АППРОКСИМАЦИЯ СПЛАЙНАМИ
(Вычислительные системы)
1987 год Выпуск I2I

УДК 519.652

ИЗОГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ РАЦИОНАЛЬНЫМИ СПЛАЙНАМИ

Б.И.Квасов, С.А.Яценко

Одним из наиболее распространенных способов приближения сеточных функций является метод интерполяции кубическими сплайнами класса C^2. Достаточные для многих приложений свойства гладкости таких сплайнов сочетаются с простотой их реализации на ЭВМ и высокой точностью получаемых результатов. Однако в ряде случаев поведение кубических сплайнов не согласуется с качественными характеристиками исходных данных. Визуально это проявляется в присутствии выбросов, осцилляций, различных отклонений, не характерных для исходного набора точек, а математически может быть выражено как немонотонность и наличие точек перегиба на участках монотонности и выпуклости исходных данных.

Попытки улучшить геометрические характеристики кубических сплайнов предпринимались давно. С этой целью были введены различные обобщения кубических сплайнов. Одной из первых работ здесь, по-видимому, является статья [I] по кубическим сплайнам с натяжением. Следует отметить также работы [2-4]. Авторы всех этих работ вводили в структуру сплайна те или иные параметры с тем, чтобы управлять качественным поведением получаемой кривой. Однако они не давали никаких процедур автоматического выбора указанных параметров, ограничиваясь рекомендациями об их выборе в режиме диалога. Естественно, это было связано с недостаточной формализованностью понятия геометрических характеристик поведения кубического сплайна и трудностями в разработке алгоритмов автоматического выбора параметров сплайна.

По-видимому, впервые задача построения сплайнов с заданными геометрическими характеристиками была формализована в работах

А.И.Гребенникова [5,6], где она получила название задачи изогеометрической аппроксимации. Основываясь на методе локальной аппроксимации B-сплайнами, автор этой работы, в частности, показал, что на достаточно детальной сетке узлов кубический сплайн сохраняет геометрические свойства исходных данных.

Авторы работы [7] дали эффективное частичное решение задачи изогеометрической интерполяции с помощью эрмитова кубического сплайна. Разработанный ими алгоритм являлся локальным и давал монотонную кривую класса C^1. Он, однако, не сохранял выпуклость исходных данных. Относительно недавно этот алгоритм был улучшен в [8]. В дальнейшем рядом авторов [9-11] задача изогеометрической интерполяции решалась также с использованием параболических сплайнов. Та же задача решалась с помощью специальных рациональных сплайнов в [12-14].

Определенным прогрессом на пути решения задачи изогеометрической интерполяции с помощью сплайнов класса C^2 явилось изобретение кубических сплайнов с дополнительными узлами переменного порядка [15], включающих как частный случай кусочно-линейную интерполяцию. На основе исследования определяющей системы уравнений для обобщенного кубического сплайна класса C^2 в [16] получены достаточные условия, гарантирующие сохранение сплайном свойств монотонности и выпуклости исходных данных. Это позволяет автоматизировать процесс выбора параметров обобщенных кубических сплайнов, в частности, рациональных сплайнов и сплайнов с дополнительными узлами. К сожалению, указанный алгоритм работает фактически только на участках монотонности и/или выпуклости данных, не охватывая случай произвольных данных.

В данной работе предлагается определение функций с изогеометрией, отличное от использовавшегося в [6]. Выяснены необходимые и достаточные условия существования функций с изогеометрией. На основе кубических рациональных сплайнов с дополнительными узлами класса C^2 разработан алгоритм решения задачи изогеометрической интерполяции для произвольного набора данных. Как исходный этап он содержит построение стандартного интерполяционного кубического сплайна, хотя могут быть использованы и другие способы задания начального приближения. Эффективность предлагаемого метода иллюстрируется рядом примеров.

§1. Класс функций с изогеометрией

Пусть на плоскости R^2 фиксирована последовательность точек $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 0,1,\ldots,N$, у которых совокупность абсцисс x_i задает на отрезке $[a,b]$ разбиение $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$. Полагая $h_i = x_{i+1} - x_i$, введем обозначения для первых двух разделенных разностей $\Delta_i = (y_{i+1} - y_i)/h_i$, $i = 0,1,\ldots,N-1$; $\delta_i = (\Delta_i - \Delta_{i-1})/(h_{i-1} + h_i)$, $i = 1,2,\ldots,N-1$. Через $C^2[a,b]$ обозначим класс дважды непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций. Как обычно, будем говорить, что исходные данные монотонно возрастают (убывают) на подотрезке $[x_n, x_k]$, $k > n$, если $\Delta_i > 0$ ($\Delta_i < 0$) для $i = n,\ldots,k-1$, и выпуклы вниз (вверх) на $[x_n, x_k]$, $k > n+1$, если $\delta_i > 0$ ($\delta_i < 0$), $i = n,\ldots,k-2$.

Задачей изогеометрической интерполяции будем называть задачу об отыскании функции $S(x)$ нужной гладкости такой, что $S(x_i) = y_i$, $i = 0,1,\ldots,N$, и $S(x)$ сохраняет форму исходных данных. Последнее означает, что там, где данные монотонно возрастают или убывают, $S(x)$ должна вести себя таким же образом. Аналогично на участках выпуклости (вогнутости) исходных данных $S(x)$ также должна быть выпуклой (вогнутой).

Очевидно, что решение задачи изогеометрической интерполяции не единственно. Формализуем поэтому класс функций, где мы будем искать решение.

