 1,\ldots,M,\ p,r=1,2); \qquad (7) $$

$$ \alpha_i\omega_p^t + \omega_p^t\alpha_i = 0, \qquad (8) $$

где δ_{ij} – символ Кронекера, $\delta_{pr} = 1-\delta_{pr}$, e – единица алгебры.

Достаточным условием существования общего для уравнений (5) столбца (спинора) Φ является соотношение [I8]: $B_iB_j + B_jB_i = 0$, которое автоматически выполняется по построению (5).

ТЕОРЕМА I. Каждое решение линейных по неизвестным x_j уравнений (5) является решением исходных уравнений (4). Верно и обратное.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим каждое i уравнение системы (5) слева на соответствующие B_i. По построению (5) коэффициенты α_i, ω_p^t и их матричные представления удовлетворяют перестановочным соотношениям (6),(7). Следовательно (что нетрудно проверить почленным перемножением B_iB_i и последующей группировкой слагаемых с одинаковыми численными коэффициентами в пары), $B_i^2 = {}^2R_iE_{(N)}$, где $E_{(N)}$ – единичная матрица порядка N, которой представляется единица алгебр e. Вычислим определитель от обеих частей этого выражения. По свойству определителей

$$\det(B_i^2) = \det B_i \det B_i = (^2R_i)^N. \tag{9}$$

Пусть $x_1, x_2, \dots x_n$ – решение (5) (т.е. при этих $\{x_j\}$ $\det B_i = 0$). Но тогда, по (9), $^2R_i = 0$, т.е. каждое решение уравнений (5) является решением (4). Ясно, что из-за (9) справедливо и обратное.

Систему уравнений (5) можно переписать в виде:

$$AX = Q, \tag{10}$$

где

$$A = \|A_{ij}\|, \quad X = \|x_j\Phi\|, \quad Q = \|Q_i\ \Phi\|,$$

$$A_{ij} = \omega_2^{i11}a_{i1j} + \omega_2^{i22}a_{i2j} + \dots + \omega_2^{i,j-1,j-1}a_{i,j-1,j} +$$
$$+ \omega_1^{ijj} + \omega_2^{ijj}a_{ijj}, \tag{11}$$

$$Q_i = -(\omega_2^{i11}a_{i1} + \dots + \omega_2^{inn}a_{in} + \alpha_i\sqrt{a_i}).$$

Исключим неизвестные из (I0) обращением блочной матрицы A и умножением (I0) слева на A^{-1}. Тогда система уравнений (I0) примет вид $X = A^{-1}Q$, а каждое уравнение системы можно записать как

$$x_i\Phi = C_i\Phi \quad \text{или} \quad (C_i - x_iE)\Phi = 0, \tag{12}$$

где C_i – i-я компонента $A^{-1}Q$. Таким образом, задача нахождения x_i для системы (4) переформулирована в задачу на собственные значения.

Из получаемого для (I2) характеристического уравнения $\det(C_i - x_iE) = 0$ определяются N значений x_i. Для каждого из них можно найти соответствующий собственный вектор Φ. Собственный вектор Φ находится из решения системы линейных уравнений на компоненты Φ_k столбца Φ после подстановки в (I2) какого-либо из значений x_i и матриц типа α_i, ω_p^t.

Остальные характеристические уравнения на x_j ($j \neq i$) находить и решать не нужно, поскольку из (I2) следует, что

$$x_j = \Phi^* C_j \Phi, \tag{13}$$

где $\Phi^*\Phi = 1$ (звездочкой обозначено комплексное сопряжение столбца Φ). Таким образом, столбец Φ формирует кортежи решений, проблема составления которых существует в методе Эйлера-Сильвестра-

Кронекера. Наиболее важным является то, что из соотношений (I3) следует существование формул однозначной связи между неизвестными в системах квадратных уравнений, аналогичных формулам обратного хода исключения метода Гаусса.

ТЕОРЕМА 2. Решение $x_i\Phi = C_i\Phi$ является векторным решением скалярной системы уравнений (4) (или (2)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим (2) слева на Φ^*, а справа на Φ. Получим $\Phi^*(a_{ij_1j_2}x_{j_1}x_{j_2} + a_{ik}x_k + a_i)\,\Phi = 0$. Аналогично умножим решение (I2) слева на Φ^*. Получим $x_i = \Phi^*C_i\Phi$ и подставим в (2)

$$a_{ij_1j_2}\Phi^*C_{j_1}\Phi\Phi^*C_{j_2}\Phi + a_{ik}\Phi^*C_k\Phi + a_i = 0. \tag{14}$$

Утверждение теоремы будет доказано, если выражение (I4) представимо в виде $\Phi^*(a_{ij_1j_2}C_{j_1}C_{j_2} + a_{ik}C_k + a_i)\Phi = 0$. Докажем сначала, что $\Phi^*C_{j_1}\Phi\Phi^*C_{j_2}\Phi = \Phi^*C_{j_1}C_{j_2}\Phi$. Доказательство начнем с тождества $\Phi^*C_{j_1}\Phi\cdot 1 = \Phi^*C_{j_1}\Phi$. Заменим здесь единицу на $\Phi^*\Phi$, поскольку $\Phi^*\Phi = 1$: $\Phi^*C_{j_1}\Phi\Phi^*\Phi = \Phi^*C_{j_1}\Phi$. Умножим последнее выражение на x_{j_2}: $\Phi^*C_{j_1}\Phi\Phi^*x_{j_2}\Phi = \Phi^*C_{j_1}x_{j_2}\Phi$. Но, по (I2), $x_{j_2}\Phi = C_{j_2}\Phi$, тогда $\Phi^*C_{j_1}\Phi\Phi^*C_{j_2}\Phi = \Phi^*C_{j_1}C_{j_2}\Phi$. Что и требовалось доказать,

ТЕОРЕМА 3. Задача на собственные значения (I2) является специальной задачей на собственные значения, для получения характеристического уравнения которой не требуется обязательного использования матричного представления C_i.

