ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ПРОГРАММИРОВАНИИ
(Вычислительные системы)
1987 год Выпуск 120

УДК 51:801

МОДЕЛИ ИЗ КОНСТАНТ ДЛЯ КВАЗИТОЖДЕСТВ С ОТРИЦАНИЕМ

О.А. Ильичёва

Логические спецификации во многих задачах современной информатики традиционно базируются на теориях типа тождеств (абстрактные типы данных) и квазитождеств (логическое программирование), семантика которых (как правило, модели термов) допускает практически приемлемую реализацию. Дальнейшее повышение выразительности и наглядности описаний достигается введением формул с отрицанием. Но использование последних порождает ряд проблем вычислимости, корректности спецификаций относительно формально определенной семантики и содержательной интерпретации утверждений. Трактовки отрицаний как предложений, выполнимых на всем дополнении областей истинности позитивно определяемых предикатов, приводят часто к нежелательным побочным эффектам из-за неполноты используемых исчислений [1], к введению иерархических систем с ограниченной возможностью рекурсии [2] или с дополнительной метасемантикой управления вычислениями, усложняющей описание [3].

В данной работе в качестве спецификаций рассматриваются системы определений, заданные квазитождествами, расширенными отрицанием с ограниченным квантором в посылках импликаций. Предлагаемый подход с логической и вычислительной точек зрения находится в рамках концепций Σ-программирования [4] и имеет практическое приложение в задачах описания статической семантики, перевода алгоритмических языков и тестирования программ [5]. Содержательная трактовка определений приводит к представлению объектов предметной области в виде констант C сигнатуры и соответственно моделей из констант в качестве семантики спецификации. Такая постановка позволяет значительно повысить эффективность реализации, избежав сложных алгоритмов унификации, но требует задания интерпретации, диагностирующей возможную неопределенность и переопределение функций на C. В [6] определены денотационная семантика квазитождеств, соответствующая интерпретации формул в полных решетках логических значений (неопределенность, истина, ложь, ошибка), и эквивалентная ей теоретико-модельная семантика, представленная минимальной относительно гомоморфного вложения моделью из констант в классе всех моделей рассматриваемой теории. Для квазитождеств с отрицанием модели, обладающей таким свойством, может не существовать.

Цель данной работы состоит в исследовании соответствующего класса моделей для представления адекватной семантики такой спецификации. Для этого выделяется подкласс систем, имеющий минимальную модель, и определяется расширение исходной теории, для которого эта модель обладает свойством инициальности. Приводятся достаточные условия, при которых соответствующая интерпретация может быть реализована с линейной сложностью.

Пусть $\Sigma = (R,F,C)$ – конечная сигнатура, в которой R – множество предикатных, F – функциональных символов, C – констант, причем для C

$$C \neq \emptyset \text{ и } \forall c_i, c_j \in C: \quad c_i \neq c_j, \text{ если } i \neq j. \qquad (1)$$

Для упрощения записи элементы произвольного множества A обозначаются строчными буквами a, векторы из элементов A – через $\bar{a}$, термы с функциональными символами из F – через t, множество переменных формулы φ – через V_φ.

Основу рассматриваемых спецификаций составляет конечное множество квазитождеств вида:

$$\sigma_0: \ \{ f(\bar{c}) = c_f \} \cup \{ r(\bar{c}) \},$$
$$\sigma: \ \{ \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \rightarrow \psi(\bar{x})) \},$$

где φ – конъюнкция квазиатомарных формул, ψ имеет вид $r(\bar{x})$ или $f(\bar{x}) = t(\bar{x})$. Описание $\sigma_p = \sigma_0 \cup \sigma$ трактуется как совокупность определений функций и отношений на области объектов, представленных константами из C.

Теория T называется определимой в C, если для любого замкнутого терма t существует c такая, что $T \models t = c$. В [6] показано, что непротиворечивая относительно условия (I) и определимая в C теория $T = \sigma_p$ сигнатуры Σ имеет модель, каждый элемент которой является некоторой константой из C. Эта модель изоморфна фактор-системе свободной системы, порожденной C и определяемой σ_p.