Пусть задан набор точек $V = \{ P_i \mid i = 0,1,\ldots,N \}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество функций $I(V)$ называется классом функций с изогеометрией, если для любой $f(x) \in I(V)$ выполнены условия:

1) $f(x) \in C^2[a,b]$;

2) $f(x_i) = y_i$, $i = 0,1,\ldots,N$;

3) $f'(x)\Delta_i \geq 0$ при $\Delta_i \neq 0$ и $f'(x) = 0$ при $\Delta_i = 0$ для всех $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,1,\ldots,N-1$;

4) $f''(x_i)\delta_i \geq 0$, $i = 1,2,\ldots,N-1$; $f''(x)\delta_j \geq 0$, $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $j = i, i+1$, при $\delta_i\delta_{i+1} \geq 0$; $f(x)$ имеет не более одной точки перегиба $\bar{x}$ на интервале (x_i, x_{i+1}) при $\delta_i\delta_{i+1} < 0$, причем $f''(x)\delta_i \geq 0$ для $x \in [x_i, \bar{x}]$, а количество точек перегиба на интервале (x_{i-1}, x_{i+1}) не превосходит числа перемен знака в последовательности $\delta_{i-1}, \delta_i, \delta_{i+1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. При подсчете числа перемен знака в последовательности $\delta_{i-1}, \delta_i, \delta_{i+1}$ нули пропускаются.

Сформулированное определение позволяет выделить класс интерполянтов, сохраняющих геометрические свойства исходных данных V. Оно отличается от подхода [6], где для функций, имеющих определенную геометрическую структуру, строятся аппроксимации с теми же геометрическими свойствами.

Отметим, что перечисленным выше требованиям, исключая принадлежность классу $C^2[a,b]$, удовлетворяет кусочно-линейная интерполяция исходных данных V.

Выясним необходимые и достаточные условия существования функций с изогеометрией. С этой целью получим ограничения на набор исходных данных V, гарантирующих непустоту класса функций с изогеометрией. Предварительно докажем несколько вспомогательных утверждений, характеризующих свойства функций с изогеометрией.

ЛЕММА I. *При $\Delta_{i-1}\Delta_i \le 0$ для изогеометрии функции $f(x)$ необходимо, чтобы $f'(x_i) = 0$.*

Утверждение леммы очевидно в силу условия 3 из определения класса функций с изогеометрией.

ЛЕММА 2. *При $\delta_i = 0$ и $\delta_{i-1}\delta_{i+1} \ge 0$ единственной функцией с изогеометрией на отрезке $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ является прямая, проходящая через точки P_{i-1}, P_i, P_{i+1}.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства $\delta_i = 0$ следует, что точки P_{i-1}, P_i, P_{i+1} лежат на прямой $y(x) = y_i + \Delta_i(x - x_i)$. Далее, в силу условия 4 из определения функций с изогеометрией, $f(x)$ на отрезке $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ не имеет точек перегиба, т.е. $f''(x) \ge 0$, $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ или $f''(x) \le 0$, $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$. Очевидно, функция $u(x) = f(x) - y(x)$ является решением краевой задачи: $u''(x) = f''(x)$, $u(x_{i-1}) = u(x_{i+1})$. Имеем

$$u(x) = \frac{1}{x_{i+1} - x_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} G(x,v) f''(v)\,dv ,$$

где $G(x,v) = (v - x_{i-1})(x - x_{i+1})$ при $v \le x$, $G(x,v) = (v - x_{i+1})(x - x_{i-1})$ при $v \ge x$. Следовательно, если $f''(x)$ знакопостоянна на $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ и $f''(x) \not\equiv 0$, то $u(x_i) \ne 0$, что противоречит условию интерполяции $f(x_i) = y_i$. Таким образом, $f''(x) \equiv 0$, и, значит, $f(x)$ совпадает с $y(x)$, что и требовалось показать.

Из доказанной леммы непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ I. При $\delta_i = \delta_{i+1} = 0$ единственной функцией с изогеометрией на отрезке $[x_{i-1}, x_{i+2}]$ является прямая, проходящая через точки P_j, $j = i-1, i, i+1, i+2$.

ЛЕММА 3. При $\delta_i = 0$ и $\delta_{i-1}\delta_{i+1} < 0$ для того, чтобы $f(x) \in I(V)$, необходимо выполнение одного из условий:

1) $f'(x_i)\delta_{i-1} > \Delta_i \delta_{i-1}$, $f''(x_i) = 0$;

2) $f'(x) = \Delta_i$, $f''(x) = 0$ для всех $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно условию леммы последовательность δ_j, $j = i-1, i, i+1$, содержит одну перемену знака, что вместе с условием $\delta_i \delta_j = 0$, $j = i-1, i+1$, и свойством 4 определения класса $I(V)$ приводит к единственной возможной точке перегиба x_i, т.е. $f''(x_i) = 0$.

