БОПРОСЫ АЛГОРИТМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА СТРУКТУРНОЙ ИНФОРМАЦИИ
(Вычислительные системы)
1987 год Выпуск 119

УДК 519.1

МАТРИЧНЫЙ АЛГОРИТМ ПОИСКА КОНТУРОВ В ОРИЕНТИРОВАННОМ ГРАФЕ

П.А. Анишев

В настоящей работе алгоритм [1,2] целочисленного положительного решения системы однородных линейных уравнений, используемый для нахождения инвариантов в сетях Петри, предлагается применять для поиска всех простых контуров в ориентированном графе. Его сложность в общем случае экспоненциальна по времени и по памяти. Основой данного подхода является представление ориентированного графа одним из классов ординарных сетей Петри, так называемыми маркированными графами. Минимальный инвариант в маркированном графе - это простой контур в ориентированном графе. Целью данной работы является иллюстрация применения методов анализа сетей Петри в прикладной теории графов. Не претендуя на исчерпывающее объяснение того, почему не существует "хорошей алгебры орциклов" [3, с.313], сделаем попытку осветить этот вопрос.

1. Основные понятия. Изложение основных понятий, относящихся к сетям Петри, можно найти в [4]. Здесь мы дадим только самые необходимые сведения.

Обозначим через N множество натуральных чисел, через N_0 - множество натуральных чисел с нулем, через Z - множество целых чисел, через Q^+ - множество положительных рациональных чисел. Сеть Петри - это пятерка

$$PN = (P, T, R, W, M_0), \tag{1}$$

где P - множество позиций, T - множество переходов таких, что $P \cap T = \emptyset, P \cup T \neq \emptyset$, R - бинарное отношение на множестве вершин $P \cup T$ сети такое, что

$$R \subseteq (P \times T) \cup (T \times P). \tag{2}$$

Графическое представление сети является двудольным ориентированным графом на множестве позиций P и множестве переходов T; W – кратность дуг, это функция $W: \quad R \to N_0$, M_0 – начальное маркирование, т.е. функция, отображающая множество позиций P в множество N_0. Каждой позиции соответствует определенное число меток, нуль соответствует отсутствию меток в позиции. На рисунках позиции изображаются кружками, переходы – прямоугольниками, маркирование – точками в позиции (число точек равно значению маркирования), а отношение R – дугами.

Маркирование M можно представить вектором, i-я компонента которого равна числу меток в i-й позиции. Отношение R представляется матрицей инциденций сети Петри. Матрица инциденций – это матрица $B: \quad P \times T \to Z^{n \times m}$ с числом строк $n = |P|$, числом столбцов $m = |T|$, такая что

$$B(p,t) = \begin{cases} -W(p,t) \Leftrightarrow (p,t) \in R, \\ +W(p,t) \Leftrightarrow (t,p) \in R, \\ 0 - \text{в противном случае.} \end{cases} \qquad (3)$$

Если пара (x,y) принадлежит отношению R, то будем говорить, что x является входом для y, или y является выходом для x.

Переход возбужден, если каждая его входная позиция содержит число меток не меньше, чем кратность соответствующей дуги. Из множества возбужденных переходов может сработать любой единственный переход. Срабатывание этого перехода приводит к изменению маркирования по следующему правилу: от значения маркирования каждой входной позиции отнимается, а к значению маркирования каждой выходной позиции добавляется число меток, равное кратности соответствующих инцидентных дуг.

Если маркирование M' получено из маркирования M после срабатывания перехода t, то это обозначается так:

$$M\ [t\ \rangle\ M'. \qquad (4)$$

Обозначение (4) можно распространить на последовательность срабатываний переходов $\sigma = t_{i_1} t_{i_2} \dots t_{i_k}$. Таким образом, $M\ [\sigma\ \rangle\ M'$ обозначает, что маркирование M' достижимо из M через последовательность срабатываний σ. Обозначим через $\bar{\sigma} \in N_0^m$ вектор, i-я компонента этого вектора $\bar{\sigma}_i$ равна числу вхождений перехода t_i в последовательность σ. Отображение $\pi : \sigma \to \bar{\sigma}$ называется отображением Париха, а $\bar{\sigma}$ – характеристическим вектором последовательности σ.

Если в сети Петри маркирование M' достижимо из M через последовательность срабатывания σ, а B – матрица инциденций этой сети, то имеет место следующее соотношение:

$$M' = M + B \cdot \bar{\sigma}^T , \qquad (5)$$

где "." – операция умножения матриц, M и M' – векторы, представляющие маркирования, "+" – операция сложения векторов, T – операция транспонирования, $\bar{\sigma}^T$ – характеристический вектор – столбец.