Известно, что модель такого типа обладает свойством гомоморфного вложения в любую другую модель теории T и этот гомоморфизм единствен. Обозначим ее через $\mathfrak{M}_c$.

Построение модели $\mathfrak{M}_c$ для произвольной теории T предполагает, кроме учета выводимости, проверку определимости в C и контроль непротиворечивости. Для организации адекватной интерпретации в качестве областей данных рассматриваются полные решетки, частично упорядоченные отношением аппроксимации $\sqsubseteq : \bot \sqsubseteq x \sqsubseteq \top$ для любого элемента x области, в которой нижний элемент $\bot$ трактуется как неопределенность и верхний $\top$ - как ошибка переопределения. Логическим значениям соответствует область $\widehat{\mathrm{Bool}} = \{\bot; \mathrm{false}, \mathrm{true}; \top\}$. Для определения интерпретации вводится монотонная функция $\max\colon D^* \to D$ (D^* - списки над областью D), равная максимальному по $\sqsubseteq$ элементу списка, причем $\max(\langle\bar{\alpha}\rangle) = \top$, если $\bar{\alpha}$ либо содержит $\top$, либо в нем существуют неравные элементы $\alpha_i \neq \alpha_j, i \neq j$.

Интерпретация i функций и формул на множестве $\hat{C} = \{\bot, C, \top\}$ и $\widehat{\mathrm{Bool}}$ определяется индуктивно по структуре термов и формул; для символов $\alpha \in F \cup R$ выбирается максимальный по $\sqsubseteq$ элемент в $\hat{C} + \widehat{\mathrm{Bool}}$ по всем определениям α в σ_p и по всем интерпретациям $\gamma\colon \hat{X}^* \to \hat{C}^*$ переменных в этих определениях:

$$i[\alpha]\bar{c} = \max_{\{\varphi \to \psi_\alpha\} \subseteq \sigma_p} \left(\max_{\gamma_{\bar{c}}} (I(\alpha)) \right); \tag{2}$$

где ψ_α есть $f(\bar{x}) = t(\bar{x})$, если $\alpha \equiv f$, и $r(\bar{x}) = t(\bar{x})$, если $\alpha \equiv r$; $\gamma_{\bar{c}}$ - подстановки переменных, совместимые с $\bar{c}$; $I(\alpha)$ - монотонный оператор, задаваемый как

$$\begin{aligned} &I(f)\colon \quad \underline{\mathrm{if}}\ i[\varphi]\gamma_{\bar{c}}\ \underline{\mathrm{then}}\ i[t]\gamma_{\bar{c}}\ \underline{\mathrm{else}}\ \bot \\ \text{и} \\ &I(r)\colon \quad \underline{\mathrm{if}}\ i[\varphi]\gamma_{\bar{c}}\ \underline{\mathrm{then}}\ \mathrm{true}\ \underline{\mathrm{else}}\ \bot . \end{aligned} \tag{3}$$

При этом $i[\alpha]\bar{c} = \top$ тогда и только тогда, когда интерпретация α не может быть задана однозначно (определения противоречивы). Интерпретирующая функция i определяется как наименьшая верхняя грань монотонной последовательности интерпретаций $i_0 \sqsubseteq i_1 \sqsubseteq \ldots$, вычисляемых на основе (2), где i_0 соответствует σ_0 для $f(\bar{c})$ и $r(\bar{c})$, входящих в σ_0, и не определена для остальных $f, r, \bar{c}$ и каждая i_j расширяет i_{j-1} доопределением некоторых функций и отношений. В [6] показано, что $\mathfrak{M}_c$ может быть задана такой интерпретацией и существует для σ_p тогда и только тогда, когда $i[\alpha]\bar{c} \neq \top$ ни для каких $\alpha \in F \cup R$ и $\bar{c}$, и для любых $f, \bar{c}$ значение $i[f]\bar{c}$ определено. При некоторых ограничениях на теорию σ_p функция i может быть вычислена эффективным алгоритмом. Аналогичный подход к заданию интерпретации используется и в данной работе.