Предположим, что $f'(x_i)\delta_{i-1} < \Delta_i \delta_{i-1}$, и пусть для определенности $\delta_{i-1} > 0$. Тогда согласно условию 4 определения класса $I(V)$ имеем $f''(x) \geq 0$ для $x \in [x_{i-1}, x_i]$, что противоречит неравенству $f'(x_i) < \Delta_i$. Если теперь рассмотреть случай $f'(x_i) = \Delta_i$, то очевидно, что на отрезке $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ функция $f(x)$ линейна. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть $\delta_i \neq 0$ и $f''(x_i)f''(x) \geq 0$ при всех $x \in [z_1, z_2]$, $z_1, z_2 \in [x_i, x_{i+1}]$. Тогда для того, чтобы $f(x) \in I(V)$, необходимо выполнение одного из условий:

1) $f'(z_1) < \Delta_z < f'(z_2)$ для $\delta_i > 0$,

2) $f'(z_1) > \Delta_z > f'(z_2)$ для $\delta_i < 0$,

3) $f'(x) = \Delta_z$, $f''(z) = 0$ для всех $x \in [z_1, z_2]$,

где $\Delta_z = [f(z_2) - f(z_1)]/(z_2 - z_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно свойству 4 из определения класса $I(V)$ имеем $f''(x_i)\delta_i \geq 0$. Следовательно, $f''(x)\delta_i \geq 0$ для всех $x \in [z_1, z_2]$, $z_1, z_2 \in [x_i, x_{i+1}]$. Пусть $\delta_i > 0$. Тогда на подотрезке $[z_1, z_2]$ функция $f(x)$ выпукла вниз, т.е. $f''(x) \geq 0$. Если при этом $f''(x) \not\equiv 0$, то получаем условие I леммы; если же $f''(x) \equiv 0$, то приходим к равенствам 3 леммы. Аналогичным образом из условия $\delta_i < 0$ приходим либо к условию 2, либо 3 леммы.

Из леммы 4 непосредственно вытекают

СЛЕДСТВИЕ 2. При $\delta_i\delta_{i+1} > 0$ и $f'(x_j) \neq \Delta_i, j = i, i+1$, для того, чтобы $f(x) \in I(V)$, необходимо выполнение условий

$$f'(x_i)\delta_i < \Delta_i\delta_i < f'(x_{i+1})\delta_i .$$

СЛЕДСТВИЕ 3. При $\delta_{i-1}\delta_i > 0$ и $\delta_i\delta_{i+1} > 0$ для изогеометрии $f(x)$ необходимо выполнение неравенств

$$\min(\Delta_{i-1}, \Delta_i) \leq f'(x_i) \leq \max(\Delta_{i-1}, \Delta_i) .$$

ЛЕММА 5. При $f'(x_i) = 0$ для изогеометрии $f(x)$ необходимо выполнение условий $f''(x_i)\Delta_i \geq 0$, $f''(x_i)\Delta_{i-1} \leq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. $f'(x_i) = 0$, но $f''(x_i)\Delta_i < 0$. Тогда в силу непрерывности $f'(x)$ найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $f'(x)\Delta_i < 0$ для $x \in (x_i, x_i + \varepsilon)$. Однако это противоречит условию 3 из определения класса $I(V)$, и, таким образом, $f''(x_i)\Delta_i \geq 0$. Аналогично выводится условие $f''(x_i)\Delta_{i-1} \leq 0$.

ТЕОРЕМА. Для существования функции с изогеометрией необходимо и достаточно, чтобы не выполнялись условия:

I) $\Delta_{i-1}\Delta_i \leq 0$; $\Delta_{i-1} \neq 0$, $\delta_{i-2}\delta_i \geq 0$, $\delta_{i-1} = 0$, $i = 3, \ldots, N-1$;

2) $\Delta_{i-1}\Delta_i \leq 0$; $\Delta_i \neq 0$, $\delta_i\delta_{i+2} \geq 0$, $\delta_{i+1} = 0$, $i = 1, \ldots, N-3$;

3) $\delta_i \neq 0$, $\delta_{i-1} = \varepsilon_{i+1} = 0$, $\delta_i\delta_k \geq 0$, $k = i-2, i+2$; $i = 3, \ldots, N-3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $f(x) \in I(V)$ и выполнены условия I–3 теоремы. Из первого условия по лемме I имеем $f'(x_i) = 0$. По лемме 2 (следствию I) функция $f(x)$ должна быть линейной на отрезке $[x_{i-2}, x_i]$ (аналогично, в случае второго условия функция $f(x)$ будет линейной на $[x_i, x_{i+2}]$). Так как по первому условию $\Delta_{i-1} \neq 0$ (по второму – $\Delta_i \neq 0$), то в точке x_i производная $f'(x)$ разрывна и, следовательно, функция $f(x) \notin I(V)$. Выполнение третьего условия влечет стыковку в узле x_i двух прямых с различными наклонами, и, следовательно, опять получаем противоречие с предположением.

Доказательство достаточности состоит в построении функции с изогеометрией $f(x)$ по любым исходным данным, для которых не выполнены условия I–3 теоремы. В случае, когда исходные точки лежат на одной прямой, т.е. $\Delta_0 = \Delta_1 = \ldots = \Delta_{N-1}$, очевидно, что единственной функцией с изогеометрией будет эта прямая.

Предположим, что не все точки P_i, $i = 0,1,\ldots,N$, лежат на одной прямой, и рассмотрим всевозможные отрезки $[x_{m_1}, x_{m_2}]$, $0 \le m_1 < m_2 \le N$, где $x_{m_1}, x_{m_2} \in \Delta$, для которых выполнено одно из следующих соотношений:

I) $m_2 = m_1 + 1$, $\Delta_{m_1} = 0$;

2) $m_2 = m_1 + 2$, $m_1 \ge 1$, $m_2 \le N-1$, $\delta_{m_1+1} = 0$, $\delta_{m_1}\delta_{m_2} \ge 0$;

3) $m_2 = m_1 + 3$, $m_1 \le N-3$, $m_2 \ge 3$, $\delta_{m_1+1} = \delta_{m_1+2} = 0$.

