ВОПРОСЫ АЛГОРИТМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА СТРУКТУРНОЙ ИНФОРМАЦИИ
(Вычислительные системы)
1987 год Выпуск 119

УДК 519.1

ВЫНУЖДЕННО 3-РАСКРАШИВАЕМЫЕ СТЕПЕННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

И.Э. Зверович

Рассматриваются конечные неориентированные графы без петель кратных ребер. Используются общая терминология из [2] и терминология по степенным последовательностям из [4].

В настоящей работе охарактеризованы вынужденно 3-раскрашиваемые степенные последовательности, т.е. графические последовательности, все реализации которых являются 3-раскрашиваемыми графами. Интерес к этой задаче вызван не только тем, что она находится в рамках общей теории P-графических последовательностей [4], но и алгоритмической сложностью проблем, связанных с 3-раскрасками графов [1]. Кроме того, известна характеризация вынужденно 2-раскрашиваемых последовательностей [3].

Напомним, что переключением $uvwx$ в графе G, содержащем ребра uv и wx, но не содержащем ребра vw и xu, называется замена ребер uv, wx ребрами vw, xu. Очевидно, переключения не изменяют степенную последовательность.

Ниже рассматривается последовательность π вида

$$\pi = (d_1, \dots, d_p),\ d_1 \ge \dots \ge d_p \ge 1. \qquad (1)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть π – графическая последовательность вида (1), у которой $p \ge 4$ и $d_4 \ge 3$. Если $\pi \notin \{(3^4\,2), (3^4\,2^2), (3^5\,1), (3^6), (4\,3^4\,2), (4^2\,3^4), (4^6), (3^5\,2\,1), (3^6\,2), (4\,3^5\,1), (3^6\,1^2), (3^7\,1), (p{-}1\ 3^4\ 1^{p-5})\ (p \ge 5)\}$, то π не является вынужденно 3-раскрашиваемой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное: π является вынужденно 3-раскрашиваемой. В множестве $R(\pi)$ реализаций последовательности π рассмотрим подмножество $R_0(\pi)$, состоящее из графов, у которых вершина u_1 смежна с вершинами u_2, u_3, u_4 (вершина u_1 соответствует элементу d_1). Из графичности π и доказательства теоремы Гавела-Хакими [2] следует, что $R_0(\pi) \neq \emptyset$. Выберем в $R(\pi)$ такой граф G, который имеет наибольшее значение $|EH|$ на множестве $R(\pi)$ и в котором существует подграф H, удовлетворяющий следующим свойствам:

1) $|VH| = 4$;

2) $\deg_G v \geq 3$ для любой $v \in VH$;

3) $K_{1,3}$ является подграфом подграфа H;

4) H имеет максимальное число ребер среди всех подграфов, удовлетворяющих пп. 1-3.

Корректность выбора G следует из того, что любой $G' \in R_0(\pi)$ имеет подграф $G'\langle\{u_1,u_2,u_3,u_4\}\rangle$, удовлетворяющий свойствам 1-3 (и, следовательно, есть подграф, удовлетворяющий пп. 1-4).

Рассмотрим несколько свойств графа G.

1^0. Если $u,v \in VH$, $x,y \in VG \setminus VH$, $u \neq v$, $x \neq y$, $u \not\sim v$, $u \sim x$, $v \sim y$, то $x \sim y$.

Действительно, если $x \not\sim y$, то переключение $vyxu$ увеличит число ребер в H, что противоречит выбору G.

2^0. Степенная последовательность индуцированного подграфа графа G является вынужденно 3-раскрашиваемой.

Для подграфа H возможны только три ситуации, показанные на рис.1.

Пусть $H \simeq H_1$. Так как $\deg_G v \geq 3$ для всех $v \in VH$, то легко видеть, что имеет место одна из трех возможностей (рис.2,а). Построим ребра на основании 1^0 (рис.2,б). Получаем противоречие с выбором H, так как каждый подграф на рис.2,б является подграфом в G и имеет подграф, удовлетворяющий пп.1-3 и содержащий больше ребер, чем H. Доказано, что $H \not\cong H_1$.

