ЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ПРОГРАММИРОВАНИИ
(Вычислительные системы)
1987 год Выпуск 120

УДК 510.53; 510.67

ОБ ОГРАНИЧЕННОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ СВОДИМОСТИ ВЫЧИСЛИМЫХ ИНДЕКСАЦИЙ КЛАССОВ КОНСТРУКТИВНЫХ МОДЕЛЕЙ

В.П.Добрица

В работе С.С.Гончарова [4] рассмотрено понятие предельной автоэквивалентности конструктивных нумераций одной модели. Аналогично можно ввести понятие предельной эквивалентности вычислимых индексаций класса конструктивных моделей.

Основные определения и обозначения можно найти в [1-3]. Напомним, что через K^* обозначается класс конструктивных моделей, а через α,β,γ - его вычислимые индексации.

Скажем, что α предельно сводится к β, если существует общерекурсивная функция (о.р.ф.) $\varphi(n,x)$ такая, что для каждого $x\in\omega$ существует

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(n,x) \quad \text{и} \quad \alpha_x \underset{a}{\equiv} \beta_{\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(n,x)}\,.$$

Обозначим $\alpha \underset{\lim}{\le} \beta$, а функцию $\varphi(n,x)$ назовем предельно сводящей.

Если существует о.р.ф. $f(x)$, которая при каждом значении x ограничивает сверху число смен значений в последовательности $\varphi(0,x),\varphi(1,x),\dots,\varphi(n,x),\dots$, то будем называть сводимость предельной ограниченной (с помощью функции $f(x)$), а саму $f(x)$ будем называть ограничивающей сводящую функцию (или мажорирующей сводящую функцию), или просто мажорантой функции $\varphi(n,x)$.

Заметим, что если $f(x)$ - мажоранта $\varphi(n,x)$ и для всех $x\in\omega$ выполняется неравенство $f(x)\le h(x)$, то и $h(x)$ является мажорантой $\varphi(n,x)$. Введем отношение $f(x)\preccurlyeq h(x)$, если множество $\{x \mid h(x)<f(x)\}$ конечно.

Очевидно, если $f(x)$ является мажорантой некоторой функции $\varphi(n,x)$, то любая функция $h(x)$ такая, что $f(x)\preccurlyeq h(x)$, является мажорантой функции $\varphi_1(n,x)$, получаемой из $\varphi(n,x)$ изменением значений на конечном множестве аргументов.

Из самого определения видно, что мажоранта является неотрицательной функцией. Если о.р.ф. $\varphi(n,x)$ мажорируется некоторой о.р.ф. $f(x)$, то при каждом значении $k \in \omega$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(n,x)$.

Введем обозначения некоторых классов функций, определяемых по вычислимым индексациям α,β (при условии, что $\alpha \underset{\lim}{\leq} \beta$):

$$\Pi(\alpha,\beta) = \{\varphi(n,x) \mid \varphi(n,x) \text{ осуществляет предельную сводимость } \alpha \text{ к } \beta\},$$

$$О\Pi(\alpha,\beta) = \{\varphi(n,x) \mid \varphi(n,x) \in \Pi(\alpha,\beta) \text{ и для } \varphi(n,x) \text{ существует (о.р.ф.) мажоранта }\},$$

$$M(\alpha,\beta) = \{f(x) \mid f(x) - \text{ мажоранта некоторой } \varphi(n,x) \in О\Pi(\alpha,\beta)\}.$$

Условие $\alpha \underset{\lim}{\leq} \beta$ можно опустить. Для $\alpha \underset{\lim}{\nleq} \beta$ будем считать $\Pi(\alpha,\beta) = \emptyset$.

Введенное выше отношение $\preccurlyeq$ на множестве $M(\alpha,\beta)$ является частичным порядком. Кроме того, если $f(x) \in M(\alpha,\beta)$, $f(x) \preccurlyeq h(x)$, то $h(x) \in M(\alpha,\beta)$.

Если $f(x) \preccurlyeq h(x)$ и $h(x) \preccurlyeq f(x)$, то эти мажоранты будем считать эквивалентными: $f(x) \approx h(x)$.

Обозначим через $О\Pi(\alpha,\beta,f)$ подкласс класса $О\Pi(\alpha,\beta)$, состоящий из предельно-сводящих функций $\varphi(n,x)$, которые мажорируются функциями, не превосходящими $f(x)$, а именно: $О\Pi(\alpha,\beta,f) = \{\varphi(n,x) \mid \varphi(n,x) \in О\Pi(\alpha,\beta)$ и у $\varphi(n,x)$ имеется мажоранта $h(x) \preccurlyeq f(x)\}$.

Если $О\Pi(\alpha,\beta,f) \neq \emptyset$, то будем говорить, что индексация α предельно сводится к индексации β с ограничивающей функцией $f(x)$: $\alpha \underset{\lim,f}{\leq} \beta$. Очевидна импликация

$$(\alpha \underset{\lim,f}{\leq} \beta) \wedge (f(x) \preccurlyeq h(x) \rightarrow (\alpha \underset{\lim,h}{\leq} \beta).$$

Отметим, что если $\alpha \leq \beta$, то $\alpha \underset{\lim,0}{\leq} \beta$, где $0 = 0(x) \equiv 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Для любого конечного подмножества в $M(\alpha,\beta)$ существуют его точная нижняя (т.н.г) и точная верхняя грани (в.н.г.).