Нетрудно убедиться, что функция с изогеометрией $f(x)$ на таких отрезках линейна, т.е. $f(x) = y_{m_1} + \Delta_{m_1}(x - x_{m_1})$, $x \in [x_{m_1}, x_{m_2}]$. В частности, $f'_k = \Delta_{m_1}$, $f''_k = 0$, $k = m_1, m_2$, и по условиям теоремы имеют место неравенства:

$$f'_{m_1}\Delta_{m_1-1} \ge 0 \text{ при } m_1 \ge 1,$$

$$f'_{m_2}\Delta_{m_2} \ge 0 \text{ при } m_2 \le N-1$$

(здесь и в дальнейшем используются обозначения $f'_j = f'(x_j)$, $f''_j = f''(x_j)$, $f^{(r)}_j = f^{(r)}(x_j)$).

Для любых двух отрезков $[x_{m_1}, x_{m_2}]$ и $[x_{m_3}, x_{m_4}]$, на которых функция $f(x)$ оказалась линейной, возможен один из двух случаев:

$$[x_{m_1}, x_{m_2}] \cap [x_{m_3}, x_{m_4}] = \emptyset,$$

$$[x_{m_1}, x_{m_2}] \cap [x_{m_3}, x_{m_4}] \ne \emptyset.$$

В последнем случае в силу условий теоремы $\Delta_{m_1} = \Delta_{m_3}$, т.е. $f(x)$ линейна на $[x_{m_1}, x_{m_4}]$.

Таким образом, нами выделены участки линейности $f(x)$. В тех узлах x_i сетки Δ, где $\Delta_{i-1}\Delta_i < 0$, положим $f'_i = 0$. Это не будет противоречить сказанному выше, так как по условиям теоремы на участках линейности таких узлов не возникает.

Определим теперь допустимые значения $f^{(r)}_i$, $r = 1,2$, в тех узлах сетки Δ, где они не были заданы ранее. Выбор этих значений подчиним следующим ограничениям:

$$\min(\Delta_{i-1},\Delta_i) < f'_i < \max(\Delta_{i-1},\Delta_i) \quad \text{и} \quad \delta_i f''_i \ge 0 \quad \text{при} \quad \delta_i \ne 0, \quad 1 \le i \le N-1; \tag{1}$$

$$(f'_i - \Delta_i)\delta_{i-1} > 0,\ f'_i\Delta_i \ge 0,\ f''_i = 0 \quad \text{при} \quad \delta_i = 0,\ \delta_{i-1}\delta_{i+1} < 0, \quad 2 \le i \le N-2; \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} &(f'_1-\Delta_1)\delta_2 < 0,\ f'_1\Delta_1 \ge 0,\ f''_1 = 0 \quad \text{при} \quad \delta_1 = 0,\\ &(f'_{N-1}-\Delta_{N-1})\delta_{N-2} > 0,\ f'_{N-1}\Delta_{N-1} \ge 0,\ f''_{N-1} = 0 \quad \text{при} \quad \delta_{N-1} = 0; \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} &(\Delta_0 - f'_0)\delta_1 > 0,\ f'_0\Delta_0 \ge 0\ (\Delta_0 \ne 0),\ f''_0\delta_1 \ge 0 \quad \text{при} \quad \delta_1 \ne 0,\\ &(\Delta_0 - f'_0)\delta_2 < 0,\ f'_0\Delta_0 \ge 0\ (\Delta_0 \ne 0),\ f''_0\delta_2 \le 0 \quad \text{при} \quad \delta_1 = 0, \delta_2 \ne 0; \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} &(f'_N-\Delta_{N-1})\delta_{N-1} > 0,\ f'_N\Delta_{N-1} \ge 0\ (\Delta_{N-1} \ne 0),\ f''_N\delta_{N-1} \ge 0\\ &\qquad\qquad \text{при} \quad \delta_{N-1} \ne 0,\\ &(f'_N-\Delta_{N-1})\delta_{N-2} < 0,\ f'_N\Delta_{N-1} \ge 0\ (\Delta_{N-1} \ne 0),\ f''_N\delta_{N-2} \le 0\\ &\qquad\qquad \text{при} \quad \delta_{N-1} = 0,\ \delta_{N-2} \ne 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Нетрудно убедиться, что выполнение этих ограничений согласуется с необходимыми условиями лемм 3,4 и следствий 2,3.

В результате для окончания построения функции с изогеометрией $f(x)$ достаточно, исключив из рассмотрения участки линейности $f(x)$, определить $f(x)$ на произвольном подотрезке $[x_i, x_{i+1}]$ для следующих возможных конфигураций исходных данных:

А) $\delta_i\delta_{i+1} > 0,\ 0 \le i \le N-1$;

Б) $\delta_i = 0,\ \delta_{i-1}\delta_{i+1} < 0,\ 1 \le i \le N-1$;

В) $\delta_i\delta_{i+1} < 0,\ 1 \le i \le N-2$

(при $i = 0, N$ формально полагаем $\delta_i = f''_i$).

Случай А. В силу ограничений (I)-(5) имеют место неравенства:

$$\min(f'_i, f'_{i+1}) < \Delta_i < \max(f'_i, f'_{i+1}),\quad \Delta_i f'_j \ge 0,\ j = i, i+1; \tag{6}$$

$$f''_j / (f'_{i+1} - f'_i) \ge 0,\quad j = i, i+1. \tag{7}$$

Кроме того, в соответствии с определением функций с изогеометрией должны выполняться соотношения

$$f''(x)f''(x_j) \ge 0,\ j = i, i+1;\quad x \in [x_i, x_{i+1}]. \tag{8}$$

Следовательно, в данном случае задача построения функции с изогеометрией сводится к решению на $[x_i, x_{i+1}]$ задачи эрмитовой интерполяции по заданным значениям $f_j^{(r)}$, $r=0,1,2$; $j=i,i+1$, с дополнительными ограничениями (6)-(8).