Если $H \simeq H_2$, то снова воспользуемся условием 2 и свойством 1^0. Ситуации показаны на рис.3, где "жирные" ребра проведены на основании 1^0. Случаи "б" и "г" (рис.3) противоречат, как и выше, условию 4 выбора H. Граф на рис.3,в является индуцированным подграфом в G, так как проведение любого дополнительного ребра в нем приводит к подграфу $K_4 - e$, удовлетворяющему условиям 1-3 и имеющему больше ребер, чем H. В утверждении 2 будет показано, что G не может иметь индуцированного подграфа со степенной последовательностью (3^6).

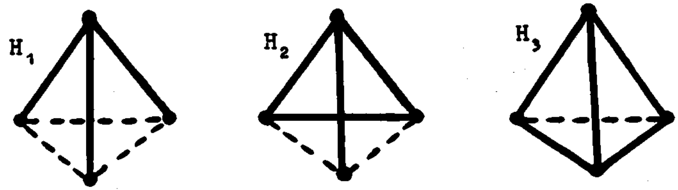

Рис.I

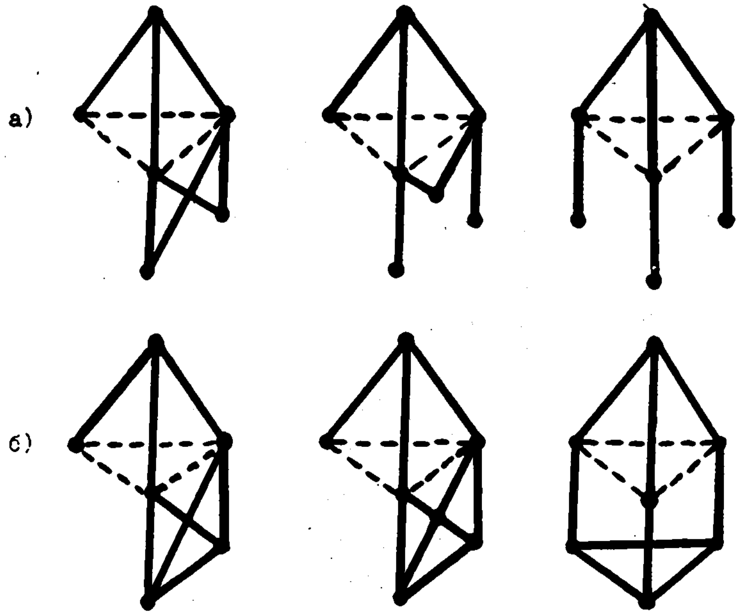

Рис.2

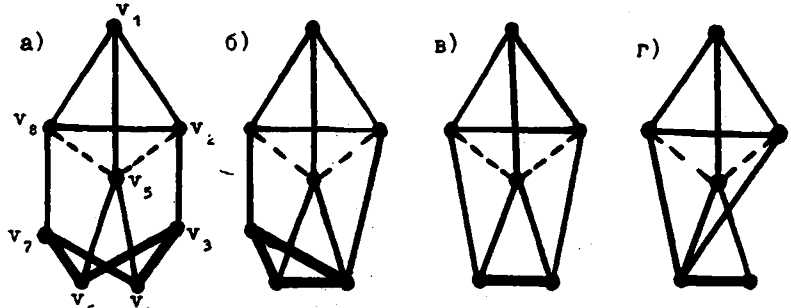

Рис.3

Остается рассмотреть граф на рис.3,а. Поскольку $K_4 - e \not\subset G$, то ребра v_2v_5, v_5v_8, v_3v_7, v_4v_6 не принадлежат EG. Следовательно, добавив эти четыре ребра, но удалив ребра v_8v_7, v_5v_6, v_4v_5, v_2v_3, получим из G граф с той же последовательностью степеней, содержащий K_4. Противоречие.