Это утверждение достаточно доказать для двухэлементного подмножества. Пусть $f_1(x), f_2(x) \in M(\alpha,\beta)$. Если $f_1(x) \approx f_2(x)$, то точные верхняя и нижняя грани совпадают с этими функциями.

Допустим $f_1(x) \neq f_2(x)$. Обозначим через $\varphi_1(n,x)$ и $\varphi_2(n,x)$ предельно-сводящие функции из $\text{ОП}(\alpha,\beta)$, соответствующие мажорантам $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Определим две функции $\psi_1(n,x)$ и $\psi_2(n,x)$:

$$\psi_1(n,x) = \begin{cases} \varphi_1(n,x), & \text{если } f_1(x) \le f_2(x); \\ \varphi_2(n,x), & \text{если } f_1(x) > f_2(x); \end{cases}$$

$$\psi_2(n,x) = \begin{cases} \varphi_1(n,x), & \text{если } f_1(x) \ge f_2(x); \\ \varphi_2(n,x), & \text{если } f_1(x) < f_2(x). \end{cases}$$

Каждая из них является предельно-сводящей из класса $\text{ОП}(\alpha,\beta)$, так как

$$\alpha_x \underset{a}{\equiv} {}^{\beta}\lim_{n\to\infty} \varphi_1(n,x) \underset{a}{\equiv} {}^{\beta}\lim_{n\to\infty} \varphi_2(n,x) \underset{a}{\equiv} {}^{\beta}\lim_{n\to\infty} \psi_1(n,x) \underset{a}{\equiv}$$

$$\underset{a}{\equiv} {}^{\beta}\lim_{n\to\infty} \psi_2(n,x) .$$

Мажоранта $h_1(x)$ функции $\psi_1(n,x)$ определяется следующим образом:

$$h_1(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{если } f_1(x) \le f_2(x); \\ f_2(x), & \text{если } f_1(x) > f_2(x). \end{cases}$$

Рекурсивность функции $h_1(x)$ очевидна. Покажем, что она является точной нижней гранью множества $\{ f_1(x), f_2(x) \}$. Пусть $\eta(x) \preccurlyeq f_1(x)$ и $\eta(x) \preccurlyeq f_2(x)$. Множества $\{x \mid \eta(x) > f_1(x)\}$ и $\{x \mid \eta(x) > f_2(x)\}$ конечны в силу определения отношения $\preccurlyeq$. Поэтому конечно их объединение $\{x \mid \eta(x) > f_1(x)\} \cup \{x \mid \eta(x) > f_2(x)\} = \{x \mid \eta(x) > f_1(x) \vee \eta(x) > f_2(x)\}$. Легко понять, что выполняется эквивалентность

$$\eta(x) > f_1(x) \vee \eta(x) > f_2(x) \leftrightarrow \eta(x) > h_1(x).$$

Поэтому конечно множество

$$\{ x \mid \eta(x) > h_1(x) \} = \{ x \mid \eta(x) > f_1(x)\} \cup \{x \mid \eta(x) > f_2(x) \} .$$

Значит, $\eta(x) \preccurlyeq h_1(x)$. Соотношения $h_1(x) \preccurlyeq f_1(x)$ и $h_1(x) \preccurlyeq f_1(x)$ сразу получаем из определения функции $h_1(x)$. Положим

$$h_2(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{если } f_1(x) \ge f_2(x); \\ f_2(x), & \text{если } f_1(x) < f_2(x). \end{cases}$$

Аналогично показывается, что $h_2(x) \in M(\alpha,\beta)$ и является точной верхней гранью множества $\{ f_1(x), f_2(x) \}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $\alpha \underset{\lim,f}{\leq} \beta$, $\gamma \underset{\lim,h}{\leq} \beta$ и $\alpha \leq \gamma$ со сводящей функцией $\psi(x)$, то $\alpha \underset{\lim,g}{\leq} \beta$, где $g(x) = \text{т.н.г.}\{f(x), h(\psi(x))\}$.

Пусть $\varphi_1(n,x)$ и $\varphi_2(n,x)$ – предельно-сводящие функции из $ОП(\alpha,\beta)$ и $ОП(\gamma,\beta)$, соответствующие мажорантам $f(x)$ и $h(x)$. Определим функцию $\eta(n,x) \in ОП(\alpha,\beta)$ следующим образом:

$$\eta(n,x) = \begin{cases} \varphi_1(n\ x), & \text{если } f(x) \leq h(\psi(x)); \\ \varphi_2(n,\psi(x)), & \text{если } f(x) > h(\psi(x)). \end{cases}$$

Нетрудно понять, что $g(x)$ является мажорантой функции $\eta(n,x)$ и точной нижней гранью множества $\{ f(x), h(\psi(x)) \}$ относительно упорядоченности общерекурсивных функций по $\preccurlyeq$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если в множестве $M(\alpha,\beta)$ существует минимальный элемент, то он является наименьшим.

Действительно, пусть $h(x)$ – минимальный элемент в $M(\alpha,\beta)$. Тогда для произвольной функции $f(x) \in M(\alpha,\beta)$ имеем $f(x) \not\prec h(x)$. Найдем $h_1(x) = \text{т.н.г.}\{ f(x), h(x) \}$, которая существует в силу предложения I. Тогда $h_1(x) \preccurlyeq h(x)$ и в силу минимальности элемента $h(x)$ имеем $h(x) \approx h_1(x)$. В то же время $h_1(x) \preccurlyeq f(x)$. Следовательно, $h(x) \preccurlyeq f(x)$. В силу произвольности рассматриваемой функции $f(x) \in M(\alpha,\beta)$ имеем требуемое.

