ВОПРОСЫ АЛГОРИТМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА СТРУКТУРНОЙ ИНФОРМАЦИИ
(Вычислительные системы)
1987 год Выпуск 119

УДК 519.1

ГРАФЫ С СОВПАДАЮЩИМИ ПОЛНЫМИ МАТРИЦАМИ СЛОЕВ

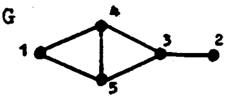
А.А. Добрынин

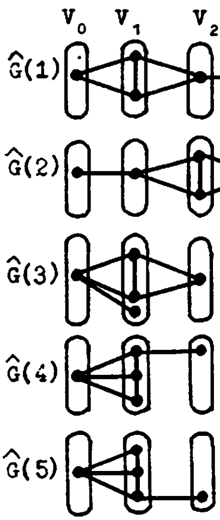
При изучении свойств графов, основанных на расстояниях между вершинами, естественным объектом анализа являются разбиения множества вершин графа на классы (слои) вершин, равноудаленных от некоторого выделенного подмножества вершин [1]. Такие разбиения используются, например, для сокращения вычислений в трудоемких алгоритмах обработки структурной информации (поиск клик, общих подграфов, вложений графов и т.п.), определения подобия графов (изометричность графов), анализа связности, построения разнообразных метрических характеристик [2-4]. Информацию о мощностях слоев вершин в разбиениях по отношению к подмножествам вершин заданного порядка содержит матрица слоев графа. В полной матрице слоев графа учитывается дополнительное количество ребер, соединяющих слои в разбиениях. В работе рассматриваются графы с совпадающими полными матрицами слоев.

Пусть $G(V,X)$ - связный неориентированный граф без петель и кратных ребер, $V(G)$ - множество вершин графа, $X(G)$ - множество ребер и $|V(G)| = p$ - порядок графа. Расстояние $d(v,V_0)$ между вершиной $v \in V(G)$ и подмножеством $V_0 \subseteq V(G)$ определим как $d(v,V_0) = \min_{u \in V_0} d(v,u)$, где $d(v,u)$ - кратчайшее расстояние между вершинами v и u.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [1]. Разбиением множества вершин графа G относительно подмножества $V_0 \subseteq V(G)$ называется упорядоченное разбиение

$$\hat{G}(V_0) = \{V_j(V_0) \mid j = 0,1,2,\ldots,k(V_0),\ v \in V_j(V_0) \Leftrightarrow d(v,V_0) = j\}.$$





$$\lambda^1(G) = \left\| \begin{matrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|$$

б)

$$\lambda^1_C(G) = \left\| \begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\|$$

в)

а)

Рис. I

Множество $V_j(V_0)$ называется j-слоем разбиения $\hat{G}(V_0)$, j – номер слоя $V_j(V_0)$, а $k(V_0)$ – длина разбиения. Ясно, что $V_i(V_0) \cap V_j(V_0) = \emptyset$ при $i \neq j$ и $\bigcup_{j=0}^{k(V_0)} V_j(V_0) = V(G)$. Разбиение по отношению к некоторому подмножеству вершин назовем относительным разбиением. На рис. I,а показаны одновершинные относительные разбиения $\hat{G}(v)$, $v \in V(G)$. Множеству разбиений относительно всех подмножеств вершин порядка n можно сопоставить матрицу слоев графа порядка n – $\lambda^n(G) = \|\lambda_{ij}\|$, $i = 1,2,\ldots,C_p^n$, $j = 1,2,\ldots,p-1$, где элемент λ_{ij} равен числу вершин в j-слое разбиения $\hat{G}(V_i)$ по отношению к i-му множеству $V_i \subseteq V(G)$, $|V_i| = n$. Упорядочив строки матрицы $\lambda^n(G)$ по уменьшению длины (числа ненулевых элементов в строке), а строки одинаковой длины упорядочив лексикографически получим канонический вид матрицы $\lambda^n(G)$, который будет использоваться при сравнении матриц слоев графов. Матрица слоев первого порядка графа G (рис. I,б) соответствует относительным разбиениям на рис. I,а. Матрицы слоев любого порядка не определяют графы