В случае Б легко проверить, что на каждом из двух рассматриваемых здесь отрезков $[x_{i-1},x_i]$, $[x_i,x_{i+1}]$ в силу ограничений (I)-(5) условия (6), (7) выполнены и мы приходим к той же задаче эрмитовой интерполяции с ограничениями (6)-(8).

Введением на прямой, соединяющей точки P_i, P_{i+1}, дополнительной точки перегиба, расширяющей сетку Δ, случай В сводится к случаю Б.

Может быть указано достаточно много способов решения сформулированной выше задачи эрмитовой интерполяции с ограничениями (6)-(8). Один из эффективных методов излагается в следующем параграфе, что и позволит закончить доказательство теоремы.

§2. Решение задачи эрмитовой интерполяции с ограничениями

Вопрос о локальном построении функции с изогеометрией будем решать с помощью рациональных сплайнов [2,18].

На отрезке $[x_i,x_{i+1}]$ рассмотрим функцию

$$S(x) = \begin{cases} S(x,x_i,x_{i1}) & \text{при} \quad x\in[x_i,x_{i1}]; \\ S(x,x_{i1},x_{i+1}) & \text{при} \quad x\in[x_{i1},x_{i+1}], \end{cases}$$

где
$$S(x,x_j,x_{j+1}) = A_j t + B_j(1-t) + \frac{C_j t^3}{1+p_j(1-t)} + \frac{D_j(1-t)^3}{1+q_j t};$$

$t=(x-x_j)/(x_{j+1}-x_j)$; p_j, q_j – заданные числа, $0\le p_j,\ q_j<\infty$, и $S^{(r)}(x_{i1}-0)=S^{(r)}(x_{i1}+0)$, $r=0,1,2$. Потребуем, чтобы рациональный сплайн $S(x)$ удовлетворял условиям интерполяции $S^{(r)}(x_j)=f_j^{(r)}$, $r=0,1,2$; $j=i,i+1$.

В соответствии с неравенствами (6), (7) будем считать, что $S_i'\cdot S_{i+1}'\ge 0$ и

$$\min(S_i',S_{i+1}')<\Delta_i<\max(S_i',S_{i+1}'), \tag{9}$$

$$S_j''/(S_{i+1}'-S_i')\ge 0,\ j=i,i+1. \tag{10}$$

Функция $S(x)$ с учетом параметра x_{i1}, определяющего положение точки склейки сплайна, имеет I3 параметров. Требование интерполяции в x_i, x_{i+1} и условия непрерывности сплайна и его первых двух производных в узле x_{i1} приводят к системе из 9 уравнений. Остающиеся свободными параметры используем для удовлетворения условий изогеометрии, упрощения расчетных формул и минимизации погрешности приближения.

Следуя [18], запишем выражение для $S(x,x_j,x_{j+1})$ в виде:

$$S(x,x_j,x_{j+1}) = S_j(1-t) + S_{j+1}t + C_j\left[\frac{t^3}{1+p_j(1-t)} - t\right] +$$

$$+ D_j\left[\frac{(1-t)^3}{1+q_jt} - (1-t)\right],$$

где

$$C_j = \frac{-(3+q_j)(S_{j+1}-S_j)+(x_{j+1}-x_j)[S'_j+(2+q_j)S'_{j+1}]}{(2+p_j)(2+q_j)-1},$$

$$D_j = \frac{(3+p_j)(S_{j+1}-S_j)-(x_{j+1}-x_j)[S'_{j+1}+(2+p_j)S'_{j+1}]}{(2+p_j)(2+q_j)-1}. \tag{11}$$

Имеем

$$S''(x,x_j,x_{j+1}) = C_j\frac{2p_j^2t^3-6p_j(1+p_j)t^2+6(1+p_j)^2t}{[1+p_j(1-t)]^3(x_{j+1}-x_j)^2} +$$

$$+ D_j\frac{2q_j^2(1-t)^3-6q_j(1+q_j)(1-t)^2+6(1+q_j)^2(1-t)}{(1+q_jt)^3(x_{j+1}-x_j)^2} \tag{12}$$

и, в частности,

$$S''(x_{i1}+0)=\frac{2D_{i1}}{(x_{i+1}-x_{i1})^2}(3+3q_{i1}+q_{i1}^2),\; S''(x_{i1}-0)=\frac{2C_i}{(x_{i1}-x_i)^2}(3+3p_i+p_i^2). \tag{13}$$

Обозначим

$$h_{i1}= x_{i1}-x_i,\; h_i= x_{i+1}-x_i,\; \mu_{i1}= 1-\lambda_{i1}= h_{i1}/h_i,\; \tau_i=\frac{S'_{i+1}-\Delta_i}{S'_{i+1}-S'_i},$$

$$\alpha_i=\frac{S_{i1}-f_i}{h_{i1}},\quad \beta_i=\frac{f_{i+1}-S_{i1}}{h_i-h_{i1}},\quad \sigma_j=\frac{h_iS''_j}{2(S'_{i+1}-S'_i)},\quad j=i,i+1.$$