Мажоранту $f(x)$ функции $\varphi(n,x)$ назовем достижимой, если существует такое $x \in \omega$, что в последовательности $\varphi(0,x), \varphi(1,x), \ldots, \varphi(n,x), \ldots$ смен значений происходит ровно $f(x)$ раз.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для каждой функции $\varphi(n,x) \in ОП(\alpha,\beta)$ существует достижимая мажоранта.

Действительно, для функции $\varphi(n,x) \in ОП(\alpha,\beta)$ существует некоторая мажоранта $f(x)$. Если она недостижима, то для каждого $x \in \omega$ в последовательности $\varphi(0,x), \varphi(1,x), \ldots, \varphi(n,x), \ldots$ смен значений строго меньше $f(x)$. А тогда функция $f_1(x) = f(x)-1$ тоже будет мажорантой. При каждом фиксированном значении $x_0 \in \omega$ число смен значений в последовательности $\varphi(0,x_0), \varphi(1,x_0), \ldots, \varphi(n,x_0), \ldots$ лежит в множестве $\{ 0, 1, \ldots, f(x_0) \}$. А потому описанная процедура перехода от мажоранты $f(x)$ к $f_1(x)$ может быть проведена не больше $f(x_0)$ раз. Таким образом, при подходящем значении $k \le f(x_0)$ функция $f_k(x) = f(x) - k$ будет достижимой мажорантой для предельно-сводящей функции $\varphi(n,x)$.

Введем обозначение множества аргументов, на которых мажоранта достигается:

$$D(\varphi,f) = \{x \mid \text{в последовательности } \{\varphi(n,x) \mid n \in \omega\} \text{ смен значений ровно } f(x) \text{ и } f \text{ является мажорантой } \varphi(n,x)\}.$$

Очевидно, что $D(\varphi,f) = \emptyset$ тогда и только тогда, когда мажоранта $f(x)$ недостижима для предельно-сводящей функции $\varphi(n,x)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Пусть* $\varphi(n,x) \in ОП(\alpha,\beta)$ *и* $f(x) \in M(\alpha,\beta)$ *является соответствующей мажорантой. Если в* $D(\varphi,f)$ *имеется бесконечное рекурсивное множество* D, *то существуют функция* $\psi(n,x) \in ОП(\alpha,\beta)$ *и ее мажоранта* $h(x) \in M(\alpha,\beta)$ *такие, что* $h(x) \preccurlyeq f(x)$, $D(\varphi,f) = D(\psi,h)$ *и для всех* x *из* D *функция* $h(x) = 0$.

Определим функцию $\psi(n,x)$ следующим алгоритмом. Если $x \notin D$, то $\psi(n,x) = \varphi(n,x)$ при всех $n \in \omega$. Если же $x \in D$, то находим такое n_0, что в последовательности $\varphi(0,x), \dots, \varphi(n_0,x)$ смена значений произошла ровно $f(x)$ раз. Полагаем $\psi(k,x) = \varphi(n_0+k,x)$ для всех $k \in \omega$. Очевидно, что для $x \in D$ всегда $\psi(k,x) = \varphi(n_0,x)$. Как легко понять, функция

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \notin D; \\ 0, & \text{если } x \in D, \end{cases}$$

является мажорантой для $\psi(k,x)$. Проверка выполнимости условий не представляет труда.

Заметим, что множество $D(\varphi,f)$ всегда рекурсивно-перечислимо. Если $D(\varphi,f)$ – рекурсивное множество, то ψ, h можно выбрать так, что $D(\psi,h) = D(\varphi,f)$ и для всех $x \in D(\psi,h)$ функция $h(x) = 0$. Отметим также, что при наличии в $D(\varphi,f)$ бесконечного подмножества $D_1 = \{x \mid x \in D(\varphi,f), f(x) \ne 0\}$ существуют соответствующие D, ψ, h, для которых $h(x) \prec f(x)$, $D(\varphi,f) = D(\psi,h)$ и $h(x) = 0$ при всех $x \in D$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Если* $f(x)$ *является минимальной в* $M(\alpha,\beta)$, *то для соответствующей функции* $\varphi(n,x) \in ОП(\alpha,\beta)$ *и произвольного рекурсивного множест-*

в а $D_2 \subseteq D(\varphi,f)$ п о д м н о ж е с т в о $\{x \mid x\in D_2, f(x)\neq 0\}$ к о н е ч н о.

В силу доказательства предложения 4, минимальная мажоранта $f(x)$ достижима каждой функцией $\varphi(n,x)\in$ ОП(α,β), которую она мажорирует. Поэтому $D(\varphi,f)\neq\emptyset$. Если имеется рекурсивное множество $D_2\subseteq D(\varphi,f)$, в котором для бесконечно многих x функция $f(x)\neq 0$, то в силу предложения 5 существуют $\psi(n,x)$ и $h(x)$ такие, что $h(x)\preccurlyeq f(x)$, $D(\varphi,f)=D(\psi,h)$ и $h(x)=0$ для всех $x\in D_2$. А тогда для бесконечного числа значений аргумента $x\in D_2$ будет $0=h(x)<f(x)\neq 0$, т.е. $h(x)\prec f(x)$. Но это противоречит минимальности $f(x)$ в $M(\alpha,\beta)$. Что и требовалось.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Е с л и в $\overline{D(\varphi,f)}=N\setminus D(\varphi,f)$ и м е е т - с я б е с к о н е ч н о е р.п. п о д м н о ж е с т в о, т о $f(x)$ н е я в л я е т с я м и н и м а л ь н ы м э л е - м е н т о м в $M(\alpha,\beta)$.