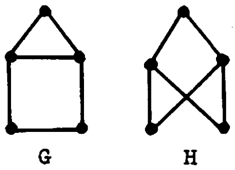


Рис.2

однозначно. Для графов G и H (рис.2) выполняется $\lambda^i(G) = \lambda^i(H)$, $i = 1,2,3,4$ [2]. По аналогии с вершинными матрицами слоев $\lambda^n(G)$ рассматриваются реберные матрицы слоев, в которых элементы соответствуют значениям разрезов между слоями разбиений, т.е. $\lambda^n_X(G) = \| a_{ij} \|$, $a_{ij} = |E_{j-1,j}|$, где $E_{j-1,j}$ – множество ребер графа, одна вершина которых принадлежит слою V_{j-1}, а другая – слою V_j [2]. Объединяя две части матрицы, получим полную матрицу слоев графа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [2]. Полной матрицей слоев порядка n графа G называется матрица $\lambda^n_C(G) = (\lambda^n(G)\,|\,\lambda^n_X(G))$, в которой каждая строка состоит из строк матриц $\lambda^n(G)$ и $\lambda^n_X(G)$, соответствующих одному и тому же относительному разбиению.

Канонический вид для полной матрицы слоев определяется так же, как для матрицы слоев. Полная матрица слоев на рис.I,в соответствует относительным разбиениям на рис.I,а.

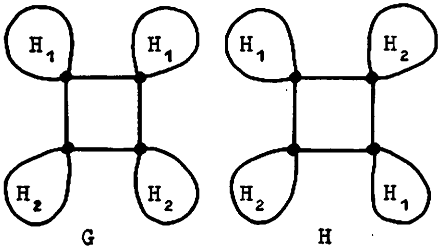


Рис. 3

Не представляет трудности построить графы с совпадающими полными матрицами слоев первого порядка. Например, для графов G и H (рис.3) достаточно неизоморфности подграфов H_1 и H_2 и совпадения строк в $\lambda^1(H_1)$ и $\lambda^1(H_2)$, соответствующих вершинам присоединения графов H_1 и H_2. Далее полную матрицу слоев порядка n графа G будем обозначать $\lambda^n(G)$. Ответ на вопрос о существовании неизоморфных графов с совпадающими полными матрицами слоев порядка $n > 1$ [4] дает следующая

ТЕОРЕМА. *Для любого $k > 0$ найдется число $N(k)$ такое, что для любого $p \geq N(k)$ существуют связные неизоморфные графы G и H порядка p, для которых совпадают полные матрицы слоев $\lambda^n(G) = \lambda^n(H)$, $n = 1,2,\ldots, k$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим множество графов $\{G_k, H_k\}$, $k = 1,2,\ldots$, такое, что $\lambda^i(G_k) = \lambda^i(H_k)$, $i = 1,2,\ldots,k$. Для $k = 1$ рассмотрим графы G_1 и H_1 (рис.4), для которых $\lambda^1(G_1) = \lambda^1(H_1)$. Действительно, для неэквивалентных вершин графов G_1 и H_1 строки в полных матрицах слоев первого порядка имеют вид (нумерация соответствующих вершин в графах G_1 и H_1 на рис.4 совпадает): для вершины I – (2,3,5,2|2,3,7,2), для вершины 2 – (I,4,5,2|I,4,7,2), для вершин 3 и 4 – (5,5,2|5,7,2) и для u_1, v_1 – (4,8|4,8). Графы G_2 и H_2 образуем из двух пар копий G_1 и H_1, присоединяемых вершинами u_1 и v_1 (см.рис.4). Нетрудно убедиться,что $\lambda^i(G_2) = \lambda^i(H_2)$, $i = 1,2$.