Уравнение (5) называется основным уравнением сети и, оправдывая свое название, служит основой для применения к анализу свойств сетей Петри методов линейной алгебры. Подробности см. в [4,с. 113]. Мы используем уравнение (5) для определения инвариантов.

2. Инварианты в сетях Петри. Умножив обе части равенства (5) слева на вектор $x \in N_0^n$, получим

$$x \cdot M' = x \cdot M + x \cdot B \cdot \bar{\sigma}^T , \quad x \neq 0 . \qquad (6)$$

Заметим, что если $x \cdot B = 0$, то

$$x \cdot M' = x \cdot M . \qquad (7)$$

В выражении (7) "." – это скалярное произведение векторов, а само выражение (7) можно трактовать так: взвешенная (компонентами вектора x) сумма меток для любого маркирования остается постоянной. Вектор x называется инвариантом (точнее, P-инвариантом) сети Петри. Таким образом, инварианты – это целочисленные положительные решения системы линейных однородных уравнений

$$x \cdot B = 0, \quad x \in N_0^n . \qquad (8)$$

В [1,2] предложен метод и рассмотрен алгоритм решения уравнения (8). Причем решение ищется в виде

$$x = q_1 x_1 + q_2 x_2 + \ldots + q_l x_l , \qquad (9)$$

где $q_i \in Q^+$, $x_i \in N_0^n$. В тех же работах [1,2] показано, что множество

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_l\} \qquad (10)$$

образует минимальное порождающее семейство решений в том смысле, что любое решение уравнения (8) представимо в виде (9) и при изъятии из множества X любого элемента x_i оно перестает быть порождающим.

Далее нам понадобится понятие минимального суппорта вектора. Пусть

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \in N_0^n . \tag{11}$$

Суппорт вектора f – это множество номеров его компонент, отличных от нуля,

$$\operatorname{Sup} f = \{\, i \in \overline{1,n} : \; f_i \neq 0 \}. \tag{12}$$

Пусть f – вектор, не все компоненты которого равны нулю, и V – множество таких векторов. Вектор f имеет минимальный по отношению к векторам множества V суппорт, если среди векторов V не существует вектора g, суппорт которого вложен в f, т.е.

$$\underset{\min V}{\operatorname{Sup} f} \Leftrightarrow \nexists g \in V : \; \operatorname{Sup} g \subsetneqq \operatorname{Sup} f . \tag{13}$$

Сети Петри, у которых кратность дуг равна единице, называются ординарными. Ординарные сети, у которых каждая позиция имеет один входной и один выходной переход, называются маркированными графами. Обычный ориентированный граф без петель можно предста-

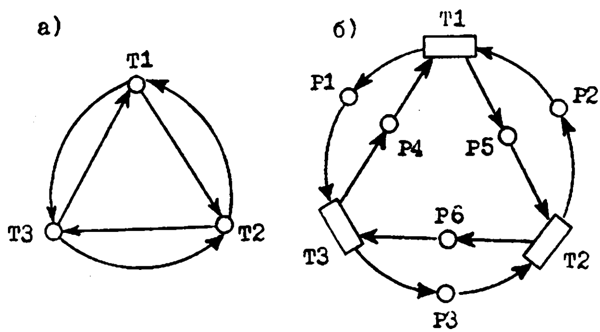

Рис.I

	T1	T2	T3
P1	1	[illegible]	–1
P2	–1	1	
P3	0	–1	[illegible]
P4	–1	0	1
P5	1	–1	[illegible]
P6	0	1	–1

Рис.2

вить маркированным графом, при этом вершинам ориентированного графа соответствуют переходы маркированного графа, а дугам – позиции. На рис.I,а приведен пример ориентированного графа, а на рис.I,б – соответствующий ему маркированный граф, матрица инциденций кототорого приведена на рис.2. Так как кратности дуг равны единице, значения элементов матрицы (см.выражение (3)) равны +I,-I,0. Если позиции графа каким-либо образом маркированы, то от одного маркирования можно перейти к другому в соответствии с выражением (5). В [6,лемма I] показано, что для любого маркирования при срабатывании любого перехода в маркированном графе сумма меток в ориентированном контуре остается неизменной. Таким образом, в этом случае компоненты вектора (см.выражение (7)) состоят только из нулей и единиц и он является фактически характеристическим вектором ориентированного контура: единицы указывают на те позиции (дуги), которые входят в контур. Каждый элемент x_i при этом (см.(I0)) соответствует ориентированному контуру - минимальному инварианту. Инвариант является минимальным, если никакое его собственное подмножество не является инвариантом, или, другими словами, если вектор x_i имеет минимальный суппорт.