Предположим, что $\varphi(n,x)\in$ ОП(α,β) и $f(x)\in M(\alpha,\beta')$ является такой мажорантой, что в $\overline{D(\varphi,f)}$ имеется бесконечное р.п. подмножество. Тогда можно выделить бесконечное рекурсивное множество $D_4\subseteq\overline{D(\varphi,f)}$. Для каждого $x\in D_4$ число смен значений в последовательности $\varphi(0,x),\varphi(1,x),\ldots,\varphi(n,x),\ldots$ строго меньше $f(x)$ (в противном случае $x\in D(\varphi,f)$), а потому оно не превосходит $f(x)-1$. Определим новую мажоранту $h(x)$ для предельно-сводящей функции $\varphi(n,x)$:

$$h(x)=\begin{cases} f(x), \text{ если } & x\notin D_4;\\ f(x)-1, \text{ если } & x\in D_4.\end{cases}$$

В силу бесконечности множества D_4, получаем $h(x)\prec f(x)$, т.е. $f(x)$- не минимальный элемент в множестве $M(\alpha,\beta)$.

ТЕОРЕМА I. а) Е с л и $0\notin M(\alpha,\beta)$, т о в $M(\alpha,\beta)$ н е т м и н и м а л ь н ы х э л е м е н т о в.

б) Е с л и $0\in M(\alpha,\beta)$, т о э т а т о ж д е с т - в е н н а я ф у н к ц и я $0(x)\equiv 0$ я в л я е т с я н а и - м е н ь ш и м э л е м е н т о м.

П. "б" очевиден в силу неотрицательности мажорирующих функций.

Докажем первую часть теоремы. Предположим противное. Обозначим через $f(x)$ минимальный элемент множества $M(\alpha,\beta)$. Множество $A_f=\{x \mid f(x)>0\}$ рекурсивно-перечислимо и бесконечно (в противном случае $f(x)\approx 0(x)$). Но тогда и множество $A_f\cap D(\varphi,f)$

является рекурсивно-перечислимым при любой предельн -сводящей функции $\varphi(n,x)$ с мажорантой $f(x)$. Если $A_f \cap D(\varphi,f)$ конечно, то множество $A_f \setminus (A_f \cap D(\varphi,f))$ бесконечно, рекурсивно-перечислимо и лежит в $\bar{D}$. А тогда по предложению 7 вступаем в противоречие с минимальностью $f(x)$ в $M(\alpha,\beta)$.

Если же $A_f \cap D(\varphi,f)$ бесконечно, то в $D(\varphi,f)$ имеется бесконечное рекурсивное подмножество D_1 такое, что $f(x) > 0$ для всех $x \in D_1$. Но это противоречит предложению 6.

Теорема доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть α,β - вычислимые индексации класса K^*, $g(x)$ - о.р.ф. такая, что $\sup\{g(x) \mid x \in \omega\} = \infty$. Если $\alpha \underset{\lim,f}{\leq} \beta$ с некоторой общерекурсивной мажорантой $f(x)$, то существует вычислимая индексация $\gamma \equiv \alpha$ такая что $\gamma \underset{\lim,g}{\leq} \beta$.

Построение вычислимой индексации γ проведем по шагам. Параллельно будут определяться значения вспомогательной общерекурсивной функции $\psi(t)$.

<u>Шаг 0</u>. Полагаем $\gamma_0 = \alpha_0$, $\psi(0) = 0$. Переходим к следующему шагу.

Пусть после шага t определено значение $\psi(t)$ и известны γ-образы конструктивных нумераций $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{\psi(t)}$.

<u>Шаг t+1</u>. Если $g(t+1) < f(\psi(t)+1)$, то полагаем $\gamma_{t+1} = \alpha_0$ и $\psi(t+1) = \psi(t)$. Если же $g(t+1) \geq f(\psi(t)+1)$, то полагаем $\gamma_{t+1} = \alpha_{\psi(t)+1}$ и $\psi(t+1) = \psi(t)+1$. Переходим к следующему шагу.

Построение закончено.

В силу построения очевидно, что $\gamma \leq \alpha$. С другой стороны, последовательность номеров γ-нумераций, соответствующих конструктивизациям $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, составляет рекурсивное множество, так как его элементы перечисляются строго по возрастанию. Для каждого i нумерация γ_{n_i}, соответствующая и автоэквивалентная конструктивизации α_i, находится эффективно. Тем самым доказана сводимость $\alpha \leq \gamma$.

Указывая нумерацию $\beta_{k_0} \underset{a}{\equiv} \alpha_0$ и учитывая соотношения $g(n_i) \geq f(i)$, $i \in \omega$, из проводимого построения легко понять, что $\gamma \underset{\lim,g}{\leq} \beta$.

Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ. Если α,β - вычислимые индексации класса K^* конструктивных моделей такие, что $\alpha \underset{\lim,f}{\leq} \beta$ при некоторой мажорирующей общерекурсивной функции $f(x)$, то существует вычислимая индексация γ этого же класса K^* такая, что $\gamma \equiv \alpha$ и $\gamma \underset{\lim,(x-k)}{\leq} \beta$ при каждом фиксированном натуральном k.