Приведем строки полных матриц слоев первого порядка графов G_2 и H_2 для некоторых неэквивалентных вершин. Вершины, имеющие совпадающие строки, на рис.4 помечены одинаково. Для вершин I, II строка имеет вид (2,3,8,II,20,8|2,3,I0,I3,20,8),для вершин 4,I4 – (I,4,8,II,20,8|I,4,I0,I3,20,8), для вершин 2,3,I2 и I3 – (5,8,II,20,8|5,I0,I3,20,8), для вершин 9,I0 – (7,I7,20,8|7,I9,20,8) и для u_2, v_2 – (4,I6,32|4,I6,32). В полных матрицах слоев второго порядка графов G_2 и H_2 рассмотрим строки, соответствующие парам неэквивалентных вершин из разных подграфов G_1 и H_1 (иначе выбор пар вершин очевиден). Ниже перечисляются пары вершин графов G_2, H_2 и соответствующие строки в полных матрицах слоев второго порядка. Нумерация вершин в G_2 и H_2 совпадает. Имеем (I,II) – (4,6,I3,I2,I6|4,6,20,I2,I6); (I,I4) – (3,7,I3,I2,I6|3,7,20,I2,I6); (I,I2),(I,I3) – (7,II,I5,I8|7,I3,I7,I8); (I,I5) – (9,I9,2I,2|9,22,23,2); (I,5) – (4,6,I3,I2,I6|4,6,I8,I2,I6); (I,8) – (3,7,I3,I2,I6|3,7,I8,I2,I6); (I,6),(I,7) – (7,I0,I2,I4,8|7,I3,I6,I4,8); (I,I0) – (9,I6,I8,8|9,20,I8,8); (I, u_2),(I,v_2) – (6,I5,30|6,I7,30); (2,6),(2,7)(3,6),(3,7) – (I0,I3,I2,I6|I0,I8,I2,I6); (2,I0),(3,I0) – (II,I8,I4,8|I2,22,I4,8); (2,II),(3,II) – (7,II,I5,I8|7,I3,I7,I8); (2,I2),(2,I3),(3,I2),(3,I3) – (I0,I3,I2,I6|I0,20,I2,I6); (2,I4),(3,I4) – (6,I2,I5,I8|6,I4,I7,I8); (2,I5)(3,I5) – (I2,2I,I8|I2,23,I8); (4,6),(4,7) – (6,II,I2,I4,8|6,I4,I6,I4,8); (4,8) – (2,8,I3,I2,I6|2,8,I8,I2,I6); (4,I0) – (8,I7,I8,8|8,2I,I8,8); (4,I2),(4,I3) – (6,I2,I5,I8|6,I4,I7,I8); (4,I4) – (2,8,I3,I2,I6|2,8,20,I2,I6); (4,I5) – (8,20,2I,2|8,23,23,2); (9,I0) – (II,24,I6|I2,24,I6); (9,u_2),(9,v_2) – (7,20,24|9,20,24); (9,I5) – (II,24,I6|I4,24,I6).