Применение условия 2 и свойства 1^0 позволяет легко показать, что в случае $H \cong H_3$ граф G имеет индуцированный подграф со степенной последовательностью $(3^4\,2)$, $(4\,3^4)$, $(4^3\,3^2)$, $(3^4\,2^2)$, $(4\,3^4\,2)$, $(4^2\,3^4)$, $(5\,3^5)$, $(5\,4^2\,3^3)$ или $(5^2\,4^2\,3^2)$. Последовательности $(4^3\,3^2)$, $(5\,4^2\,3^3)$ и $(5^2\,4^2\,3^2)$ не являются вынужденно 3-раскрашиваемыми, так как у них есть реализация, содержащая подграф K_4, и в соответствии с 2^0 они исключаются из дальнейшего рассмотрения. Это относится и к последовательности $(5\,3^5)$, которая реализуется нечетным колесом и, следовательно, не является вынужденно 3-раскрашиваемой.

Для завершения доказательства утверждения 1 достаточно установить следующий факт.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *При сделанных предположениях граф G не имеет индуцированного подграфа L со степенной последовательностью* $(3^4\,2)$, $(4\,3^4)$, $(3^4\,2^2)$, $(3^5\,1)$, (3^6), $(4\,3^4\,2)$, $(4^2\,3^4)$, (4^6), $(3^5\,2\,1)$, $(3^6\,2)$, $(4\,3^5\,1)$, $(3^6\,1^2)$ *или* $(3^7\,1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перечисленные в утверждении 2 последовательности не являются по условию утверждения 1 степенными последовательностями графа G. Кроме того, в G нет изолированных вершин, так как $d_p \ge 1$ в π. Поэтому либо

(А) G содержит такое ребро xy, что $x \neq v$, $y \neq v$ для всех $v \in VL$; либо

(Б) G содержит вершину z, смежную по крайней мере с одной вершиной из VL.

Применим (А) к списку последовательностей в утверждении 2 и получим следующие последовательности: $(3^4\,2\,1^2)$, $(4\,3^4\,1^2)$, $(3^4\,2^2\,1^2)$, $(3^5\,1^3)$, $(3^6\,1^2)$, $(4\,3^4\,2\,1^2)$, $(4^2\,3^4\,1^2)$, $(4^6\,1^2)$, $(3^5\,2\,1^3)$, $(3^6\,2\,1^2)$, $(4\,3^5\,1^3)$, $(3^6\,1^4)$, $(3^7\,1^3)$. Все эти последовательности, кроме $(3^6\,1^2)$ (она входит в исходный список), реализуются графом, в котором четыре вершины наибольшей степени индуцируют K_4. Для доказательства достаточно заметить, что "остаточные" последовательности $(2\,1^2)$, $(3\,1^3)$, $(2^2\,1^2)$, $(3\,2\,1^3)$, $(3^2\,1^4)$, $(4^2\,1^6)$,

$(3^2\,2\,1^2)$, $(3^3\,1^3)$ являются графическими. Таким образом, все сгенерированные по (А) последовательности либо не являются вынужденно 3-раскрашиваемыми, либо входят в исходный список. Следовательно, остается рассмотреть правило (Б).

Построим более длинные индуцированные последовательности на основании (Б) при $d_z = \deg_{G}\langle VL\cup\{z\}\rangle^z \in \{1,2\}$:

$\underline{3\;3\;3\;3\;3\;1}$
4 3 3 3 2 1
4 4 3 3 2 2
$\underline{4\;3\;3\;3\;3\;2}$

4 3 3 3 3 1 1
$\underline{3\;3\;3\;3\;3\;2\;1}$
4 4 3 3 3 2 1
4 3 3 3 3 2 2

5 4 3 3 3 3 1
4 4 4 3 3 3 1
5 5 3 3 3 3 2
5 4 4 3 3 3 2
4 4 4 4 3 3 2

4 3 3 3 3 3 2 1
$\underline{3\;3\;3\;3\;3\;3\;3\;1}$
4 4 3 3 3 3 2 2
4 3 3 3 3 3 3 2