Расширим спецификацию σ_p добавлением предложений, содержащих отрицания в посылках импликаций:

$$\sigma_N: \quad \forall \bar{x}(q(\bar{x}) \,\&\, \neg p(\bar{x}) \;\&\; \beta(\bar{x}) \to \psi(\bar{x})),$$

где $q \in R$, p – квазиатомарная формула; β – конъюнкция пар такого же вида или квазиатомарных формул. Предикат $q(\bar{x})$ играет для $\neg p(\bar{x})$ роль ограниченного квантора, таким образом, $V_p \subseteq V_q$. Соответственно доопределим i на формулах с отрицанием $i[\neg \varphi] = \mathrm{Not}(i[\varphi])$, где Not является монотонной операцией на $\widehat{\mathrm{Bool}}$, задаваемой как $\mathrm{Not}(\bot) = \bot$, $\mathrm{Not}(\top) = \top$, Not(true)=false, Not(false) = true.

Модели типа $\mathfrak{M}_c$ для $T = \sigma_p \cup \sigma_N$ может не существовать, так как произвол (в общем случае) в интерпретации $p(\bar{x})$, $\sigma_p \not\models p(\bar{x})$, ведет к гомоморфно несравнимым моделям. Из всех моделей теории выделим класс, соответствующий содержательной семантике спецификации: $p(\bar{c})$, $p \in R$, не является истинным, если для него не существует выполнимого условия определения в T.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Модель $\mathfrak{M} = (M, J)$ теории T сигнатуры Σ называется с т р о г о й, если для любых r, f, m имеет место: если $\mathfrak{M} \models r(\bar{m})$ и $r(\bar{m}) \notin T$, или $\mathfrak{M} \models f(\bar{m}) = t(\bar{m})$ и $f(\bar{m}) = t(\bar{m}) \notin T$, то в T существуют определения $\forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \to r(\bar{x}))$ или $\forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \to f(\bar{x}) = t(\bar{x}))$ соответственно такие, что при интерпретации переменных $\gamma(\bar{x}) = \bar{m}$ имеет место $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m})$.

Строгая модель теории T называется м и н и м а л ь н о й, если она гомоморфно вкладывается в любую строгую модель теории T.

ПРИМЕР I. Пусть $\Sigma_1 = (\{r, p, \alpha, \beta\}; \emptyset, \{c_1, c_2\})$ и T – множество предложений:

$$r(c_1); \quad \forall x(r(x) \to p(x)); \quad \forall x(\alpha(x) \to \beta(x)); \quad \forall x(\beta(x) \to \alpha(x)).$$

Строгая модель: $\mathfrak{M} = (\{c_1, c_2\};\; r = \{c_1\},\, p = \{c_1\},\, \alpha = \{c_1, c_2\},\; \beta = \{c_1, c_2\}$;

Минимальная модель: $\mathfrak{N} = (\{c_1, c_2\};\; r = \{c_1\},\; p = \{c_1\},\, \alpha = \emptyset,\; \beta = \emptyset\}$.

ПРИМЕР 2. $\mathcal{M}_c$ является строгой и минимальной.

Для теории T может существовать несколько гомоморфных несравнимых строгих моделей.

ПРИМЕР 3.

$$\Sigma_3 = (\{\alpha, p, q\};\ \emptyset;\ \{c_1, c_2\}).$$

$$T:\ q(c_1);\ q(c_2);\ \alpha(c_1) \to p(c_2);\ \alpha(c_2) \to p(c_1);$$
$$\forall x(q(x)\ \&\ \neg p(x) \to \alpha(x))$$

$$\mathcal{M}_1:\ (\{c_1, c_2\};\ q = \{c_1, c_2\},\ p = \{c_1\},\ \alpha = \{c_2\});$$

$$\mathcal{M}_2:\ (\{c_1, c_2\};\ q = \{c_1, c_2\},\ p = \{c_2\}\ \ \alpha = \{c_1\}).$$

T не имеет минимальной модели.