Для доказательства умножим (I2) слева на C_i: $x_iC_i\Phi = (C_i)^2\Phi$. Но тогда из-за (I2)

$$x_i^2\Phi = C_i^2\Phi. \tag{15}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Переход от (I2) к (I5) назовем квадрированием (I2) первого рода.

Из-за перестановочных свойств алгебры альтернионов, часть α_i, ω_p^t в $(C_i)^2$ исчезает (становятся кратными единичной или нулевой матрице). Перенесем коэффициенты, принадлежащие единичным матри -

цам налево и, обозначив левую скалярную часть через x_i', а оставшуюся альтернионную часть $(C_i)^2$ справа – через C_i', перепишем (I5) в виде $x_i'\Phi = C_i'\Phi$. Применим к последнему выражению еще раз квадрирование первого рода. Исчезнет еще часть альтернионных слагаемых C_i'. Повторяя этот процесс, можно исключить все альтернионы, и уравнение примет вид ${}^kR_i E\Phi = 0$, где ${}^kR_i$ уже не содержит альтернионов. Неравенство Φ нулю приводит и далее к ${}^kR_i = 0$ (характеристическому уравнению для (I2)). Действительно, предположим, что с помощью квадрирований первого рода не исчезает, например, альтернион α_i. Перенесем его налево

$$\alpha_i \Phi = F_i \Phi, \tag{16}$$

где F_i – сумма альтернионных слагаемых, не содержащих α_i. Умножим (I6) слева на α_i. Тогда, из-за (6), $E\Phi = \alpha_i F_i \Phi$ или $\Phi = \tilde{F}_i \alpha_i \Phi$, где $\tilde{F}_i$ – сумма альтернионных слагаемых, получаемая коммутацией F_i и α_i (у некоторых слагаемых могут измениться знаки). Но по (I6) следует, что

$$\Phi = \tilde{F}_i F_i \Phi. \tag{17}$$

Соотношение (I7) не содержит α_i.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Переход от (I6) к (I7) назовем **квадрированием** второго рода.

Продолжая процесс квадрирования второго рода достаточное количество раз после квадрирования первого рода, можно устранить все альтернионы (образующие типа ω выражаются через α_i [I6]) без обращения к их матричному представлению, что и доказывает утверждение теоремы.

Решим без использования матричного представления образующих α_i, ω_p^t систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} {}^2R_1 &\equiv a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2+a_4xy+a_5xz+a_6yz+a_7x+a_8y+a_9z+a_{10} = 0;\\ {}^2R_2 &\equiv b_1x^2+b_2y^2+b_3z^2+b_4xy+b_5xz+b_6yz+b_7x+b_8y+b_9z+b_{10}=0;\\ {}^2R_3 &\equiv c_1x^2+c_2y^2+c_3z^2+c_4xy+c_5xz+c_6yz+c_7x+c_8y+c_9z+c_{10} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

где $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$ заданы на поле действительных чисел. Требуется найти $\{x, y, z\}$, вообще говоря, комплексные. Для сокращения записи перепишем систему уравнений (I8) в виде $AX = B$, где

$$A = \begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{Vmatrix}; \quad X = \begin{Vmatrix} x^2 \\ y^2 \\ xy \end{Vmatrix};$$

$$B = \begin{Vmatrix} -[(a_5z+a_7)x + (a_6z+a_8)y + (a_3z^2+a_9z+a_{10})] \\ -[(b_5z+b_7)x + (b_6z+b_8)y + (b_3z^2+b_9z+b_{10})] \\ -[(c_5z+c_7)x + (c_6z+c_8)y + (c_3z^2+c_9z+c_{10})] \end{Vmatrix}.$$

Если $D = c_4b_2a_1 - c_4b_1a_2 - c_2b_4a_1 + c_2b_1a_4 + c_1b_4a_2 - c_1b_2a_4 = 0$, то систему уравнений можно разрешить относительно X: $X = A^{-1}B$ или

$$\left.\begin{aligned} &x^2 - (l_1x + l_2y + k_1) = 0; \\ &y^2 - (l_3x + l_4y + k_2) = 0; \\ &xy + l_5x + l_6y + k_3 = 0\ , \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