3. Алгоритм построения контуров. Перейдем к описанию алгоритма поиска множества (I0) всех векторов x_i. Обозначим через EI, E2, E3 этапы алгоритма, а через S1,...,S6 - шаги. В результате (E3) работы алгоритма будет построена матрица контуров C ориентированного графа: строки этой матрицы соответствуют контурам (характеристическим векторам), а столбцы - дугам (позициям соответствующего маркированного графа). Если окажется, что матрица состоит из нулей, то контуров в графе нет. Поиск контуров, т.е. решений уравнения (8), осуществляется методом исключения неизвестных: на каждом шаге цикла (E2) по числу m - колонок матрицы B - происходит вычеркивание соответствующей колонки с одновременным преобразованием матрицы инциденций B и матрицы контуров C, при этом одни строки добавляются, а другие вычеркиваются. В начале (EI) матрица C является единичной порядка n, где n - число дуг (позиций соответствующего маркированного графа). Затем к матрице C добавляются (S2) строки, являющиеся суммой строк матрицы C, соответствующих строкам, добавляемым к матрице B. Строки, добавляемые к матрице C, соответствуют маршрутам, пройденным при построении контуров.

Строки, вычеркнутые из матрицы C, соответствуют, во-первых, (S3) пройденным маршрутам, не являющимся контурами; во-вторых, (S4) неминимальным решениям уравнения (8), т.е. совокупности или объединению простых контуров; в-третьих, (S5) - это строки, представляющие один и тот же контур. Если число строк, добавляемых на каждом шаге S2, будет больше, чем число строк, удаляемых на шагах S3, ...,S6, то требуется (в общем случае) экспоненциальная память для размещения матриц и экспоненциальное число операций. Если матрица инциденций B является редкозаполненной, то экспоненциального роста памяти и времени обработки не происходит.

Алгоритм поиска минимального порождающего семейства решений

Начало алгоритма;

(E1) Дана матрица B вида $Z^{n\times m}$;

C – единичная матрица порядка n;

(E2) Цикл по числу колонок B: k от 1 до m;

S1: $I = \{i: B(i,k) > 0\}$;

$J = \{j: B(j,k) < 0\}$;

S2: Цикл по числу пар $(i,j) \in I \times J$;

Добавить к B строку вида:

B(i,k) · (j-я строка B) – B(j,k) · (i-я строка B);

Добавить к C строку вида:

B(i,k) · (j-я строка C) – B(j,k) · (i-я строка C);

Конец цикла по числу пар;

S3: Изъять из B и C строки с номерами $I \cup J$;

S4: Изъять из C строки с неминимальным суппортом;

S5: Если у двух строк C один и тот же суппорт, то сохранить одну из них;

S6: Изъять из B строки, соответствующие строкам, удаленным из C;

Конец цикла по m;

(E3) Строки C соответствуют контурам;

Конец алгоритма;

Рассмотрим пример работы алгоритма. Пусть дан граф, приведенный на рис.1,а, построим соответствующий маркированный граф (см. рис.1,б), его матрица инциденций (см.рис.2) имеет 6 строк по числу позиций (дуг) и 3 колонки по числу переходов сети (вершин графа). На рис.3 представлены матрицы B, C и множества I и J в виде одномерных массивов – векторов-столбцов. Так как число колонок m = 3, то цикл E2 будет содержать три шага: первый шаг при k = 1 (рис.3,а); второй шаг при k = 2 (рис.3,б); третий – при k = 3 (рис.3,в). На рис.3 нули заменены пробелами. Обозначим через $C_{i,\cdot}$ i-ю строку матрицы C.

а)

B

	1	2	3
1	1		−1
2	−1	1	
3		−1	1
4	−1		1
5	1	−1	
6		1	−1

C

	1	2	3	4	5	6
1	1					
2		1				
3			1			
4				1		
5					1	
6						1

	I	J
1	1	
2		−1
3		
4		−1
5	1	
6		

б)

B

	1	2	3
1			
2			
3		−1	1
4			
5			
6		1	−1
(1,2)		1	−1
(1,4)			
(5,2)			
(5,4)		−1	1

C

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3			1			
4						
5						
6						1
(1,2)	1	1				
(1,4)	1			1		
(5,2)		1			1	
(5,4)				1	1	

	I	J
1		
2		
3		−1
4		
5		
6	1	
7	1	
8		
9		
10		−1

в)

B

	1	2	3
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
(6,3)			
(6,10)			
(7,3)			
(7,10)			

C

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8	1			1		
9		1			1	
10						
(6,3)			1			1
(6,10)				1	1	1
(7,3)	1	1	1			
(7,10)	1	1		1	1	

	I	J
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		

Рис.3

На первом шаге B – исходная матрица, C – единичная матрица порядка 6.