ПРИМЕР 4.

$$\Sigma_4 = \Sigma_3.$$

$$T:\ q(c_1);\ q(c_2);$$

$$\forall x(\alpha(x) \to p(x));\quad \forall x(q(x)\ \&\ \neg p(x) \to \alpha(x)).$$

Теория T не имеет ни одной строгой модели.

Исследование вопроса об условиях существования минимальной модели у T может быть сведено к задаче построения интерпретаций, соответствующих строгим моделям и критериям выбора минимальной из них.

Вначале для простоты ограничимся случаем, когда σ_N состоит только из одного предложения и формула p под отрицанием является одноместным предикатом из R. Пусть i_p – рассмотренная выше интерпретация вида (2) функций и отношений, определяемых теорией σ_p. Отметим, что для любых r, $\bar{c}$ значение $i_p[r]\bar{c}$ может принимать одно из значений $true, \perp, \top$. Обозначим через Q, P область истинности предиката q и p соответственно, т.е. $\forall c \in Q\ \ i[q]c = true$ и для $\forall c \in P\ \ i[p]c = true$. Очевидно, что если в интерпретации i_p выполняются $Q = P$ или $Q \subset P$, то вопрос о существовании минимальной модели для $T = \sigma_p \cup \sigma_N$ сводится к существованию $\mathcal{M}_c$ для σ_p. Поэтому будем считать, что область $D = Q \setminus P$ непуста.

Процесс построения строгой модели состоит в последовательном выборе элементов из области D и интерпретации отношения p на них как ложного. Результат вычисления всех отношений и функций при этом может зависеть от порядка, в котором выбирались элементы из

D (см.пример 3), т.е. интерпретациями, соответствующими различным фиксированным последовательностям $\bar{c}$ в D, могут задаваться неизоморфные или несравнимые модели. Последние могут также быть противоречивыми (содержать $\top$). Будем рассматривать множество интерпретаций $\{i\}$, определяемое множеством всевозможных перестановок элементов в D. Каждая i является наименьшей неподвижной точкой монотонного функционала и задается следующим итерационным описанием:

$$Q_1 = Q(i_p), \quad P_1 = P(i_p), \quad i_0 = i_p.$$

Для любых $k \geq 1$ последовательность $D_k = Q_k \setminus (Q_k \cap P_k)$, c_k - некоторый выбранный элемент в D_k;

$$\left.\begin{array}{l} i^k[\xi] = i_{k-1}[\xi], \text{ если } \xi \not\equiv p; \\ i^k[p]c = \begin{cases} \bot, \text{ если } c \equiv \bot; \\ \text{false, если } i_{k-1}[p]c = \bot \text{ и } c \equiv c_k; \\ i_{k-1}[p]c \text{ - в остальных случаях.} \end{cases} \\ i_k[\alpha]\bar{c} = \max\limits_{\{\varphi \to \psi_\alpha\} \subseteq \sigma_p \cup \sigma_N} \ (\max\limits_{\gamma_{\bar{c}}} (I_k(\alpha))), \end{array}\right\} \quad (4)$$

где I_k соответствует I в (3), в которой i заменено на i^k.

Таким образом, каждая i есть наименьшая верхняя грань некоторой последовательности $i_0 \sqsubseteq i_1 \sqsubseteq \ldots$ и характеризуется вектором $\langle c_1, c_2, \ldots, c_k, \ldots \rangle$ элементов c_j, выбираемых из D_j на каждом шаге j (т.е. для k = 1 определяется $|D_1|$ интерпретирующих функций $i_1', i_1'', \ldots$, каждая из которых на шаге 2 имеет $|D_2 \setminus c_1|$ для $c_1 = c_1', c_1'', \ldots$ различных продолжений, порождая множества функций $\{i_2(i_1')\}$, $\{i_2(i_1'')\}, \ldots$ и т.д.).