В доказательстве достаточно взять в качестве новой мажорирующей функции $g(x)=[x-\ln x]$ и соответствующую предельно-сводящую функцию "подправить" на конечном множестве, зависящем от k.

В предложении 8 говорится о возможности понижения "сложности" предельно-сводящей функции при переходе к некоторой эквивалентной вычислимой индексации исходного класса конструктивных моделей, где под "сложностью" понимается число возможных смен значений этой функции. Но в некоторых случаях допускается в определенном смысле "повышение сложности" предельно-сводящей функции при переходе к подходящей эквивалентной вычислимой индексации.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Пусть α,β - вычислимые индексации класса K^* конструктивных моделей, $g(x)$ - общерекурсивная функция, для которой $\sup\{g(x)\,|\,x\in\omega\}=\infty$ и $\alpha \underset{\lim,g}{\lneq} \beta$. Тогда для любой общерекурсивной функции $f(x)$, имеющей нижний предел $\underline{\lim}\, f(x)=k$ такой, что если определен нижний предел $\underline{\lim}\, g(x)$, то $k \leq \underline{\lim}\, g(x)$, существует вычислимая индексация γ класса K^*, для которой выполняются условия: $\gamma\equiv\alpha$, $\gamma \underset{\lim,f}{\lneq} \beta$.

Последовательно будем определять конструктивизации γ_t индексации γ.

<u>Шаг $t\geq 0$</u>. Вычисляем значение $f(t)$.

а) Если $f(t)\leq k$, то находим первое n_t такое, что среди определенных вычислимых индексаций нет $\gamma_i = \alpha_{n_t}$, где $i<t$. Полагаем $\gamma_t = \alpha_{n_t}$. Переходим к следующему шагу.

б) Если $f(t) > k$, то находим наименьшее n_t такое, что $g(n_t) > f(t)$ и среди определенных конструктивизаций нет $\gamma_i = \alpha_{n_t}$. Полагаем $\gamma_t = \alpha_{n_t}$. Переходим к следующему шагу.

Построение закончено.

В силу того что $\underline{\lim}\, f(x) = k$, множество $\{x \mid f(x) < k\}$ конечно. На построение оно существенно не влияет. С другой стороны, множество $\{x \mid f(x) = k\}$ бесконечно. Поэтому п."а" построения будет выполняться бесконечное число раз. Тогда, очевидно, все нумерации α_n будут встречаться в построении в качестве $\gamma_i = \alpha_n$ при подходящем значении i. Значит, γ является вычислимой индексацией класса K^*. Легко устанавливается эквивалентность $\gamma \equiv \alpha$.

Заметим, что для всех $t \in \omega$ выполняется неравенство $f(x) \leq g(n_t)$, где через n_t обозначено число, которое определяется на шаге t и для которого $\gamma_t = \alpha_{n_t}$.

Предположим, что имеется предельная сводимость $\gamma \leq_{\lim, f} \beta$ с помощью общерекурсивной функции $\psi(s,x)$, т.е. $\gamma_x \underset{a}{\equiv} \beta_{\lim\limits_{s\to\infty} \psi(s,x)}$ и $f(x)$ является мажорантой для $\psi(s,x)$. Определим функцию $\varphi(s,x)$ следующим образом. Для выбранного значения y ждем появления такого шага построения t, что $\gamma_t = \alpha_y$. Для всех s полагаем $\varphi(s\ y) = \psi(s,t)$.

Как отмечалось выше, для каждого значения y обязательно найдется соответствующее значение t. В силу построения выполняется неравенство $f(t) \leq g(y)$. Следовательно, функция $\varphi(s,y)$ общерекурсивна, мажорируется общерекурсивной функцией $g(y)$ и осуществляет предельную сводимость $\alpha \leq_{\lim, g} \beta$. Но этого не может быть в силу ограничения, налагаемого на вычислимые индексации α, β. Поэтому $\gamma \not\leq_{\lim, f} \beta$. Предложение доказано.

Пусть $\varphi(x,y)$ является частично-рекурсивной функцией (ч.р.ф.). По ней зададим последовательность значений $\varphi(0,y)$, $\varphi(1,y), \ldots, \varphi(x,y), \ldots$, которая либо бесконечна, если функция $\lambda x\, \varphi(x,y)$ является общерекурсивной, либо конечна и содержит наибольший начальный отрезок $\varphi(0,y), \ldots, \varphi(k,y)$ из определенных значений функции $\lambda x\, \varphi(x,y)$. Как обычно, когда значение $\varphi(x,y)$ не определено, будем говорить о расходимости функции в точке и обозначать $\varphi(x,y)\uparrow$. В случае, если значение $\varphi(x,y)$ определено, говорим о сходимости и обозначаем символически $\varphi(x,y)\downarrow$.

Будем говорить, что ч.р.ф. $\varphi(x,y)$ мажорируется о.р.ф. $f(y)$, если число смен значений в последовательности $\{\varphi(x,y) \mid x \in \omega\}$ при каждом фиксированном y не превосходит величины $f(y)$. И считаем, что если при некотором x выполняется условие $\varphi(x,y)\uparrow$, то для всех $z \geq x$ выполняется условие $\varphi(z,y)\uparrow$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Для произвольной о.р.ф. $f(x)$ класс ч.р.ф. $\varphi(x,y)$, для которых $f(x)$ является мажорантой, имеет универсальную ч.р.ф.