где

$$l_1 = -\frac{1}{D}[(c_4b_2-c_2b_4)(a_5z+a_7) + (-c_4a_2+c_2a_4) \times (b_5z+b_7) + \\ + (b_4a_2-b_2a_4)(c_5z+c_7)];$$

$$l_2 = -\frac{1}{D}[(c_4b_2-c_2b_4)(a_6z+a_8) + (-c_4a_2+c_2a_4) \times (b_6z+b_8) + \\ + (b_4a_2-b_2a_4)(c_6z+c_8)];$$

$$k_1 = -\frac{1}{D}[(c_4b_2-c_2b_4)(a_3z^2+a_9z+a_{10}) + \\ + (-c_4a_2+c_2a_4)(b_3z^2+b_9z+b_{10}) + (b_4a_2-b_2a_4)(c_3z^2+c_9z+c_{10});$$

$$l_3 = -\frac{1}{D}[(-c_4b_1+c_1b_4)(a_5z+a_7) + (c_4a_1-c_1a_4) \times (b_5z+b_7) + \\ + (-b_4a_1+b_1a_4)(c_5z+c_7)];$$

$$l_4 = -\frac{1}{D}[(-c_4b_1+c_1b_4)(a_6z+a_8) + (c_4a_1-c_1a_4) \times (b_6z+b_8) + \\ + (-b_4a_1+b_1a_4)(c_6z+c_8)];$$

$$k_2 = -\frac{1}{D}[(-c_4b_1+c_1b_4)(a_3z^2+a_9z+a_{10}) +$$
$$+ (c_4a_1-c_1a_4)(b_3z^2+b_9z+b_{10})+(-b_4a_1+b_1a_4)(c_3z^2+c_9z+c_{10})];$$

$$l_5 = \frac{1}{D}[(c_2b_1-c_1b_2)(a_5z+a_7) + (-c_2a_1+c_1a_2) \times (b_5z+b_7) +$$
$$+ (b_2a_1-b_1a_2)(c_5z+c_7)];$$

$$l_6 = \frac{1}{D}[(c_2b_1-c_1b_2)(a_6z+a_8)+(-c_2a_1+c_1a_2) \times (b_6z+b_8) +$$
$$+ (b_2a_1-b_1a_2)(c_6z+c_8)];$$

$$k_3 = \frac{1}{D}[(c_2b_1-c_1b_2)(a_3z^2+a_9z+a_{10}) +$$
$$+ (-c_2a_1+c_1a_2)(b_3z^2+b_9z+b_{10}) + (b_2a_1-b_1a_2)(c_3z^2+c_9z+c_{10})].$$

Если $D=0$, то разрешение следует производить относительно любой тройки из x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz, кроме x^2, y^2, xy. В этом случае вместо системы уравнений (I9) получим систему из двух квадратных и одного линейного уравнений, или из двух линейных и одного квадратного, или из трех линейных, или из двух уравнений с тремя неизвестными и т.д., в зависимости от численных значений коэффициентов. Линеаризованная по (5) система уравнений, соответствующих (I9), имеет вид:

$$[\alpha_1 x + \sqrt{-1}\ \omega_1^1 + \sqrt{-1}\ \omega_2^1(l_1x+l_2y+k_1)]\Phi=0;$$
$$[\alpha_2 y + \sqrt{-1}\ \omega_1^2 + \sqrt{-1}\ \omega_2^2(l_3x+l_4y+k_2)]\Phi=0;$$
$$xy + l_5x + l_6y + k = 0.$$

Умножив первое уравнение слева на α_1, второе – на α_1, третье – на Φ, получим:

$$x\Phi = [\tilde{\omega}_1^1 + \tilde{\omega}_2^1(l_1x+l_2y+k_1)]\Phi;$$
$$y\Phi = [\tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\omega}_2^2(l_3x+l_4y+k_2)]\Phi; \qquad (20)$$
$$(xy + l_5x + l_6y + k_3)\Phi = 0,$$

где

$$(\tilde{\omega}_{1,2}^{1,2})^2 = 0; \quad \tilde{\omega}_1^1\tilde{\omega}_2^1 + \tilde{\omega}_2^1\tilde{\omega}_1^1 = E;$$

$$\tilde{\omega}_1^2\tilde{\omega}_2^2 + \tilde{\omega}_2^2\tilde{\omega}_1^2 = E; \quad \tilde{\omega}^1_{1,2}\tilde{\omega}^2_{1,2} = \tilde{\omega}^2_{1,2}\tilde{\omega}^1_{1,2}.$$

Из первого уравнения системы (20) имеем:

$$x\Phi = (E + \tilde{\omega}_2^1 l_1)[\tilde{\omega}_1^1 + \tilde{\omega}_2^1(l_2 y + k_1)]\Phi.$$

Умножив это выражение на y, получим

$$xy\Phi = (E + \tilde{\omega}_2^1 l_1)[\tilde{\omega}_1^1 y + \tilde{\omega}_2^1 l_2 y^2 + \tilde{\omega}_2^1 k_1 y]\Phi .$$

Подставим y^2 из второго уравнения (19):

$$xy\Phi = (E + \tilde{\omega}_2^1 l_1)[\tilde{\omega}_1^1 y + \tilde{\omega}_2^1 l_2(l_3 x + l_4 y + k_2) + \tilde{\omega}_2^1 k_1 y]\Phi.$$