Назовем *стратегией* последовательность $\langle c_0, c_1, \ldots \rangle$, для каждого элемента c_j которой $i_j[p]c_j$ = false. Соответствующую стратегии $\langle \bar{c} \rangle$ интерпретацию i обозначим через $i // \langle \bar{c} \rangle$. Отметим, что если $i_k[p]c_k$=false для некоторого k, то для $l > k$ значение $i_l[p]c_k$ может стать равной ошибке $\top$. Тогда в силу монотонности $i[p] // \langle c_1, \ldots, c_k, \ldots \rangle$ также равно $\top$.

Из всех полученных i исключим те интерпретации, которые содержат ошибку ($\exists \bar{c}, \alpha$: $i[\alpha]\bar{c} = \top$) или неопределенность для некоторой функции ($\exists \bar{c}$, f: $i[f]\bar{c} = \bot$). Для оставшихся i образуем множество S соответствующих стратегий. Будем называть стратегии **корректными**, если они принадлежат S, и **эквивалентными**, если множества их элементов совпадают.

ЛЕММА I. а) *Для* $\forall s \in S$ *соответствующая* $i//s$ *определяет строгую модель для* T; б) *если* T *имеет минимальную модель* $\mathfrak{M} = (C, i)$, *то существует стратегия* s *в* S, *для которой* $i = i//s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Вытекает непосредственно из определений i и корректности s, так как $\mathfrak{M}_s \models r(\bar{c}) \leftrightarrow i[r]\bar{c}//s = true, \mathfrak{M}_s \models f(\bar{c}) = c_f \leftrightarrow i[f]\bar{c}//s = c_f$; б) очевидно в силу свойства гомоморфной вложимости: множество h констант c, на которых $p(c)$ ложно и $q(c)$ истинно, в $\mathfrak{M}$ должно содержать множество элементов s для $\forall s \in S$, т.е. $h \neq \emptyset$, и, значит, соответствует некоторому набору s_h и корректной интерпретации $i//s_h$, определяемой по i для $\mathfrak{M}$.

ЛЕММА 2. *Интерпретации, соответствующие эквивалентным стратегиям в* S, *определяют одну и ту же модель*. (Т.е. модели, соответствующие различным перестановкам s' элементов одного и того же множества s, совпадают.)

Утверждение доказывается индукцией по числу констант в s и следует из монотонности каждой i и их композиций.

ТЕОРЕМА I. *Теория* $T = \sigma_P \cup \sigma_N$ *имеет минимальную модель из констант* C *тогда и только тогда, когда* $S \neq \emptyset$ *и все корректные стратегии эквивалентны*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. <u>Необходимость</u>. По принятому соглашению, рассматривается минимальная модель $\mathfrak{M} = (C, i)$, не совпадающая тривиально с $\mathfrak{M}_\zeta$ для σ_P, поэтому $S \neq \emptyset$. По лемме I "б", $\exists s \in S$ такая, что $i = i//s$. Эквивалентность всех s из S доказывается индукцией по числу n констант в D. Для $n=1$ утверждение очевидно. Пусть $n = 2$, т.е. $\exists c_0, c_1 \in D$, и возможные стратегии $s_1 = c_0$, $s_2 = c_1$, $s_3 = \langle c_0, c_1 \rangle$, $s_4 = \langle c_1, c_0 \rangle$. Пусть h – стратегия, соответствующая $\mathfrak{M}$. По лемме I "б", $h \in S$. Поскольку $h \supseteq s$ для $\forall s \in S$, то h не может совпадать с s_1 или s_2. Пусть $h = s_3$. Но если $s_3 \in S$, то и $s_4 \in S$, следовательно, в силу монотонности возможно корректное доопределение $i//s_1$ до $i//\langle c_0, c_1 \rangle$ и $i//s_2$ до $i//\langle c_1, c_0 \rangle$, поэтому s_1 и s_2 не могут принадлежать S. Если теорема справедлива для $n = k$, то, предположив существование не совпадающих с h стратегий s_j, получим, что $\exists c_i \notin s_j$, но $c_i \in h$, при этом $|s_j| = k$. Но все стратегии длины k эквивалентны по предположению. Переставив в h элементы (это возможно по лемме 2) так, чтобы c_i стоял на $k+1$-м месте, получим корректное доопределение всех $i // s_j$ до $i // \langle s_j, c_i \rangle = i // h$, поскольку $h \in S$. Что и требовалось доказать.