4 3 3 3 3 3 3 1 1
3 3 3 3 3 3 3 2 1
4 4 3 3 3 3 3 2 1
4 3 3 3 3 3 3 2 2

5 3 3 3 3 1
4 4 3 3 3 1
5 4 3 3 3 2
4 4 4 3 3 2

$\underline{4\;3\;3\;3\;3\;3\;1}$
4 4 3 3 3 3 2

4 3 3 3 3 2 1 1
$\underline{3\;3\;3\;3\;3\;3\;1\;1}$
3 3 3 3 3 2 2 1
4 4 3 3 3 2 2 1
4 3 3 3 3 3 2 1
4 3 3 3 3 2 2 2
3 3 3 3 3 3 2 2

5 3 3 3 3 3 1 1
4 4 3 3 3 3 1 1
4 3 3 3 3 3 2 1
5 4 3 3 3 3 2 1
5 3 3 3 3 3 2 2
4 4 4 3 3 3 2 1
4 4 3 3 3 3 2 2

4 3 3 3 2 2 1
$\underline{3\;3\;3\;3\;3\;2\;1}$
4 4 3 3 2 2 2
4 3 3 3 3 2 2
$\underline{3\;3\;3\;3\;3\;3\;2}$

5 3 3 3 3 2 1
4 4 3 3 3 2 1
$\underline{4\;3\;3\;3\;3\;3\;1}$
4 3 3 3 3 2 2
5 4 3 3 3 2 2
5 3 3 3 3 3 2
4 4 4 3 3 2 2
4 4 3 3 3 3 2

5 4 4 4 4 1
5 5 4 4 4 2

4 3 3 3 3 3 1 1 1
3 3 3 3 3 3 2 1 1
4 4 3 3 3 3 2 1 1
4 3 3 3 3 3 2 2 1
3 3 3 3 3 3 2 2 2

Как видно, подчеркнутые последовательности входят в список в утверждении 2 и нет необходимости их рассматривать. Для остальных (кроме $(5\,3^4\,1)$) путем выписывания остаточных последовательностей легко доказывается существование реализации, у которой четыре вершины наибольших степеней порождают граф K_4. Рассмотрим теперь последовательность $(5\,3^4\,1)$, которая получена из последовательности $(4\,3^4)$ добавлением по правилу (Б) вершины z с $d_z = 1$, причем z