Подставив полученный $xy\Phi$ в третье уравнение (20) и умножив полученное выражение слева на $E - \tilde{\omega}_2^1 l_1$, получим

$$[\tilde{\omega}_1^1 y + \tilde{\omega}_2^1 l_2(l_3 x + l_4 y + k_2) + \tilde{\omega}_2^1 k_1 y +$$

$$+ (E - \tilde{\omega}_2^1 l_1)(l_5 x + l_6 y + k_3)]\Phi = 0. \qquad (21)$$

Перепишем (21) в виде

$$(l_5 x + l_6 y + k_3)\Phi = \{\tilde{\omega}_1^1 y + \tilde{\omega}_2^1[l_2(l_3 x + l_4 y + k_2) + k_1 y -$$

$$- l_1(l_5 x + l_6 y + k_3)]\}\Phi = \{\tilde{\omega}_1^1 y + \tilde{\omega}_2^1[x(l_2 l_3 - l_1 l_5) +$$

$$+ y(l_2 l_4 + k_1 - l_1 l_6) + l_2 k_2 - l_1 k_3]\}\Phi. \qquad (22)$$

Возведем в квадрат обе части (22) (квадрирование первого рода):

$$S_1 x^2 + S_2 y^2 + S_3 xy + S_4 x + S_5 y + S_6 = 0, \qquad (23)$$

где

$$S_1 = l_5^2; \quad S_2 = l_6^2 - l_2 l_4 - k_1 + l_1 l_6;$$

$$S_3 = 2l_5 l_6 - l_2 l_3 + l_1 l_5; \quad S_4 = 2l_5 k_3;$$

$$S_5 = 2l_6 k_3 - l_2 k_2 + l_1 k_3; \quad S_6 = k_3^2.$$

Подставив xy, y^2, x^2 из (19) в (23), получим: $S_1(l_1 x + l_2 y + k_1) + S_2(l_3 x + l_4 y + k_2) + S_3(-l_5 x - l_6 y - k_3) + S_4 y + S_5 y + S_6 = 0$ или $S_7 x + S_8 y + S_9 = 0$, где $S_7 = S_1 L_1 + S_2 l_3 - S_3 l_5 + S_4$; $S_8 = S_1 l_2 + S_2 l_4 - S_3 l_6 + S_5$: $S_9 = S_1 k_1 + S_2 k_2 - S_3 k_3 + S_6$. Перепишем систему уравнений (I9) в виде:

$$y^2 - (l_3 x + l_4 y + k_2) = 0;$$
$$xy + l_5 x + l_6 y + k_3 = 0; \qquad (24)$$
$$S_7 x + S_8 y + S_9 = 0.$$

Если $S_7 \neq 0$, то из третьего уравнения системы (24)

$$x = -\frac{1}{S_7}(S_8 y + S_9). \qquad (25)$$

Умножив (25) на y, получим $xy = -\frac{1}{S_7}(S_8 y^2 + S_9 y)$. Подставив (25) в первое уравнение системы (24), получим $y^2 = l_4 y + k_2 - l_3(S_8 y + S_9)/S_7$. Заменим xy и y^2 во втором уравнении системы (24) на полученные выражения. Имеем:

$$S_{10} y = S_{11}, \qquad (26)$$

где

$$S_{10} = -S_8 S_7 l_4 + S_8^2 l_3 - S_7 S_9 - S_7 S_8 l_5 + S_7^2 l_6;$$
$$S_{11} = S_7 S_8 k_2 - S_8 S_9 l_3 + S_7 S_9 l_5 - k_3 S_7^2.$$

Если $S_{10} \neq 0$, то

$$y = S_{11}/S_{10}. \qquad (27)$$

Подставим (27) в $y^2 = l_4 y + k_2 - l_3(S_8 y + S_9)/S_7$. Получим

$$\left(\frac{S_{11}}{S_{10}}\right)^2 = l_4 \frac{S_{11}}{S_{10}} + k_2 - \frac{l_3 S_8}{S_7}\,\frac{S_{11}}{S_{10}} - \frac{l_3 S_9}{S_7}. \qquad (28)$$

Уравнение (28) содержит только одну неизвестную z. Решив его с помощью численных методов, можно поставить в соответствие каждому z свой y и x по формулам (27) и (25). Формулы обратного хода исключения неизвестных (27) и (25) являются формулами однозначной связи между неизвестными для (I8).

Если $S_7 \equiv 0$, то третье уравнение (24) переписывается в виде $S_8 y + S_9 = 0$. Если $S_8 \equiv 0$, то $S_9 = 0$, если $S_8 \not\equiv 0$, то $y = -S_9/S_8$. Определив z из $S_9 = 0$, можно из (23) и (I9) найти y, x. Если S_{10} тождественно равно нулю, то уравнение с одной неизвестной имеет по (26) вид: $S_{11} = 0$.