Достаточность следует из лемм 2 и I "б".

Пусть $\mathfrak{M}$ – минимальная система во множестве всех строгих моделей для T. Рассмотрим проблему существования теории T', определяющей $\mathfrak{M}$, т.е. теории, для которой $\mathfrak{M}$ является минимальной в классе всех моделей T'.

Определим всевозможные расширения исходной теории $T = \sigma_p \cup \sigma_N$ замкнутыми формулами вида $\neg p(c_i)$, принимая во внимание только максимально непротиворечивые расширения, т.е. такие T_{max}, что добавление любого $\neg p(c_j)$ к T_{max} ведет либо к противоречию, либо к множеству следствий, совпадающему со следствиями T_{max}. Такое максимальное расширение будем называть N-расширением и обозначать через T^N.

У теории T может быть несколько максимальных расширений. Например, для T из примера 3 существуют два N-расширения: $T_1^N = T \cup \neg p(c_2)$ и $T_2^N = T \cup \neg p(c_1)$.

ПРИМЕР 5. Теория T в языке $\Sigma_5 = (\{\alpha, p, q\}; \emptyset; \{c_0, c_1, c_2\})$: $q(c_1)$; $q(c_2)$; $\forall x, y(\alpha(x) \& y = c_0 \to p(y))$, $\forall x(q(x) \& \neg p(x) \to \alpha(x))$ имеет минимальную модель $\mathfrak{M} = (\{c_0, c_1, c_2\};\ q = \{c_1, c_2\}, p = \{c_0\},\ \alpha = \{c_1, c_2\})$ и единственное N-расширение $T \cup \neg p(c_1) \cup \neg p(c_2)$.

Однако свойства теории иметь минимальную модель и единственное максимальное расширение не равносильны.

ПРИМЕР 6. Теория T в $\Sigma_6 = (\{\alpha, p, q, \beta\}; \emptyset; \{c_1, c_2\})$: $q(c_1)$; $q(c_2)$; $\alpha(c_1) \to p(c_2)$; $\forall x(\alpha(x) \to \beta(x))$; $\forall x(q(x) \& \neg p(x) \to \alpha(x))$ имеет два N-расширения: $T_1^N = T \cup \neg p(c_1)$ и $T_2^N = T \cup \neg p(c_2)$ и минимальную модель $\mathfrak{M} = (\{c_1, c_2\};\ p = \{c_2\},\ q = \{c_1, c_2\}, \alpha = \{c_1\},\ \beta = \{c_1\})$.

ПРИМЕР 7. Теория T в сигнатуре $\Sigma_6 = q(c_1)$; $q(c_2)$; $\forall x(\alpha(x) \to \beta(x))$; $\alpha(c_2) \to p(c_2)$: $\forall x(q(x) \& \neg p(x) \to \alpha(x))$ имеет единственное N-расширение $T \cup \neg p(c_1)$, но не имеет минимальной модели.

Несоответствие свойств существования минимальной модели и единственного N-расширения для теории T возникает в случаях, когда логическими следствиями T^N являются формулы, истинные только в нестрогих моделях T (в примере 6 $T_2^N \models p(c_1)$ и в примере 7 $T^N \models p(c_2)$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем N-расширение T^N теории T **строгим**, если для любой атомарной формулы a, для которой $T^N \models a(\bar{c})$, $a \notin T$, существует определение $\forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \to a(\bar{x}))$ в T такое, что $T^N \models \varphi(\bar{c})$.