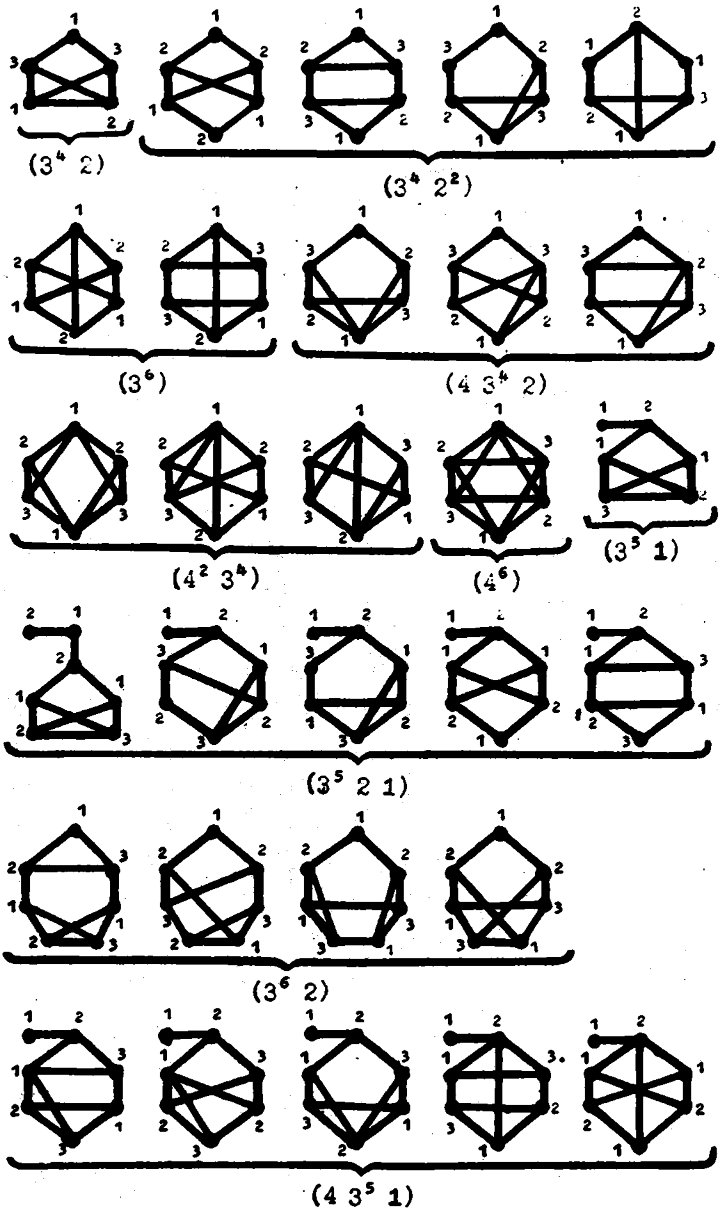

Рис.4. Реализация нетривиальных вынужденно 3-раскрашиваемых последовательностей

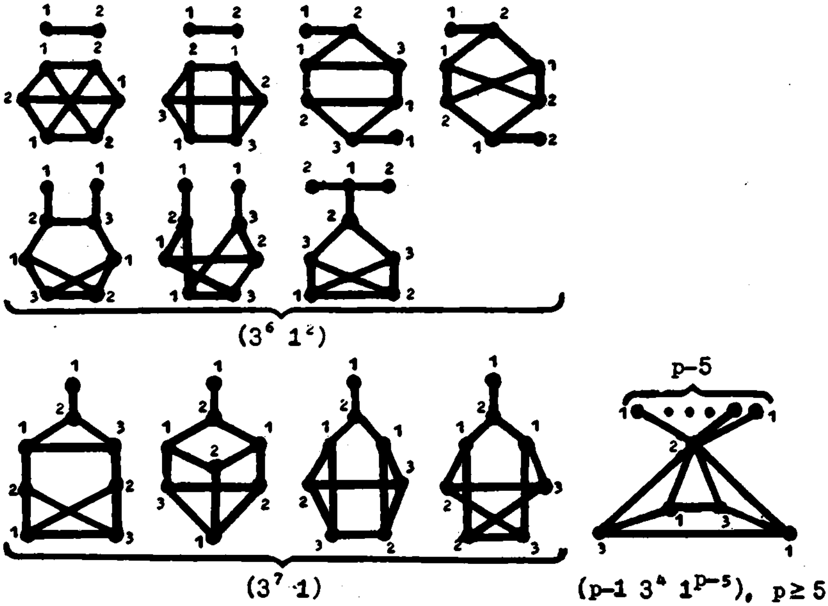

Рис.4 (окончание)

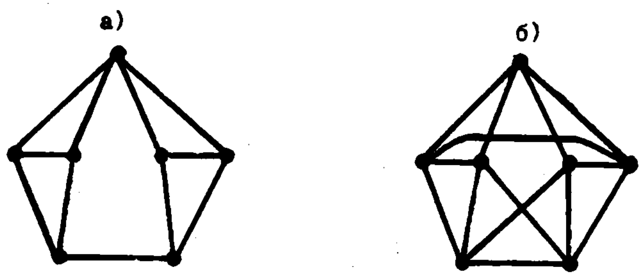

Рис. 5.

смежна с вершиной степени 4. Если все вершины z являются такими, то мы имеем запрещенную в утверждении I последовательность $\pi = (p-1\ 3^4\ 1^{p-5})$. Значит, при рассмотрении последовательности $(4\ 3^4)$ достаточно выбрать другую вершину z.

Теперь применим (Б) в случае $d_z \geq 3$. Для сокращения перебора воспользуемся таким наблюдением: никакие три вершины графа L, смежные с новой вершиной z, не образуют треугольника. Действительно, иначе G имел бы подграф K_4, что невозможно.