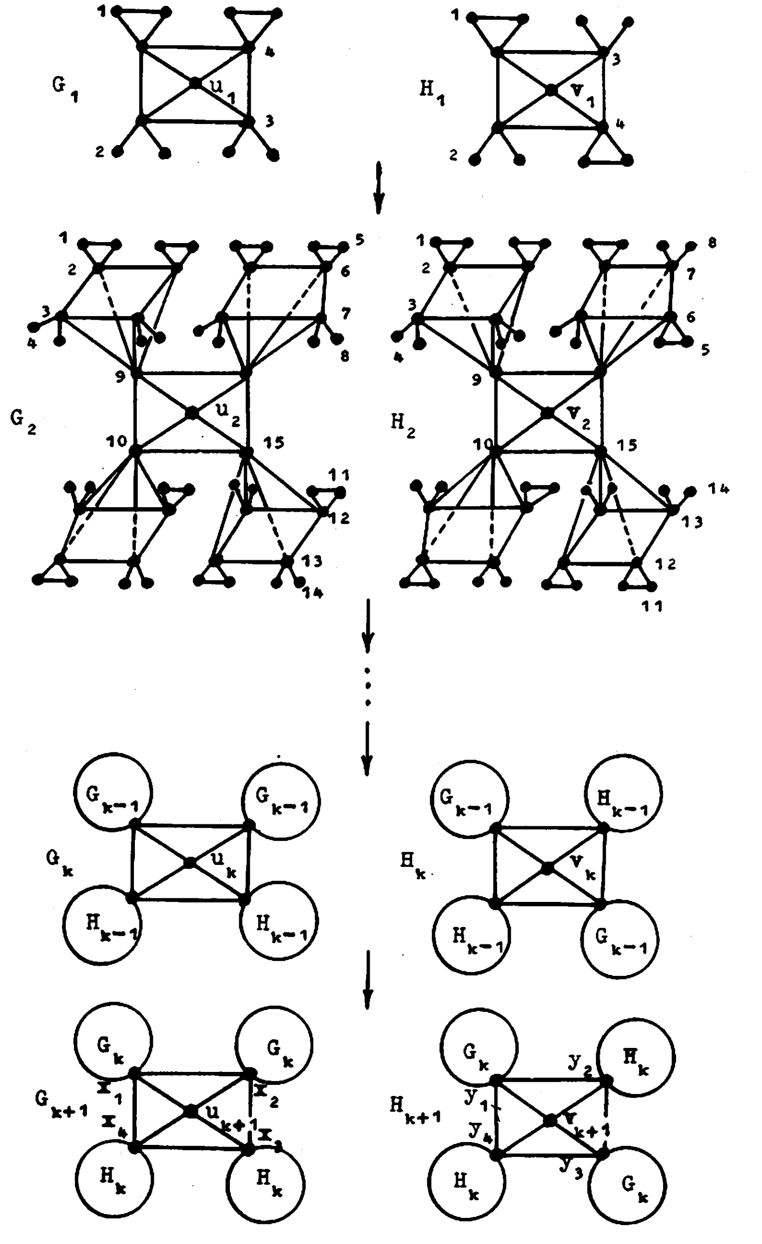


Рис. 4. Построение графов G_k и H_k, $k = 1,2,3,\dots$

Вид остальных строк легко восстанавливается по вышеприведенным строкам. Предположим, что уже построены графы G_k и H_k, для которых выполняется $\lambda^i(G_k) = \lambda^i(H_k)$, $i = 1,2,\dots, k$. Тогда графы G_{k+1} и H_{k+1} строятся из двух пар графов G_k и H_k присоединением вершин u_k и v_k (рис.4). В графах G_k и H_k вершины u_k и v_k являются центром и $r(G_k) = r(H_k) = k+1$. Покажем, что для графов G_{k+1} и H_{k+1} выполняется $\lambda^i(G_{k+1}) = \lambda^i(H_{k+1})$, $i = 1,2,\dots, k+1$.

Пусть графы G_k и H_k построены описанным выше способом и $\lambda^i(G_k) = \lambda^i(H_k)$, $i = 1,2,\dots,k$. Рассмотрим вспомогательные графы G_k^* и H_k^*, образованные из графов G_k и H_k присоединением к вершинам u_k и v_k простой цепи $(w_1, w_2, \dots, w_k)$ длины $k-1$ (рис.5).

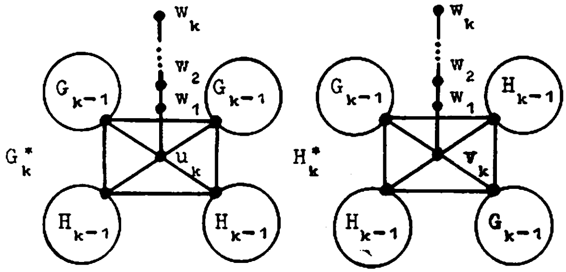


Рис. 5

Пусть подмножества $U_0 \subseteq V(G_k)$, $V_0 \subseteq V(H_k)$ такие, что $u_k \notin U_0$, $v_k \notin V_0$, $|U_0| = |V_0| = m \le k$, и строки в полных матрицах слоев $\lambda^m(G_k)$ и $\lambda^m(H_k)$, соответствующие разбиениям относительно U_0 и V_0, совпадают. Так как $G_k \subseteq G_k^*$, $H_k \subseteq H_k^*$, то будем использовать одни и те же обозначения для соответствующих подмножеств вершин графов G_k и G_k^*, H_k и H_k^*. Из свойств графов G_k и H_k следует, что $d(u_k, U_0) = d(v_k, V_0) = t$. В разбиениях вершин графов G_k^* и H_k^* относительно подмножеств $U_0 \cup w_i$ и $V_0 \cup w_i$, $i = 1,2,\dots,k$, вершины u_k и v_k будут находиться в слоях с номером, равным $\min(i,t)$.