Таким образом, исключение неизвестных не требует обязательного использования матричного представления образующих α_i и ω_p^t. Для исключения потребовались лишь перестановочные соотношения (6)-(8) и выражения вида (II). Но оказывается, что и явного вида Q_i, A_{ij} знать не требуется. Из того, что образующие α_i, ω_p^t удовлетворяют перестановочным соотношениям (6)-(8), следует, что их линейные комбинации (II) удовлетворяют перестановочным соотношениям:

$$
\begin{aligned}
&A_{i_1j_1}A_{i_2j_2}+A_{i_2j_2}A_{i_1j_1}=\delta_{i_1i_2}(2\delta_{j_1j_2}a_{i_1j_1j_1}+\tilde{\delta}_{j_1j_2}a_{i_1j_1j_2})e,\\
&Q_{i_1}Q_{i_2}+Q_{i_2}Q_{i_1}=2\delta_{i_1i_2}a_{i_1}e, \qquad (29)\\
&A_{i_1j}Q_{i_2}+Q_{i_2}A_{i_1j}=\delta_{i_1i_2}a_{i_1j}e.
\end{aligned}
$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Ассоциативную алгебру, определяемую соотношениями (29), назовем алгеброй системы квадратично-нелинейных алгебраических уравнений.

Покажем, что для построения прямого и обратного хода исключения неизвестных в системе нелинейных алгебраических уравнений достаточно лишь явного вида перестановочных соотношений (29) для символов A_{ij}, Q_i.

Обозначим образующие алгебры (29) A_{ij} и Q_i символом R_α. Базисные элементы алгебры (29) имеют вид $R_\mu = R_{\alpha_1}R_{\alpha_2}\ldots R_{\alpha_k}$. Для нахождения A^{-1} требуется соответствующее число обращений выражений вида

$$A = k_\mu R_\mu, \qquad (30)$$

где k_μ - некоторые скаляры, т.е. нахождения такой L, что $AL=e$. Разделим A на две части $A = A_1R_1+A_2$, где A_1 - линейная комбинация базисных элементов, не содержащих R_1. Таким образом, требуется найти такую L, что

$$(A_1R_1 + A_2)L = e. \qquad (31)$$

Перепишем (31) в виде

$$A_1R_1L = e - A_2L. \qquad (32)$$

Будем искать такой вспомогательный элемент L_1, что

$$A_1L_1 = e. \qquad (33)$$

Если L_1 не существует, то следует для другого R_i разбить A. Легко видеть, что в отличие от $A = A_1R_1+A_2$ элемент A_1, представимый в виде (30), будет короче на слагаемые, содержащие R_1. Предположим, что L_1, удовлетворяющий (33), найден. Тогда (32) переписывается в виде

$$R_1L = L_1 - L_1 A_2 L. \tag{34}$$

Но, по (29), $R_1R_1 = ae$, где $a \in (\{a_{ij_1j_2}\},\{a_{ij}\},\{a_i\})$, поэтому

$$aL = R_1L_1 - R_1L_1A_2L = R_1L_1 - \tilde{L}_1\tilde{A}_2R_1L, \tag{35}$$

где $\tilde{L}_1$ и $\tilde{A}_2$ – линейные комбинации базисных элементов, не содержащих R_1, полученные после перестановки R_1 и L_1, R_1 и A_2 по правилам (29). Учитывая (34), имеем

$$(ae - \tilde{L}_1\tilde{A}_2L_1A_2)L = R_1L_1 - \tilde{L}_1\tilde{A}_2L_1. \tag{36}$$

Таким образом, получено выражение, в котором из всех базисных элементов разложения (30) исключена образующая R_1. Представив (36) в виде

$$(B_1R_2 + B_2)L = R_1L_1 - \tilde{L}_1\tilde{A}_2L_1, \tag{37}$$

где B_1 – линейная комбинация базисных элементов типа (30), не содержащих R_1 и R_2, можно аналогичным образом исключить из всех базисных элементов суммы $B = B_1R_2+B_2$. Если L_1 для (I2) неизвестен, то A_1 следует разложить по (37). Продолжая этот процесс исключения образующих R_α, можно получить выражение L.

После получения A^{-1} изложенным выше алгоритмом, i-я строка системы уравнений $X = A^{-1}Q$ будет иметь вид; $A\Phi = 0$, $\Phi \neq 0$, где A также выражается по (30). По прямому ходу исключения R_α, аналогично (3I)-(37), получим $S\Phi = 0$, где S имеет вид полинома от x_i. Поскольку, по построению (I0), $\Phi \neq 0$, то $S = 0$. По обратному ходу исключения R_α, для (3I) находится выражение базисных элементов R_μ через соответствующие скаляры S_i, что дает возможность из $X = A^{-1}Q$ получить для $x_1, x_2, \ldots x_n$ выражение вида

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = f_1(x_2, x_3, \ldots x_n); \\ x_2 = f_2(x_3, x_4, \ldots x_n); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}, \tag{38}$$

$$x_{n-1} = f_{n-1}(x_n);$$
$$f_n(x_n) = 0,$$

где f_i - дробно-полиномиальные однозначные функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Выражения вида (38) назовем точным решением системы уравнений (2).

Нахождение однозначных функций $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ является самым важным в излагаемом методе. Дело в том, что при больших размерностях задачи решать соответствующее уравнение с одной неизвестной бывает затруднительно. Поэтому, включив x_n в число задаваемых величин (определяя x_n из эксперимента), можно по (38) найти $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1$. Тогда процедура решения (2) состоит из I) подстановки x_n в $f_n = 0$ (если с достаточной степенью точности значение f_n равно 0, то исходные уравнения адекватно описывают анализируемую ситуацию), 2) вычисления значений однозначных функций $f_{n-1}, \ldots, f_1$.