Справедлива

ТЕОРЕМА 2. **Следующие утверждения эквивалентны:**

а) $T = \sigma_p \cup \sigma_N$ **имеет единственное строгое N-расширение T^N, определимое в C;**

б) T **имеет минимальную модель $\mathfrak{M}$ из констант C;**

в) **модель $\mathfrak{M}_c$ теории T является минимальной относительно гомоморфного вложения в классе всех моделей T^N.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что T^N в "а" имеет модель $\mathfrak{M}_c^N$, гомоморфно вложимую в любую модель T^N. Введем новый предикатный символ τ, определяемый соотношением $\forall x(\tau(x) \leftrightarrow \neg p(x))$, и рассмотрим теорию T^τ, полученную из T^N заменой всех $\neg p(c_i)$ на $\tau(c_i)$ и $\neg p(x)$ на $\tau(x)$. Все модели для T^τ в языке Σ_τ, очевидно, являются моделями T^N в Σ, и наоборот. Но T^τ является определимой в C непротиворечивой совокупностью квазитождеств и поэтому обладает моделью типа $\mathfrak{M}_c$. Докажем, что "а" влечет "б" и "в", т.е. что $\mathfrak{M}_c^N$ является минимальной для T. Модель $\mathfrak{M}_c^N$ задается интерпретацией $i//s$, в которой $c \in s \leftrightarrow \neg p(c) \in T^N$. Все другие корректные стратегии для T эквивалентны, так как, предположив противное, получим не единственное строгое максимальное расширение T^N теории T. Обратно, "б" $\to$ "а": если у T существует минимальная модель $\mathfrak{M} = (C, i)$, то строим T^N, положив $\neg p(c) \in T^N \leftrightarrow i[p]c = false$. Поскольку все функции определены в i, то T^N определима в C и, следовательно, имеет модель $\mathfrak{M}_c^N$, и так как $\mathfrak{M}$ является моделью и для T^N, то $\mathfrak{M}_c^N$ гомоморфно вложима в $\mathfrak{M}$. Но, с другой стороны, $\mathfrak{M}_c^N$ - строгая модель и для T, поэтому $\mathfrak{M}$ вкладывается в $\mathfrak{M}_c^N$, таким образом, $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_c^N$. Аналогично из утверждения "в" следует единственность и определимость в C теории T^N.

Изложенные результаты справедливы при расширении класса предикатов p многоместными отношениями $p(\bar{x})$ и отношениями, пред -

ставляющими формулу $p(\bar{t})$ или $t_i = t_j$. В первом случае каждая стратегия s составляется соответственно как список векторов $\bar{c}$. Возможность неопределенности входящих в термы функций учитывается в определении $i[p]\bar{c} = \perp$, если $\perp \in \bar{c}$, имеющем место и для предиката равенства.

Менее тривиальным является включение нескольких предложений $\sigma_{N_1},\ldots,\sigma_{N_m}$ в T. Предикат, входящий с отрицанием в σ_{N_j}, может появиться как следствие предложений σ_{N_k}, $k \neq j$, при некоторой интерпретации i. Если такую зависимость в σ_N исключить, то все результаты сохранятся для $T \cup \sigma_{N_1} \cup \ldots \cup \sigma_{N_m}$. В противном случае стратегии должны учитывать порядок выбора не только констант из D_k , но и предложений σ_{N_j}, для которых определяются эти D_k. Перебор всех таких возможностей ведет к значительному усложнению разрешающих алгоритмов.