На втором шаге к матрице B добавляются строки, являющиеся суммой следующих пар строк B, $I \times J = \{(1,2),(1,4),(5,2),(5,4)\}$. К матрице C добавляются строки, являющиеся суммой строк C с теми же номерами из множества пар $I \times J$. Затем на шаге S3 из B и C изымаются строки с номерами $I \cup J = \{1,2,4,5\}$. Новые значения множества I положительных значений элементов матрицы B, находящихся во второй колонке, и множества J – отрицательных равны соответственно $I = \{6,7\}$, $J = \{3,10\}$. Номер 7 соответствует строке, равной сумме (1,2) первой и второй строк, добавленных на предыдущем шаге, а номер 10 – сумме (5,4) пятой и четвертой строк. Первая колонка после работы первого шага автоматически обнуляется. Шаги S4 и S5 не выполняются, так как все строки матрицы C являются векторами с минимальным суппортом и нет одинаковых векторов. Вид матриц B и C после работы второго шага представлен на рис.3,б.

На третьем шаге к матрице B добавляются строки, являющиеся суммой следующих строк B, $I \times J = \{(6,3),(6,10),(7,3),(7,10)\}$ к матрице C добавляются строки, являющиеся суммой строк C с теми же номерами из множества пар $I \times J$. При этом строки, добавляемые к матрице B, оказываются нулевыми, а после удаления (на шаге S3) строк с номерами $I \cup J = \{3,6,7,10\}$ матрица B получается нулевой. Поэтому нулевой оказывается и третья колонка матрицы B, а значит, множества I и J будут пустыми и дальнейшего добавления строк к матрице C не происходит. На шаге S4 из матрицы C изымается строка (7,10), представляющая вектор с неминимальным суппортом. Действительно, суппорт этого вектора $\operatorname{Sup} C_{(7,10),\cdot} = \{1,2,4,5\}$ содержит суппорт векторов восьмой и девятой строк матрицы C: $\operatorname{Sup} C_{9,\cdot} = \{2,5\}$ и $\operatorname{Sup} C_{8,\cdot} = \{1,4\}$, заметим, что

$$\operatorname{Sup} C_{(7,10),\cdot} = \operatorname{Sup} C_{8,\cdot} \cup \operatorname{Sup} C_{9,\cdot} . \tag{14}$$

Выражение (14) можно обобщить, в [4] доказана теорема декомпозиции, в которой, в частности, утверждается, что если $I_1, \dots, I_N$ – минимальные консервативные составляющие (т.е. минимальные суппорты векторов-решений уравнения (8)), содержащиеся в I_0, то

$$I_0 = \bigcup_{i=1}^{N} I_i . \tag{15}$$

В нашем примере (см.рис.3,в) последняя строка матрицы C, т.е. $C_{(7,10)}$,., соответствует объединению двух простых контуров, восьмая строка матрицы C соответствует простому контуру, проходящему через позиции P1 и P4, а девятая строка матрицы C соответствует простому контуру, проходящему через позиции P2 и P5.

4. Сравнение систем контуров и циклов. Известно, что в неориентированном графе циклы образуют векторное пространство: т.е. каждый цикл может быть выражен как линейная комбинация базовых циклов, а матрица циклов C и матрица инциденций B связаны соотношением [5,с. 184]:

$$C \cdot B^T \equiv 0 \ (\mathrm{mod} 2). \tag{16}$$

Для ориентированных графов мы получили следующее соотношение:

$$C \cdot B = 0, \tag{17}$$

где C – матрица контуров, полученная в результате работы вышеописанного алгоритма, а B – матрица инциденций, построенная по определению (3). Число строк матрицы C равно числу простых контуров ориентированного графа, причем среди этих контуров нельзя выделить базу. Это следует из того, что все контуры образуют минимальное порождающее семейство, т.е. никакой простой контур не может быть выражен через другие.

Литература

1. ALAIWAN H., MEMMI G. Algorithmes de recherche des solutions entieres positives d'un systeme lineare d'equations homogenes//Revue Technique Thomson-CSF.-1982.-Vol.14,N 1.-P.125-135.

2. ALAIWAN H., TOUDIC J.M. Recherche des semi-flots, des verrous et des trappes dans les reseaux de Petri// Technique et Science Informatiques.-1985.-Vol.4,N 1.- P.103-112.

3. ЗЫКОВ А.А. Теория конечных графов. Т.I.-Новосибирск: Наука, 1969. - 543 с.

4. ПИТЕРСОН Дж. Теория сетей Петри и моделирование систем: Пер. с англ. - М.: Мир, 1984. - 264 с.

5. ХАРАРИ Ф. Теория графов: Пер. с англ. - М.: Мир, 1973. - 300 с.

6. COMMONER F., HOLT A.W., EVEN S., PNUELLI A. Marked directed graphs// J.Computer and System Sciences.-1971.-Vol.5.-P.511-523.

Поступила в ред.-изд.отд.
26 марта 1987 года