Функции $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ позволяют однозначно получать по x_n весь кортеж решений $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Но может случиться так, что x_n будет k-кратным корнем f_n. В общем случае исходная система уравнений (2) может иметь кортежи решений с одинаковыми x_n, но с различными другими компонентами кортежа. Однако из-за однозначности f_i получить их все не удается. Поэтому процедуру решения нужно дополнить. Пусть $\tilde{x}_n$ - корень уравнения $f_n(x_n) = 0$. Число k называется кратностью корня $\tilde{x}_n$ в многочлене $f_n(x_n)$, если $f_n(x_n)$ нацело делится на $(x_n - \tilde{x}_n)^k$, но не делится на $(x_n - \tilde{x}_n)^{k+1}$.

Если число $\tilde{x}_n$ является k-кратным корнем многочлена $f_n(x_n)$, то, как известно, при $k>1$ оно будет $(k-1)$-кратным корнем первой производной этого многочлена; если же $k = 1$, то $\tilde{x}_n$ не будет служить корнем для $f_n'(x_n)$, где штрихом обозначена производная f_n по x_n. Тогда, обнаружив k-ю кратность x_n, необходимо достаточное количество раз продифференцировать f_n. Из вида каждой производной можно получить новые выражения для базисных элементов R_μ. Таким образом, каждой производной f_n можно поставить в соответствие свой набор функций $f_{n-1}, \ldots, f_1$, позволяющий каждой кратности k ставить в соответствие свой набор $x_{n-1}, \ldots, x_1$. Потери решений, таким образом, не произойдет.

Изложенное выше для (2) справедливо для общих систем нелинейных алгебраических уравнений (I), поскольку системы уравнений (I) сводятся к системам уравнений вида (2) аналогично тому, как сводится общая система обыкновенных дифференциальных уравнений к нормальной системе. Пусть, например, дана система кубических алгебраических уравнений

$$ {}^{3}R_{i} \equiv a_{ij_1j_2j_3} x_{j_1} x_{j_2} x_{j_3} + {}^{2}R_{i} = 0. \tag{39} $$

Соответствующая (39) равносильная система квадратных уравнений имеет вид:

$$ \begin{aligned} & x_{j_1} x_{j_2} = t_{j_1j_2}; \\ & a_{ij_1j_2j_3} t_{j_1j_2} x_{j_3} + {}^{2}R_{i} = 0, \end{aligned} \tag{40} $$

где $t_{j_1j_2}$ – новые неизвестные. Система алгебраических уравнений четвертой степени

$$ {}^{4}R_{i} \equiv a_{ij_1j_2j_3j_4} x_{j_1} x_{j_2} x_{j_3} x_{j_4} + {}^{3}R_{i} = 0 $$

сводится к системе кубических уравнений

$$ \begin{aligned} & x_{j_1} x_{j_2} = t_{j_1j_2}; \\ & a_{ij_1j_2j_3j_4} t_{j_1j_2} x_{j_3} x_{j_4} + {}^{3}R_{i} = 0. \end{aligned} $$

В общем случае система алгебраических уравнений степени m (I) сводится к системе уравнений степени $(m-1)$ по формулам

$$ \begin{aligned} & x_{j_1} x_{j_2} = t_{j_1j_2}; \\ & a_{ij_1j_2\ldots j_m} t_{j_1j_2} x_{j_3} \ldots x_{j_m} + {}^{m-1}R_{i} = 0. \end{aligned} $$

Изложенный метод исключения применим для уравнений над полем характеристики 2. Специфические особенности при этом следующие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть дано выражение $f(\{a_i\},\{x_j\})$, где символы $\{a_i\},\{x_j\}$ принимают значения из поля характеристики 2. Исключение символа $b \in (\{a_i\},\{x_j\})$ из уравнения $f(\{a_i\},\{x_j\}) = 0$ назовем элиминацией Буля, если оно осуществляется по теореме Буля [19,20] об элиминации: $f(b) = 0 \to f(0)f(1) = 0$.

Например, если $f = a_1 x + a_2$, то после элиминации символа x по теореме Буля получим выражение $f(0)f(1) = a_2(a_2+1) = 0$.

Можно видеть, что, применяя элиминацию Буля к каждому из уравнений (I), можно исключить все неизвестные до последней и тем самым найти решение для всех неизвестных. При этом, однако, возникают следующие трудности: I) если коэффициенты $\{a_i\}$ заданы, то после применения элиминации Буля к системе уравнений (I) получим, в общем случае, не совпадающие для разных уравнений неизвестные x_j; 2) если коэффициенты $\{a_i\}$ не определены, то после элиминации символов по теореме Буля получим совокупность одинаковых уравнений.