ЛЕММА. Для подмножеств $U_0 \cup w_i$ и $V_0 \cup w_i$, $i = 1,2,\dots,k$, соответствующие им строки в полных матрицах слоев $\lambda^{m+1}(G_k^*)$ и $\lambda^{m+1}(H_k^*)$ совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $U_1 = \{u \in V(G_k) \mid d(u, u_k) \le k\}$, $V_1 = \{v \in V(H_k) \mid d(v, v_k) \le k\}$, $U_2 = \{u \in V(G_k) \mid d(u, u_k) = k\}$, $V_2 = \{v \in V(H_k) \mid d(v, v_k) = k\}$. По построению графов G_k и H_k подграфы, порожденные на множествах U_1 и V_1, являются изоморфными. Таким образом, если $U_0 \subseteq U_1$ и $V_0 \subseteq V_1$, то в любом слое разбиений вершин графов G_k^* и H_k^* относительно $U_0 \cup w_i$ и $V_0 \cup w_i$ будет находиться одинаковое количество вершин из U_2 и V_2, и, следовательно, строки в $\lambda^{m+1}(G_k^*)$ и $\lambda^{m+1}(H_k^*)$ для $U_0 \cup w_i$, $V_0 \cup w_i$ совпадают. Если в подмножествах U_0 и V_0 содержатся вершины, находящиеся от вершин u_k и v_k на расстоянии $k+1$, то в любом слое разбиений относительно $U_0 \cup w_i$ и $V_0 \cup w_i$ также будет находиться одинаковое количество вершин из U_2 и V_2. Это следует из совпадения строк в $\lambda^m(G_k)$ и $\lambda^m(H_k)$, соответствующих подмножествам U_0 и V_0. Лемма доказана.

Пусть выбрано произвольное $U_0 \subseteq V(G_{k+1})$, $|U_0| = m$. Укажем такое подмножество вершин $V_0 \subseteq V(H_{k+1})$, $|V_0| = m$, что строки, соответствующие U_0 и V_0 в полных матрицах слоев $\lambda^m(G_{k+1})$ и $\lambda^m(H_{k+1})$, совпадают. Рассмотрим две возможности: $m \le k$ и $m = k+1$. Для отличия подграфы G_k и H_k в графе G_{k+1} (или H_{k+1}) будем обозначать G_k' и G_k'', H_k' и H_k''. Пусть $m \le k$, тогда в общем случае U_0 можно представить в виде $U_0 = \bigcup_{i=1,2,3,4} U_i$, где $U_1 \subseteq V(G_k')$, $U_2 \subseteq V(G_k'')$, $U_3 \subseteq V(H_k')$, $U_4 \subseteq V(H_k'')$, $|V_i| = m_i$, $i = 1,2,3,4$, и $\sum_{i=1}^{4} m_i = m$ (случай, когда $u_k \in U_0$, рассматривается далее). Так как для графов G_k и H_k по предположению выполняется $\lambda^i(G_k) = \lambda^i(H_k)$, $i = 1, 2,\dots,k$, то в графе H_{k+1} найдется такое подмножество вершин $V_0 = \bigcup_{i=1,2,3,4} V_i$, $V_1 \subseteq V(G_k')$, $V_2 \subseteq V(H_k')$, $V_3 \subseteq V(G_k'')$, $V_4 \subseteq V(H_k'')$, $|V_i| = m_i$, $i = 1,2,3,4$, что строки в $\lambda^{m_i}(G_k)$ и $\lambda^{m_i}(H_k)$, соответствующие U_i и V_i, $i = 1,2,3,4$, совпадают. Далее, если вершины $x_i \in U_i$, $i = 1,2,3,4$ (см. рис. 4), то строки для U_0 и V_0 в $\lambda^m(G_{k+1})$ и $\lambda^m(H_{k+1})$ совпадают. Пусть вершины $x_i \notin U_i$ и $y_i \notin V_i$ для некоторого i находятся в слое с номером t, меньшим, чем $d(x_i, U_i) = d(y_i, V_i)$. В этом случае мы попадаем в условия леммы, так как положение вершин графов G_k и H_k в слоях разбиений относительно U_i и V_i соответствует положению вершин в разбиениях относительно $U_i \cup w_t$ и $V_i \cup w_t$ для графов G_k^* и H_k^*. Таким образом, получаем, что строки для U_0 и V_0' в $\lambda^m(G_{k+1})$ и $\lambda^m(H_{k+1})$ совпадают. Если вершины $u_k \in U_0$ и $v_k \in V_0$, то вершины x_i и y_i,