В соответствии с неравенством (9) имеем

$$\Delta_i = \tau_i S'_i + (1-\tau_i)S'_{i+1}, \quad 0<\tau_i<1 . \qquad (14)$$

Соотношения (II), (I2) дают

$$\alpha_i = \frac{S'_{i1}+(2+p_i)S'_i}{3+p_i} + \frac{h_{i1}[(2+p_i)(2+q_i)-1]}{2(3+p_i)(3+3q_i+q_i^2)} S''_i ,$$

$$\beta_i = \frac{S'_{i1}+(2+q_{i1})S'_{i+1}}{3+q_{i1}} - \frac{(h_i-h_{i1})[(2+p_{i1})(2+q_{i1})-1]}{2(3+q_{i1})(3+3p_{i1}+p_{i1}^2)} S''_{i+1} . \qquad (15)$$

В силу непрерывности второй производной сплайна в узле x_{i1} из (II), (I3) имеем

$$S'_{i1}=\left[\frac{3+3p_i+p_i^2}{3+p_i}\lambda_{i1}S'_i + \frac{3+3q_{i1}+q_{i1}^2}{3+q_{i1}}\mu_{i1}S'_{i+1} + \right.$$

$$\left. + \frac{h_{i1}(3+q_i)(3+3p_i+p_i^2)}{2(3+p_i)(3+3q_i+q_i^2)}\lambda_{i1}S''_i - \frac{(h_i-h_{i1})(3+p_{i1})(3+3q_{i1}+q_{i1}^2)}{2(3+q_{i1})(3+3p_{i1}+p_{i1}^2)}\mu_{i1}S''_{i+1}\right]\times$$

$$\times\left(\frac{3+3p_i+p_i^2}{3+p_i}\lambda_{i1} + \frac{3+3q_{i1}+q_{i1}^2}{3+q_{i1}}\mu_{i1}\right)^{-1} . \qquad (16)$$

Условие непрерывности $S(x)$ в узле x_{i1} $S(x_{i1}-0)=S(x_{i1}+0)$ запишем в виде $f_i+\alpha_i h_{i1} = f_{i+1}-\beta_i(h_i-h_{i1})$ или $(\Delta_i-\alpha_i)\mu_{i1} = (\beta_i-\Delta_i)\lambda_{i1}$.

Подставляя сюда выражения для α_i, β_i из (I5) и учитывая (I6), получим кубическое уравнение относительно μ_{i1}

$$\bar{A}_i\mu_{i1}^3 + \bar{B}_i\mu_{i1}^2 + \bar{C}_i\mu_{i1} + \bar{D}_i = 0 ,$$

где

$$\bar{A}_i = \left(\frac{3+3q_{i1}+q_{i1}^2}{3+q_{i1}} - \frac{3+3p_i+p_i^2}{3+p_i}\right)\left[\bar{\sigma}_{i+1}\frac{(2+p_{i1})(2+q_{i1})-1}{3+3p_{i1}+p_{i1}^2} - \right.$$

$$\left. - \bar{\sigma}_i\frac{(2+p_i)(2+q_i)-1}{3+3q_i+q_i^2}\right] + \left(\frac{1}{3+p_i} - \frac{1}{3+q_{i1}}\right)\left[\bar{\sigma}_i\frac{(3+q_i)(3+3p_i+p_i^2)}{3+3q_i+q_i^2} - \right.$$

$$- \bar{\sigma}_{i+1} \frac{(3+p_{i-1})(3+3q_i+q_i^2)}{3+3p_{i-1}+p_{i-1}^2}\Bigg] ,$$

$$\bar{B}_i = \sigma_i \frac{(3+3p_i+p_i^2)[2-(2+q_i)(1+q_{i-1})]}{(3+q_{i-1})(3+3q_i+q_i^2)} + \bar{\sigma}_{i+1}\Bigg[\frac{(3+p_{i-1})(3+q_{i-1}+q_{i-1}^2)}{(3+p_i)(3+3p_{i-1}+p_{i-1}^2)} +$$

$$+ \frac{3(3+3p_i+p_i^2)[(2+p_{i-1})(2+q_{i-1})-1]}{(3+p_i)(3+3p_{i-1}+p_{i-1}^2)} - \frac{2(2+p_{i-1})(3+3q_{i-1}+q_{i-1}^2)}{3+3p_{i-1}+p_{i-1}^2}\Bigg] +$$

$$+ \frac{3+3q_{i-1}+q_{i-1}^2}{3+q_{i-1}} - \frac{3+3p_i+p_i^2}{3+p_i} + \frac{3p_i+p_i^2-3q_{i-1}-q_{i-1}^2}{(3+p_i)(3+q_{i-1})} ,$$

$$\bar{C}_i = \frac{(1+q_{i-1})(3+3p_i+p_i^2)}{(3+p_i)(3+q_{i-1})} - \tau_i\left(\frac{3+3q_{i-1}+q_{i-1}^2}{3+q_{i-1}} - \frac{3+3p_i+p_i^2}{3+p_i}\right) -$$

$$- \bar{\sigma}_i \frac{(3+3p_i+p_i^2)(3+q_i)}{(3+3q_i+q_i^2)(3+q_{i-1})} - 3\bar{\sigma}_{i+1} \frac{(3+3p_i+p_i^2)[(2+p_{i-1})(2+q_{i-1})-1]}{(3+p_i)(3+3p_{i-1}+p_{i-1}^2)} +$$

$$+ \bar{\sigma}_{i+1} \frac{(2+p_{i-1})(3+3q_{i-1}+q_{i-1}^2)}{3+3p_{i-1}+p_{i-1}^2} ,$$

$$\bar{D}_i = \left[-\tau_i + \frac{1}{3+q_{i-1}} + \bar{\sigma}_{i+1} \frac{(2+p_{i-1})(2+q_{i-1})-1}{3+3p_{i-1}+p_{i-1}^2}\right] \cdot \frac{3+3p_i+p_i^2}{3+p_i} ,$$

$$\bar{\sigma}_i = \sigma_i/(3+p_i), \quad \bar{\sigma}_{i+1} = \sigma_{i+1}/(3+q_{i-1}) .$$