Рассмотрим некоторые реализационные аспекты построения $\mathfrak{M}$ для произвольной T. Процесс получения интерпретации i, соответствующей $\mathfrak{M}$, включает определение всех возможных стратегий, исключение из них некорректных и проверку эквивалентности оставшихся. При этом если обозначить через n_1 мощность D_1, а через n_k мощность приращения $D_k \setminus D_{k-1}$ для $\forall k > 1$, то количество различных стратегий на шаге k может достигать порядка $n_1!\, n_2! \ldots n_k!$. Очевидно, что оценки сложности соответствующих реализующих алгоритмов будут экспоненциальными как по времени, так и по памяти. Однако практически возможно выделить полезный случай, в котором сложность реализации может быть улучшена до линейной.

Заметим, что если $\mathfrak{M}$ существует, то определения (4) задают последовательность областей $D'_1 \subseteq D'_2 \subseteq \ldots$, в которой $D'_j \subseteq D_j$ для любых j и результат интерпретации не зависит от порядка выбора элементов в D'_j. Если D'_j известно, то множество эквивалентных "подстратегий", соответствующих перестановкам D'_j, можно заменить любой из них. Будем говорить, что $\mathfrak{M}$ абсолютно строгая, если $D'_j = D_j$ для всех j. Абсолютно строгую $\mathfrak{M}$ можно построить единственной стратегией, полагая на каждом шаге k, что $i^k[p]c =$ $=$ false для в с е х c из D_k. При этом из алгоритма исключаются проверки эквивалентности стратегий и дополнительная память требуется только для хранения текущих "областей ложности" P-предикатов p, имеющих негативные вхождения. Критерий противоречивости $P_k^- \cap P_k \neq \emptyset$ для некоторого k является также и критерием существования абсолютно строгой модели исходной T.

Свойство абсолютной строгости имеет естественное приложение в задаче контекстного анализа программ, реализуемого на основе спецификации контекстно-зависимых свойств языка программирования с помощью теорий вида $\sigma_P \cup \sigma_N$. При этом q в σ_N задает область действия идентификаторов программной единицы и формула $\neg p$ определяет условия выхода за пределы этой области. Например, возможность использования имени в охватывающей программной конструкции, если это имя не описано в данной конструкции, может быть представлена следующими предложениями (квантор $\forall$ для простоты опущен):

1) x используется-в y & z объявлен-в y & имя(x)=имя(y) → →x описан-в y;

2) x используется-в y & $\neg$(x описан-в y) & y вложен-в z → →x используется-в z.

Здесь предикаты объявлен-в, используется-в заданы на определяющих и использующих вхождениях идентификаторов соответственно; вложен-в – на программных единицах типа "блок", "процедура" и т.д. Содержательная интерпретация этой спецификации не позволяет рассматривать "привилегированные" подмножества имен, не совпадающих со всем множеством D_k для любых k при определении корректных стратегий, поэтому абсолютно строгая модель является адекватной теоретико-модельной семантикой таких описаний.

Автор искренне благодарен С.С.Гончарову и Д.И.Свириденко за постановку задачи и полезное обсуждение данной работы.

Литература

1. CLARK K.L. Negation as Failure//Logic and Databases; Eds. H.Callaire,J.Minker.- New York, 1978. - P.293-322.

2. КЛЕЩЕВ А.С. Реляционная модель вычислений //Программирование. - 1980.-№4. - С.20-29.

3. HAGIYA M., SAKURAI T. Foundation of Logic Programming based on inductive definition// New Generation Computing.- 1984. - Vol.2,N 1.- P.59-77.

4. ГОНЧАРОВ С.С., СВИРИДЕНКО Д.И. Σ-программирование //Логико-математические основы проблемы МОЗ. - Новосибирск, 1985. -Вып. 107: Вычислительные системы. - С.3-29.

5. ГЛУШКОВА В.Н., ИЛЬИЧЁВА О.А. Автоматизация синтаксического и контекстного анализа в СПТ //Кибернетика. - 1985.- №4. - С.26-28.

6. ИЛЬИЧЁВА О.А. О семантике квазитождеств, определяющих модели из констант //Прикладная логика. - Новосибирск,1986.-Вып.116: Вычислительные системы. - С. 16-32.

Поступила в ред.-изд.отд.
22 января 1987 года