$i = 1,2,3,4$, будут находиться либо в U_0 и V_0, либо в слое с номером I, что рассматривалось выше. Из конструкции графов G_{k+1} и H_{k+1} следует, что между множествами U_0 и V_0 можно установить взаимно-однозначное соответствие, так как по предположению его можно установить между подмножествами U_i и V_i, $i = 1,2,3,4$. Пусть $m = k+1$. Если множество U_0 представляется в виде объединения хотя бы двух непустых подмножеств $U_0 = U_1 \cup U_2$ таких, что $U_0 \not\subseteq V(G_k)$ или $U_0 \not\subseteq V(H_k)$, то рассмотрение сводится к предыдущему, так как $|U_i| \leq k$, $i = 1,2$. Если $U_0 \subseteq V(G_k)$ или $U_0 \subseteq V(H_k)$, то, очевидно, в качестве V_0 нужно выбрать такое же множество вершин из подграфов G_k или H_k, содержащихся в H_{k+1}. Величина $N(k)$ в формулировке теоремы является порядком графов G_k и H_k. Ясно, что при присоединении к вершинам u_k и v_k простой цепи из n вершин получим графы порядка $N(k)+n$ с совпадающими полными матрицами слоёв порядка $i = 1,2,\ldots,k$. Теорема доказана.

Путем выбора графов G_1 и H_1 можно строить графы G_k и H_k, обладающие подграфами с заданными свойствами. Пусть p_1 – порядок графов G_1 и H_1.

СЛЕДСТВИЕ I. Для величины $N(k)$ из утверждения теоремы выполняется $N(k) = \frac{1}{3}(4^{k-1}(3p_1+1)-1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как величина $N(k)$ есть порядок графов G_k и H_k, то из способа их построения следует, что $N(k) = 4N(k-1)+1$, $N(1) = p_1$, откуда $N(k) = p_1 4^{k-1} + \frac{1}{3}(4^{k-1}-1)$. Следствие доказано.

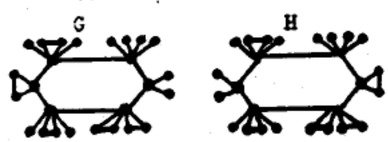


Рис. 6

Значение $N(k)$ дает верхнюю оценку минимального порядка графов с совпадающими полными матрицами слоев порядка $i = 1, 2,\ldots,k$. Например, для графов G и H порядка 26 (рис.6) выполняется $\lambda^i(G) = \lambda^i(H)$, $i = 1,2$, в то время как $N(2) = 53$. Существуют и регулярные графы с совпадающими матрицами слоев порядка $n > 1$. Графы G и H порядка 100 на рис.7 являются регулярными степени 3 с совпадающими полными матрицами слоев $\lambda^i(G) = \lambda^i(H)$, $i = 1,2$. Для регулярных графов можно сформулировать утверждение, аналогичное теореме I.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любого $k > 0$ существуют регулярные графы G и H порядка $R(k)$