Исходя из универсальной ч.р.ф. Клини $K(n,x,y)$, для двуместных ч.р.ф. определим новую функцию $g(n,x,y)$, которая и будет универсальной для указанного в предложении класса:

$$g(n,x,y)=\begin{cases} K(n,x,y), & \text{если для всех } z \leq x \ K(n,z,y)\downarrow \text{ и число смен} \\ & \text{значений в последовательности } \{K(n,z,y) \mid z \leq x\} \\ & \text{не превосходит } f(x); \\ \text{расходится}, & \text{если для некоторого } z \leq x \ K(n,z,y)\uparrow; \\ g(n,x-1,y) & \text{- в противном случае.} \end{cases}$$

Проверка выполнения необходимых требований не представляет труда.

Предложение доказано.

Для конструктивной модели $(\mathfrak{M}_\nu,\nu)$ из класса K^* введем определение локального подкласса:

$$L^*_\nu=\{(\mathfrak{M}_\tau,\tau) \mid (\mathfrak{M}_\tau,\tau)\in K^*,\ \mathfrak{M}_\tau \equiv_1 \mathfrak{M}_\nu\}.$$

Ясно, что две модели из одного локального подкласса локально вложимы друг в друга. Будем обозначать локальную вложимость модели $\mathfrak{N}$ в модель $\mathfrak{M}$ следующим образом: $\mathfrak{N} \xhookrightarrow{\text{л}} \mathfrak{M}$. Тогда очевидна эквивалентность

$$(\mathfrak{N} \equiv_1 \mathfrak{M}) \leftrightarrow (\mathfrak{N} \xhookrightarrow{\text{л}} \mathfrak{M}) \wedge (\mathfrak{M} \xhookrightarrow{\text{л}} \mathfrak{N}).$$

Подкласс $K^*_\nu=\{(\mathfrak{M}_\tau,\tau) \mid (\mathfrak{M}_\tau,\tau)\in K^*, \mathfrak{M}_\tau \xhookrightarrow{\text{л}} \mathfrak{M}_\nu\}$ назовем локальным конусом, определенным моделью $(\mathfrak{M}_\nu,\nu)$. Через $I^\alpha(K^*_0)$ будем обозначать индексное множество подкласса K^*_0 класса K^* в вычислимой индексации α.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $(\mathfrak{M}_\nu,\nu)\in K^*$, $|L^*_\nu| \geq 2$, A — Σ^0_2-множество; α - вычислимая индексация класса K^* такие, что $I^\alpha_\nu \subseteq A \subseteq I^\alpha(K^*_\nu)$. Тогда для любой общерекурсивной функции $f(x)$ существуют вычислимые индексации β,γ класса K^* такие, что $\gamma \underset{\lim,f}{\not\leq} \beta$.

Конструктивные модели $(\mathfrak{M}_{\gamma_n}, \gamma_n), (\mathfrak{M}_{\beta_n}, \beta_n)$ соответствующих индексаций будем строить по шагам. При этом будем использовать метки двух типов: $\langle k \rangle$, $[k]$, а также вспомогательную функцию $h(m,t,l)$. У каждой строящейся нумерации γ_n (или β_m) будет объявляться последователь, который может меняться, но только конечное число раз. Построение конструктивизаций γ_n, β_m будем вести в соответствии с их последователями.

Обозначим через $P(x,y)$ рекурсивный предикат, определяющий множество A в силу следующей эквивалентности:

$$n \notin A \Leftrightarrow \exists x \neg P(x,n).$$

Пусть $(\mathfrak{M}_\mu, \mu) \in L_\nu^*$ и $\mu \not\equiv \nu$.

Построим модели $(\mathfrak{M}_{\gamma_n}, \gamma_n)$, $(\mathfrak{M}_{\beta_m}, \beta_m)$.

Шаг 0. Объявляем нумерацию α_0 последователем конструктивизаций γ_1, β_0, а ν – последователем конструктивизации γ_0. Полагаем $\mathfrak{M}^0_{\gamma_0} = \mathfrak{M}^0_\nu$, $\mathfrak{M}^0_{\beta_0} = \mathfrak{M}^0_{\gamma_1} = \mathfrak{M}^0_{\alpha_0}$, $h(m,0,l) = 0$ для всех $m,l \in \omega$. Переходим к следующему шагу.

Обозначим через d^t_m число строящихся конструктивизаций, отмеченных на шаге t метками с номерами, не большими m.

Шаг $t+1$. (Осуществляется в 6 этапов.)

I. Для каждой пары γ_{2l}, $\beta_{g^t_m(h(m,t,l),2l)}$, отмеченной метками вида $[m]$, проверяем выполнение равенства

$$g^t_m(h(m,t,l)+1,2l) = g^t_m(h(m,t,l),2l),$$

начиная с наименьшего значения m. В случае, когда левая часть равенства не определена, полагаем $h(m,t+1,l) = h(m,t,l)$. В случае выполнения равенства полагаем $h(m,t+1,l) = h(m,t,l)+1$.

Если для всех таких пар выполняется одна из указанных выше возможностей, то переходим к выполнению следующего этапа.

Если же одно из таких равенств не выполняется, хотя входящие в него значения определены, то при наименьшем таком m снимаем метку $[m]$ с нумераций γ_{2l} и $\beta_{g^t_m(h(m,t,l),2l)}$, а также снимаем все метки $[k]$, $\langle k \rangle$, участвующие в построении и имеющие номера $k > m$. На все конструктивизации, свободные от меток и имею -

щие последователя, навешиваем метку $\langle m \rangle$. Переходим к выполнению этапа 2.