Нетрудно видеть, что при $p_i = q_{i-1}$ степень уравнения понижается до второй и оно принимает вид

$$\Phi(\mu_{i-1}) = \left[\frac{(2+p_{i-1})(1+p_i)-2}{3+3p_{i-1}+p_{i-1}^2}\,\sigma_{i+1} - \frac{(2+q_i)(1+p_i)-2}{3+3q_i+q_i^2}\,\sigma_i\right] \frac{1}{3+p_i}\mu_{i-1}^2 +$$

$$+\left[\frac{1+p_i}{3+p_i}-\frac{3+q_i}{(3+p_i)(3+3q_i+q_i^2)}\sigma_i+\frac{3-(2+p_{i1})(3+2p_{i1})}{(3+p_i)(3+3p_{i1}+p_{i1}^2)}\sigma_{i+1}\right]\mu_{i1}-$$

$$-\tau_i+\frac{1}{3+p_i}+\frac{(2+p_{i1})(2+p_i)-1}{(3+p_i)(3+3p_{i1}+p_{i1}^2)}\sigma_{i+1}=0. \qquad (17)$$

Поскольку

$$\Phi(0)=-\tau_i+\frac{1}{3+p_i}+\frac{(2+p_{i1})(2+p_i)-1}{(3+p_i)(3+3p_{i1}+p_{i1}^2)}\sigma_{i+1},$$

$$\Phi(1)=1-\tau_i-\frac{1}{3+p_i}-\frac{(2+q_i)(2+p_i)-1}{(3+p_i)(3+3q_i+q_i^2)}\sigma_i, \qquad (18)$$

то найдутся такие $\bar{p}_i$, $\bar{p}_{i1}$, $\bar{q}_i$, что при всех $p_i \geq \bar{p}_i$, $p_{i1} \geq \bar{p}_{i1}$, $q_i \geq \bar{q}_i$ будем иметь $\Phi(0)<0$, $\Phi(1)>0$, и, следовательно, уравнение (I7) имеет корень $\mu_{i1}\in(0,1)$.

Рассмотрим вопрос о выборе оставшихся свободными параметров p_i, q_i, p_{i1} из соображений удовлетворения условиям изогеометрии и повышения порядка приближения.

Учитывая равенство $p_i = q_{i1}$, перепишем (I6) в виде

$$S'_{i1}=S'_i+\mu_{i1}(S'_{i+1}-S'_i)+\mu_{i1}\lambda_{i1}\frac{h_i}{2}\left[\frac{3+q_i}{3+3q_i+q_i^2}S''_i-\right.$$

$$\left.-\frac{3+p_{i1}}{3+3p_{i1}+p_{i1}^2}S''_{i+1}\right]. \qquad (19)$$

Считая $f(x)$ достаточно гладкой функцией, предположим, что $S_j^{(r)}-f_j^{(r)}=O(h_i^{k+1-r})$, $r=1,2$; $j=i,i+1$; $k=2$ или $k=3$.

Тогда

$$S'_{i+1}-S'_i=f'_{i+1}-f'_i+O(h_i^k)=h_i f''(x_i)+\frac{h_i^2}{2}f'''(x_i)+O(h_i^k)$$

и, привлекая (I9), получаем

$$S'_{i1}-f'(x_{i1})=S'_i-f'_i+\frac{h_i}{2}\left[\frac{3+q_i}{3+3q_i+q_i^2}-\frac{3+p_{i1}}{3+3p_{i1}+p_{i1}^2}\right]\mu_{i1}\lambda_{i1}f''_i+$$

$$+\frac{h_{i1}(h_i-h_{i1})}{2}\left(1-\frac{3+p_{i1}}{3+3p_{i1}+p_{i1}^2}\right) f_i''' + O(h_i^k).$$

Отсюда следует, что порядок погрешности приближения в точке x_{i1} для производной сплайна повышается, если положить $p_{i1}=q_i$. С учетом (I5),(I9) и равенств $p_i=q_{i1}$, $q_i=p_{i1}$ имеем

$$S(x_{i1})-f(x_{i1})=f_i+\alpha_i h_{i1}-f(x_{i1})=-h_{i1}^2\frac{(1+q_i)(p_i+q_i+p_iq_i)}{2(3+p_i)(3+3q_i+q_i^2)} f_i'' +$$

$$+h_{i1}^2\frac{3q_i(2+q_i)(h_i-h_{i1})-h_{i1}p_i(3+3q_i+q_i^2)}{(3+p_i)(3+3q_i+q_i^2)} f_i''' + O(h_i^{k+1}).$$

Поскольку

$$\frac{(1+q_i)(p_i+q_i+p_iq_i)}{(3+p_i)(3+3q_i+q_i^2)} \le \frac{p_i+q_i+p_iq_i}{(3+p_i)(3+q_i)} \le$$

$$\le \frac{p_i(2+q_i)+q_i(2+p_i)}{2(2+p_i)(2+q_i)} = \frac{1}{2}\left(\frac{p_i}{2+p_i}+\frac{q_i}{2+q_i}\right),$$

то при $k=3$ максимальный порядок приближения $O(h_i^4)$ в точке x_{i1} достигается при $p_i, q_i = O(h_i^2)$. При $p_i, q_i = O(1)$ порядок приближения снижается до $O(h_i^2)$.