Например, пусть даны два уравнения $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3 = 0$; $a_4x_1 + a_5x_2 + a_6 = 0$. Для случая I $a_1, \ldots, a_6$ заданы. По теореме Буля об элиминации имеем $a_2x_2 + a_1a_2x_2 + a_2a_3x_2 + a_1a_3 + a_2a_3x_2 + a_3 = 0$; $a_5x_2 + a_4a_5x_2 + a_5a_6x_2 + a_4a_6 + a_5a_6x_2 + a_6 = 0$. Таким образом, если $a_1 \neq a_4$, $a_2 \neq a_5$, $a_3 \neq a_6$, то x_2 из первого уравнения, вообще говоря, не совпадает с x_2 из второго уравнения. В случае 2, по теореме Буля, можно элиминировать x_2 из последней системы уравнений

$$(a_1a_3 + a_3)(a_2 + a_1a_2 + a_2a_3 + a_1a_3 + a_2a_3 + a_3) = 0;$$

$$(a_4a_6 + a_6)(a_5 + a_4a_5 + a_5a_6 + a_4a_6 + a_5a_6 + a_6) = 0.$$

Продолжая элиминацию символов, получим, что $a_1 = a_4$, $a_2 = a_5$, $a_3 = a_6$. Следовательно, элиминация Буля применима к решению булевых уравнений в форме полиномов Жегалкина, но не к решению систем булевых уравнений. Поэтому элиминацию Буля при решении системы нелинейных алгебраических уравнений над полем характеристики 2 следует дополнить исключением, описанным выше в символьном виде.

Поскольку для поля характеристики 2 справедливо условие идемпотентности $x^k = x$, то последнее уравнение (38)

$$f_n(x_n) \equiv \xi_1 x_n^k + \xi_2 x_n^{k-1} + \ldots + \xi_k x_n + \xi_{k+1} = 0$$

примет вид

$$(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_k)x_n + \xi_{k+1} \equiv \xi x_n + \xi_{k+1} = 0. \qquad (41)$$

Тогда из-за однозначности функций $f_{n-1}, f_{n-2}, \ldots, f_1$ справедлива

ТЕОРЕМА 4. Для заданных коэффициентов $\{a_i\}$ и при $\xi \neq 0$ система уравнений (I) имеет единственное решение на поле характеристики 2.

В особых случаях, когда исключение образующих в (10) затруднено тем, что соответствующие линейные комбинации базисных элементов R_μ вырождены, следует изменить исходную систему уравнений (I), используя свойство идемпотентности $x^k = x$.

ТЕОРЕМА 5. Общее решение символьных уравнений (I) над полем характеристики 2 является числовым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\xi_i(\{a_i\}) = \xi_i \in (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k+1})$, то, применяя элиминацию Буля для исключения символов уравнений (4I), получим по прямому ходу элиминации численное значение первого коэффициента в (I). По обратному ходу элиминации определяются все остальные $\{a_i\}$, а также x_n. Численное значение кортежа решений $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определяется по формулам (38). Тем самым доказано утверждение теоремы 5.

Прямой метод решения систем нелинейных алгебраических уравнений, изложенный в данной работе, позволяет получать решения последних в символьном виде (38). Это особенно важно при решении систем на ЭВМ, а также для теоретических исследований. При решении на ЭВМ подстановка чисел желательна только на самом последнем этапе вычислений, поскольку нелинейные задачи чрезвычайно чувствительны к погрешностям машинной арифметики. Алгоритм исключения (30)-(37), реализованный на языке символьных преобразований типа REDUCE-2, может дать возможность получать аппаратно реализованные стандартные программы решения систем для определенных m и n. В случае систем уравнений над полем характеристики 2 это даст возможность аппаратно реализовать правила вывода.

Для получения точного (символьного) решения систем нелинейных алгебраических уравнений (38) при заданных m и n с помощью алгоритма исключения (30)-(37) не требуется использование матричного представления алгебр (6)-(8). Используются лишь перестановочные соотношения (29). Численное значение решения определяется подстановкой заданных коэффициентов $\{a_i\}$ в полученные формулы (38). Однако имеются такие комбинации $\{a_i\}$, при которых соответствующие знаменатели f_i, появляющиеся при обращении Λ и исключении базисных элементов R_μ, могут обратиться в нуль. Поэтому формулы (38) необходимо дополнить условными переходами, типа указанных на стр. I42. В программной реализации условные переходы обеспечиваются сменой имен присвоения $a_{ij_1j_2} \to a_{i+1,j_1,j_2}$, $a_{ij} \to a_{i+1,j}$, $a_i \to a_{i+1}$ (если в i-м уравнении коэффициенты при исключении неизвестных равны нулю, то эти неизвестные исключаются из следующего уравнения). Ясно, что при этом в случае равенства всех коэффициентов i-го уравнения нулю, последнее уравнение системы вида (38) содержит x_n $(x_{n-1}, \ldots)$ как параметр $f_{n-1}(x_{n-1}, x_n) = 0$.

Теоретическое значение изложенного метода состоит в том, что сведение систем уравнений вида (I) к (38) позволяет найти все решения системы. Можно показать, что верхняя грань количества решений для систем вида (I) определяется формулой

$$N = \left.m^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\right\}n. \qquad (42)$$

Формула (42) следует из теоремы Безу [21]. Число решений (I) зависит от $\{a_i\}$ и принимает значения от 0 до N. Обращение в нуль соответствующих знаменателей f_i приводит к понижению степени уравнения $f_n(x_n) = 0$ и тем самым к уменьшению количества решений. Расстановка всех условных переходов для символьных решений (38) гарантирует нахождение точного количества решений для заданных $\{a_i\}$ из отрезка $[0,N]$.