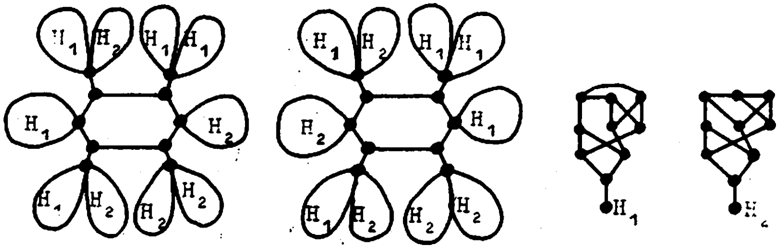


Рис. 7

с совпадающими полными матрицами слоев $\lambda^i(G) = \lambda^i(H)$, $i = 1,2,\ldots,k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу особенностей конструкции графов из теоремы I будем строить регулярные графы степени 7. Построим графы G_1 и H_1 . Рассмотрим графы $L_1 = C_3 \cup C_7$ и $L_2 = C_3 \cup C_3 \cup C_4$. Пусть вершины $u_1, u_2, v_1, v_2 \in V(L_1)$ и $u_1, u_2 \in V(C_3)$, $v_1, v_2 \in V(C_7)$, причем вершины v_1 и v_2 являются смежными. Аналогично вершины $u_3, u_4, v_3, v_4 \in V(L_2)$ и $u_3, u_4 \in V(C_3)$, $v_3, v_4 \in V(C_4)$, вершины v_3 и v_4 также являются смежными. Удалим из графов $\overline{L}_1$ и $\overline{L}_2$ ребра (u_i, v_i), $i = 1,2,3,4$, вершины u_1, v_1, u_2, v_2 соединим с новой вершиной u , и вершины u_3, v_3, u_4, v_4 соединим с новой вершиной v . В результате получим неизоморфные графы L_1' и L_2' порядка II, в которых одна вершина имеет степень, равную 4, а остальные вершины имеют степень, равную 7 (рис.8). Графы L_1' и L_2' можно использовать для построения графов G_1 и H_1 , так как строки в полных матрицах слоев $\lambda^1(L_1')$ и $\lambda^1(L_2')$, соответствующие вершинам u и

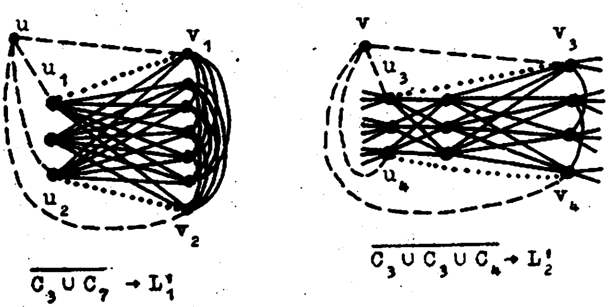


Рис. 8

v, совпадают и имеют вид $(4,6,0,\dots 0|4,20,0,0,\dots,0)$. Пусть построены графы G_k и H_k для некоторого k, в которых вершины u_k и v_k имеют степень, равную 4, а остальные вершины – степень, равную 7. Присоединим к вершинам u_k и v_k новый граф, в котором одна вершина имеет степень, равную 3, а у остальных вершин степень равна 7. Такой граф, например, порядка 10 легко может быть получен из K_8. Пусть $N(k)$ – порядок графов G_k и H_k, тогда $R(k) = N(k) + 9$, где, по следствию I, $N(k) = \frac{1}{3}((3p_1 + 1)4^{k-1} - 1)$. Так как $p_1 = 45$, то $R(k) = \frac{1}{3}(136 \cdot 4^{k-1} - 1) + 9$. Следствие доказано.

Аналогичным образом можно строить графы степени r с совпадающими полными матрицами слоев для других значений r.

Рассматриваются разбиения множества вершин графа относительно его подмножества заданной мощности. Разбиениям сопоставляется матрица слоев графа, элементы строки которой равны числу вершин в слоях соответствующего разбиения. В полной матрице слоев, кроме того, учитывается количество ребер между слоями разбиений. Полученные в работе результаты дают отрицательный ответ на вопрос об однозначности представления графов полными матрицами слоев заданного порядка. Более того, подбирая графы G_1 и H_1, легко построить такие семейства графов с совпадающими полными матрицами слоев, для которых в относительных разбиениях будет совпадать количество ребер внутри соответствующих слоев. Примеры графов порядка p с совпадающими полными матрицами слоев порядков $1,2,\dots,p-1$ пока неизвестны.

Литература

I. СКОРОБОГАТОВ В.А. Относительные разбиения и слои графов //Вопросы обработки информации при проектировании систем. – Новосибирск, 1977. – Вып. 69: Вычислительные системы. – С. 3-10.

2. СКОРОБОГАТОВ В.А., ХВОРОСТОВ П.В. Анализ метрических свойств графов //Методы обнаружения закономерностей с помощью ЭВМ. – Новосибирск, 1981. – Вып. 91: Вычислительные системы.–С.3-20.

3. ДОБРЫНИН А.А. Графы с совпадающими цепными матрицами слоев //Настоящий сборник. – С.13-33.

4. СКОРОБОГАТОВ В.А. Алгоритмическая обработка структурной информации //Проблемы обработки информации. – Новосибирск, 1983. –Вып. 100: Вычислительные системы. – С. 101-116.

Поступила в ред.-изд.отд.
23 апреля 1987 года