2. Если на этапе I значение $h(m,t+1,l)$ не было определено, то полагаем $h(m,t+1,l)=h(m,t,l)$ и переходим к выполнению следующего этапа.

3. Находим наименьшее $m \le t$ такое, что меткой $[m]$ не отмечены строящиеся конструктивизации и для всех $l \le 2d_m^t+1$ значения $g_m^t(h(m,t,l),2l)$ определены. Если такого m нет, то переходим к выполнению следующего этапа.

Если же такое m есть, то находим наименьшее значение $l \le$ $\le 2d_m^t+1$ такое, что нумерации γ_{2l} и $\beta_{g_m^t(h(m,t,l),2l)}$ свободны от меньших меток. На эти нумерации навешиваем метки $[m]$, $\langle m \rangle$. Снимаем со строящихся конструктивизаций все метки, имеющие номер $k > m$. Все нумерации γ_j, β_s , свободные от меток и имеющие последователей, отмечаем меткой $\langle m \rangle$. Переходим к выполнению следующего этапа.

4. Для каждой нумерации β_i , отмеченной меткой $[m]$, начиная с наименьшего значения m , находим последователя α_k . Проверяем истинность предиката $P(t,k)$. Если все такие значения ложны, то переходим к выполнению следующего этапа.

В случае истинного значения предиката $P(t,k)$, проверяем вложимость $\mathfrak{M}_{\beta_i}^t \overset{Л}{\hookrightarrow} \mathfrak{M}_\mu^{t+1}$. При невозможности осуществить такое вложение, переходим к выполнению следующего этапа.

Если есть вложимость $\mathfrak{M}_{\beta_i}^t \overset{Л}{\hookrightarrow} \mathfrak{M}_\mu^{t+1}$, то объявляем μ новым последователем конструктивизации β_i . Нумерацию α_k объявляем последователем конструктивизации β_p , которая еще не имеет последователя и у которой значение p наименьшее возможное. Снимаем со строящихся конструктивизаций все метки номеров $k > m$. Все нумерации γ_j, β_s, которые свободны от меток и имеют последователей, отмечаем меткой $\langle m \rangle$. Переходим к выполнению следующего этапа.

5. Объявляем α_{t+1} последователем нумераций γ_{2s+1} и β_p , которые еще не имеют последователя и у которых значения s и p наименьшие возможные. При наименьшем возможном значении r объявляем ν последователем конструктивной нумерации γ_{2r} , не имеющей последователя. Переходим к выполнению следующего этапа.

6. Для каждой строящейся конструктивной нумерации, имеющей последователя $\alpha_r(\nu)$ и не отмеченной меткой вида $[m]$ или имеющей ложное значение предиката $P(t,r)$, перечислим по одному не-

перечисленному элементу модели $\mathfrak{M}_{\alpha_r}$ ($\mathfrak{M}_\nu$) с наименьшим α_r-номером (ν-номером). Переходим к выполнению следующего шага построения.

Полагаем $\mathfrak{M}_{\gamma_n} = \bigcup_t \mathfrak{M}^t_{\gamma_n}$, $\mathfrak{M}_{\beta_m} = \bigcup_t \mathfrak{M}^t_{\beta_m}$. Построение закончено.

В силу эффективности перечисления элементов модели $\mathfrak{M}_{\gamma_n}$, $\mathfrak{M}_{\beta_m}$ очевидна конструктивность соответствующих нумераций γ_n, β_m. В силу равномерности описанного построения относительно n,m очевидно, что γ и β являются вычислимыми индексациями соответствующих классов конструктивных моделей:

$$K^*_\gamma = \{ (\mathfrak{M}_{\gamma_n}, \gamma_n) \mid n \in \omega\},$$

$$K^*_\beta = \{ (\mathfrak{M}_{\beta_m}, \beta_m) \mid m \in \omega\}.$$

Метка называется стабилизировавшейся на шаге t, если после этого шага она больше не навешивается на строящиеся конструктивизации и не снимается с них.

ЛЕММА I. Все метки стабилизируются.

Заметим, что снятие метки $\langle k\rangle$ может происходить только при навешивании некоторой метки с меньшим номером. Если все такие метки уже стабилизировались, то метка $\langle k\rangle$ может навешиваться на строящиеся нумерации только при выполнении этапов I,4. Но этап 4 без снятия метки $[k]$ может выполниться только один раз. А этап I для меток с номером k после стабилизации всех меньших меток может быть выполнен только конечное число раз, так как в силу предложения IO число смен значений в последовательности $g_m(0,21),\ldots$ $\ldots, g_m(t,21),\ldots$ может быть только конечным, следовательно, метки $[k]$ и $\langle k\rangle$ стабилизируются одновременно.

ЛЕММА 2. У каждой строящейся конструктивизации на некотором шаге построения объявляется последователь, который больше не меняется.

Смена последователя может быть только при выполнении этапа 4. Но при этом новым последователем будет объявляться нумерация μ, и этот последователь больше не меняется.

ЛЕММА 3.

$$K^*_\gamma = K^*_\beta = K^* .$$

Из построения видно, что для любого $k \in \omega$ имеем $\gamma_{2k+1} \underset{a}{\equiv} \alpha_k$ и $\gamma_{2k} \underset{a}{\equiv} \nu$. Поэтому $K^*_\gamma = K^*$.