Из рис.4, где изображены, в частности, реализации последовательностей из формулировки утверждения 2, ясно, какие степени могут быть у вершин, лежащих на треугольнике. Используя это, получим следующий список последовательностей:

$(3^4\ 2)$:	$\underline{(4^2\ 3^4)}$;
$(4\ 3^4)$:	$(4^4\ 3^2)$, $\underline{(4^6)}$;
$(3^4\ 2^2)$;	$(4\ 3^6)$;
$(3^5\ 1)$:	$(4^2\ 3^4\ 2)$;
(3^6):	-
$(4\ 3^4\ 2)$:	$(5\ 4\ 3^5)$, $(4^4\ 3^4)$, $(4^3\ 3^4)$, $(4^6\ 2)$, $(4^5\ 3^2)$, $(5\ 4^5\ 3)$;
$(4^2\ 3^4)$:	$(4^5\ 3^2)$, (4^7);
(4^6):	-
$(3^5\ 2\ 1)$:	$(4^2\ 3^4\ 2^2)$, $(4\ 3^6\ 2)$;
$(3^6\ 2)$:	-
$(4\ 3^5\ 1)$:	$(5\ 4\ 3^5\ 2)$, $(4^3\ 3^4\ 2)$;
$(3^6\ 1^2)$:	$(4^2\ 3^5\ 2\ 1)$, $(4\ 3^6\ 2^2)$, $(4^3\ 3^4\ 2^2)$;
$(3^7\ 1)$:	$(4^2\ 3^6\ 2)$.

Подчеркнутые последовательности содержатся в исходном списке. Последовательности $(4\ 3^6)$ и (4^7) имеют реализации, не являющиеся 3-раскрашиваемыми графами (см.рис.5). Все оставшиеся последовательности, как легко видеть, имеют реализацию с подграфом K_4. Утверждение 2 доказано.

ТЕОРЕМА I. Пусть π - графическая последовательность вида (I) с $p \geq 3$. Если выполняется хотя бы одно из условий: 1) $p = 3$; 2) $p \geq 4$ и $d_4 \leq 2$; 3) π принадлежит множеству, указанному в формулировке утверждения I, то π является вынужденно 3-раскрашиваемой, а в противном случае π имеет реализацию G с хроматическим числом $\chi(G) \geq 4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 3-раскрашиваемость графов, степенные последовательности которых удовлетворяют условиям I или 2 теоремы, очевидна. Из утверждения I следует справедливость второй части теоремы.

Остается убедиться, что "исключительные" последовательности, перечисленные в формулировке утверждения I, являются вынужденно 3-раскрашиваемыми. Доказательство этого следует из рис.4, где изображены все реализации указанных последовательностей вместе с некоторой минимальной раскраской. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ I [3]. Пусть π - графическая последовательность вида (I). Тогда π является вынужденно 2-раскрашиваемой (двудольной), если и только если выполняется одно из условий 1) $p = 2$; 2) $p \geq 3$ и $d_3 \leq 1$; 3) $\pi = (2^4)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что последовательность π является вынужденно i-раскрашиваемой тогда и только тогда, когда последовательность $(\pi+1) \cup (p)$ является вынужденно $(i+1)$-раскрашиваемой. (Запись $\pi+1$ означает, что все элементы последовательности π увеличиваются на I.) Остается выбрать среди последовательностей, описанных в теореме I, те, которые содержат элемент $p-1$, удалить этот элемент с одновременным уменьшением оставшихся элементов на I и убрать нули.

Литература

I. ГЭРИ М., ДЖОНСОН Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. - М.: Мир, 1982. - 367 с.

2. ХАРАРИ Ф. Теория графов. - М.: Мир, 1973. - 300 с.

3. ЧЕРНЯК Ж.А. Степенные последовательности графов: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. - Минск, 1983. - 162 с.

4. RAO S.B. A survey of the theory of potentially P-graphic and forcibly P-graphic degree sequences//Lect.Notes.Math., 1981.- Vol.885.- P.417-440.

Поступила в ред.-изд.отд.
6 января 1987 года