Практическое значение формул вида (38) следующее. Необходимость нахождения при достаточно больших m и n всех N решений (I) встречает непреодолимые вычислительные трудности не из-за недостатков того или иного метода, а из-за нелинейности. В изложенном методе это проявляется в трудности решения уравнения $f_n(x_n) = 0$ при достаточно больших степенях N. В используемых в настоящее время методах решения (точнее сказать, методах уточнения решения) систем - в выборе соответствующего начального приближения. Причем для последних невозможно остановить вычислительный процесс, поскольку заранее неизвестно число решений систем для заданных $\{a_i\}$ из отрезка $[0,N]$. Поэтому если даже начальное приближение выбрано удачно и решение получено, то нет никакой гарантии, что не существует иного решения, которое на самом деле и представляет интерес.

Однако явный вид формул (38) для m,n позволяет при задании x_n (с помощью физического измерения, например) однозначно найти по x_n остальные $n-1$ компоненты кортежа $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Уравнение $f_n(x_n) = 0$ при этом используется для проверки правильности составления уравнений (I), а также уточнения x_n. Физичность x_n и однозначность функций $f_{n-1},\ldots,x_n$ приводит к физичности всего кортежа решений. Снимается проблема вычисления x_n и перебора N значений x_n для нахождения физически осмысленного.

Кроме этого, точная линеаризация систем позволяет обобщать хорошо изученные методы исследования линейных систем (сетей, например) на нелинейный случай [22].

В заключение автор выражает благодарность П.Г. Кузнецову за стимулирующие обсуждения постановок задач, а также Р.М.Ямалееву за обсуждение формул (39)-(40).

Литература

1. МАМФОРД Д. Алгебраическая геометрия. I.Комплексные проективные многообразия. -М.: Мир, 1979. - 256 с.

2. ЖУКОВ Л.А., СТРАТАН И.П. Установившиеся режимы сложных электрических сетей и систем. -М.: Энергия, 1979. - 416 с.

3. МАРЧУК Г.И. Методы вычислительной математики. -М.: Наука, 1980. - 536 с.

4. ПШЕНИЧНЫЙ Б.Н. Метод линеаризации. -М.: Наука.1983,-136 с.

5. БУТ Э.Д. Численные методы.-М.: ГИФМЛ, 1959. - 240 с.

6. ВАСИЛЬЕВ Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. - М.: Наука, 1980. - 520 с.

7. ЧИЧИНАДЗЕ В.К. Решение невыпуклых нелинейных задач оптимизации. -М.: Наука, 1983. - 256 с.

8. ХАСИЛЕВ В.Я. Элементы теории гидравлических цепей. -Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1964, №1, с.69-88.

9. Методы и алгоритмы расчета тепловых сетей /Под ред. Хасилева В.Я. и Меренкова А.П. -М.: Энергия, 1978. - 176 с.

10. ЕВДОКИМОВ А.Г., ДУБРОВСКИЙ В.В., ТЕВЯШЕВ А.Д. Потокораспределение в инженерных сетях. -М.: Стройиздат,1979. - 199 с.

11. ВАН ДЕР ВАРДЕН Б.Л. Современная алгебра. Ч.2. -М.-Л.:ОНТИ, 1937. - 210 с.

12. ГРИГОРЬЕВ Д.Ю., ЧИСТОВ А.А. Быстрое разложение многочленов на неприводимые и решение систем алгебраических уравнений. -Докл. АН СССР, 1984, т.275, №6, с.1302-1306.

13. ИВАНИСОВ А.В., ПОЛИЩУК В.К. Метод нахождения корней полиномов, сходящийся при любом начальном приближении. - Журн. вычисл. математики и мат.физики, 1985, т.25, №5, с.643-653.

14. ПШЕНИЧНИКОВ С.Б., ГЕНВАРЕВ А.А. Основы альтернионного анализа нелинейных сетей гидравлического типа. -Изв. вузов СССР. Энергетика, 1984, №4, с.113-116.

15. Их же. Альтернионный анализ на примере расчета трехконтурной сети. -Изв. вузов СССР. Энергетика, 1984, №8, с.98-100.

16. КУЗНЕЦОВ П.Г., ПШЕНИЧНИКОВ С.Б. Спинорный метод решения систем нелинейных алгебраических уравнений. -Докл. АН СССР, 1985, т. 283, №5, с.1073-1076.

17. ДИРАК П.А.М. Принципы квантовой механики. -М.: ГИФМЛ,1960. - 434 с.

18. ЗАЙЦЕВ Г.А. Основные формулы для многомерного действительного спинора и алгебраическая модель квантованных волновых полей. - Докл. АН СССР, 1964, т.156, №2, с.294-297.

19. КЛИНИ С.К. Математическая логика. -М.: Мир, 1973. -480 с.

20. СТЯЖКИН Н.И. Становление идей математической логики. -М.: Наука, 1964. - 304 с.

21. СУШКЕВИЧ А.К. Основы высшей алгебры. -М.-Л.: ГНТИ, 1931. - 328 с.

22. ПШЕНИЧНИКОВ С.Б. Спинорный анализ нелинейных сетей. -Изв. АН ЛатвССР. Серия физических и технических наук, 1985, №6.

Поступила в ред.-изд.отд.
17 июля 1986 года