В силу леммы 2, $K^*_\beta \subseteq K^*$. Произвольная нумерация α_n на шаге $t=n$ будет объявлена последователем некоторой конструктивизации β_s. Каждое "перемещение" последователя сопровождается сменой метки у соответствующей нумерации на меньшую метку. Значит, число "перемещений" последователя может быть только конечным т.е. последователи также стабилизируются. Поэтому $K^* \subseteq K^*_\beta$.

Эта лемма фактически утверждает, что γ и β являются вычислимыми индексациями одного и того же класса K^*.

ЛЕММА 4. $\gamma \underset{\lim, f}{\nleq} \beta$.

Предположим противное, что $\gamma \underset{\lim, f}{\leq} \beta$. Тогда, очевидно, найдется m такое, что функция $g_m(x,y) = g(m,x,y)$ общерекурсивна, осуществляет эту предельную сводимость и мажорируется функцией $f(x)$. Как доказано в лемме I, метки $[m], \langle m \rangle$ стабилизируются. Так как $g_m(x,y)$ общерекурсивна, то метка $[m]$ будет обязательно навешена на некоторые строящиеся конструктивизации. Обозначим через t_0 шаг стабилизации меток $\langle m \rangle$, $[m]$. Рассмотрим конструктивизации $\gamma_{21}, \beta_{g_m(h(m,t_0,1),21)}$, отмеченные на шаге t_0 меткой $[m]$.

После этого шага, как легко понять, значения функции $h(m,t,1)$ последовательно возрастают, однако равенство

$$g_m(h(m,t,1)+1,21) = g_m(h(m,t,1),21),$$

где $t > t_0$, не нарушается. Следовательно,

$$\lim_{t\to\infty} g_m(t,21) = g_m(h(m,t_0,1),21).$$

Пусть α_k является последователем конструктивизации $\beta_{g_m(h(m,t_0,1),21)}$ на шаге t_0. Если $\alpha_k \underset{a}{\equiv} \nu$, то $k \in A$. Следовательно, после некоторого шага $t_1 \geq t_0$ значения предиката $P(t,k)$ будут истинными, и поэтому конечная модель $\mathfrak{M}^{t_1}_{\beta_{g_m(h(m,t_0,1),21)}}$ возрастать не будет до тех пор, пока не сменится последователь. Найдется шаг $t_2 \geq t_1$, на котором будет обнаружена вложимость

$$\mathfrak{M}^{t_1}_{\beta_{g_m(h(m,t_0,1),21)}} = \mathfrak{M}^{t_2}_{\beta_{g_m(h(m,t_0,1),21)}} \hookrightarrow \mathfrak{M}_\mu$$

и последователь конструктивизации $\beta_{g_m(h(m,t_0,1),21)}$

заменится на μ. Этот новый последователь на дальнейших шагах уже не меняется, т.е. в результате построения получим

$$\beta_{g_m(h(m,t_0,i),2i)} \underset{a}{\equiv} \mu \underset{a}{\not\equiv} \nu .$$

Это противоречит предположению, что функция $g_m(x,y)$ задает предельную сводимость $\gamma \underset{\lim,f}{\leq} \beta$. Лемма доказана.

В силу лемм 3,4 заключаем, что β,γ являются искомыми индексациями класса K^*. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Модификацией доказательства теоремы можно установить существование у класса K^* счетного вычислимого семейства вычислимых индексаций, которые попарно несравнимы по ограниченной сводимости $\underset{\lim,f}{\leq}$.

Аналогично доказывается

ТЕОРЕМА 3. Пусть α - вычислимая индексация класса K^* конструктивных моделей, $(\mathfrak{M}_\nu,\nu)\in K^*$, $(\mathfrak{M}_\mu,\mu)\in K^*$, $\nu \underset{a}{\not\equiv} \mu$, $\mathfrak{M}_\mu \equiv_1 \mathfrak{M}_\nu$ и существует Δ^0_2 -множество A такое, что $I^\alpha_\nu \subseteq A$, $I^\alpha_\mu \subseteq \overline{A}$. Тогда для каждой общерекурсивной функции $f(x)$ существует счетное вычислимое семейство вычислимых индексаций $\{\gamma^i \mid i\in\omega\}$ таких, что при $i\neq j$ выполняется соотношение $\gamma^i \underset{\lim,f}{\not\leq} \gamma^j$.

В заключение сформулируем два нерешенных вопроса.

I. Существуют ли общерекурсивная функция $f(x)$ и класс K^* конструктивных моделей такие, что у класса K^* имеются неэквивалентные вычислимые индексации, однако любые две его вычислимые индексации α,β удовлетворяют условию $\alpha \underset{\lim,f}{\equiv} \beta$?

2. По о.р.ф. $f(x)$ найти необходимые и достаточные условия существования у класса K^* вычислимых индексаций γ,β таких, что $\gamma \underset{\lim,f}{\leq} \beta$.

Литература

I. ЕРШОВ Ю.Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. - М.: Наука, 1980.

2. РОДЖЕРС Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. - М.: Мир, 1972.

3. ДОБРИЦА В.П. Структурные свойства вычислимых классов конструктивных моделей //Алгебра логика. - 1987. - Т.26, №1.

4. ГОНЧАРОВ С.С. Предельно эквивалентные конструктивизации //Тр.Ин-та математики АН СССР. Сиб. отд-ние. - 1982. - Т.2: Мат. логика и теория алгоритмов.

Поступила в ред.-изд.отд.
30 марта 1987 года