Таким образом, общее требование при выборе параметров может состоять в минимизации выражения $p_i/(2+p_i)+q_i/(2+q_i)$.

Рассмотрим вопрос об изогеометрии рационального сплайна $S(x)$ на подотрезке $[x_i, x_{i+1}]$.

Условия (6),(7) выполняются по построению. Условие (8) означает отсутствие на $[x_i, x_{i+1}]$ точек перегиба функции с изогеометрией $f(x)$. Покажем, что для сплайна $S(x)$ это условие будет выполнено, если имеют место неравенства:

$$\begin{aligned}
&\min(\alpha_i, \beta_i) < S'_{i1} < \max(\alpha_i, \beta_i),\\
&\min(S'_i, \Delta_i) < \alpha_i < \max(S'_i, \Delta_i),\\
&\min(S'_{i+1}, \Delta_i) < \beta_i < \max(S'_{i+1}, \Delta_i).
\end{aligned} \tag{20}$$

Из (I5), учитывая (I9), находим

$$\alpha_i=S'_i+\mu_{i1}\frac{S'_{i+1}-S'_i}{3+p_i}\left[1+\lambda_{i1}\frac{3+q_i}{3+3q_i+q_i^2}(\sigma_i-\sigma_{i+1})+\frac{(2+p_i)(2+q_i)-1}{3+3q_i+q_i^2}\sigma_i\right],$$

$$\beta_i=S'_{i+1}-\lambda_{i1}\frac{S'_{i+1}-S'_i}{3+p_i}\left[1-\mu_{i1}\frac{3+q_i}{3+3q_i+q_i^2}(\sigma_i-\sigma_{i+1})+\frac{(2+p_i)(2+q_i)-1}{3+3q_i+q_i^2}\sigma_{i+1}\right]. \qquad (21)$$

Это позволяет записать условия (20) в виде следующих соотношений:

$$\frac{1}{3+p_i}\left[1+\frac{\lambda_{i1}(3+q_i)}{3+3q_i+q_i^2}(\sigma_i-\sigma_{i+1})+\frac{(2+p_i)(2+q_i)-1}{3+3q_i+q_i^2}\sigma_i\right]<$$

$$<1+\lambda_{i1}\frac{3+q_i}{3+3q_i+q_i^2}(\sigma_i-\sigma_{i+1}),$$

$$\frac{1}{3+p_i}\left[1-\mu_{i1}\frac{3+q_i}{3+3q_i+q_i^2}(\sigma_i-\sigma_{i+1})+\frac{(2+p_i)(2+q_i)-1}{3+3q_i+q_i^2}\sigma_{i+1}\right]<$$

$$<1-\mu_{i1}\frac{3+q_i}{3+3q_i+q_i^2}(\sigma_i-\sigma_{i+1}),$$

$$0<\frac{\mu_{i1}}{3+p_i}\left[1+\frac{(3+q_i)\lambda_{i1}+(2+p_i)(2+q_i)-1}{3+3q_i+q_i^2}\sigma_i-\frac{(3+q_i)\lambda_{i1}}{3+3q_i+q_i^2}\sigma_{i+1}\right]<1-\tau_i,$$

$$0<\frac{\lambda_{i1}}{3+p_i}\left[1+\frac{\mu_{i1}(3+q_i)+(2+p_i)(2+q_i)-1}{3+3q_i+q_i^2}\sigma_{i+1}-\frac{(3+q_i)\mu_{i1}^{-1}}{3+3q_i+q_i^2}\sigma_i\right]<\tau_i.$$

В силу (I8) для выполнения этих неравенств и условий $\Phi(0)<<0$, $\Phi(1)>0$ достаточно выбрать параметры p_i, q_i так, чтобы имели место ограничения

$$\frac{1}{3+p_i}+\frac{3+q_i}{3+3q_i+q_i^2}\sigma_i<1-\tau_i,\qquad \frac{1}{3+p_i}+\frac{3+q_i}{3+3q_i+q_i^2}\sigma_{i+1}<\tau_i. \qquad (22)$$

Согласно формулам (II),(I9),(2I) находим

$$C_i = h_{i1}\mu_{i1}\frac{S'_{i+1} - S'_i}{3+p_i}\left[1 - \frac{3+q_i}{3+3q_i+q_i^2}(\mu_{i1}\sigma_i + \lambda_{i1}\sigma_{i+1})\right].$$

При выполнении неравенств (22) выражение в квадратных скобках положительно, т.е. $\operatorname{sign}(C_i) = \operatorname{sign}(S'_{i+1} - S'_i)$. Так как $(S'_{i+1} - S'_i)\cdot S''_j \geq 0$, $j = i, i+1$, то согласно (I3) получаем $S''(x_{i1})\cdot S''(x_j) \geq 0$, $j = i, i+1$. Из (I2) имеем $S''(x) = C_i\varphi(p_i, t) + D_i\varphi(q_i, 1-t)$, $x \in [x_i, x_{i1}]$, где

$$\varphi(p_i, t) = \frac{2p_i^2t^3 - 6p_i(1+p_i)t^2 + 6(1+p_i)^2t}{[1+p_i(1-t)]^3h_{i1}^2}.$$

Нетрудно проверить, что $\varphi(p_i, t) \geq 0$ для $t \in [0, 1]$ и, следовательно, $S''(x)S''(x_j) \geq 0$, $j = i, i+1$, $x \in [x_i, x_{i1}]$. Аналогичный вывод получим, рассматривая подотрезок $[x_{i1}, x_{i+1}]$. В результате функция $S''(x)$ будет выпуклой, а $S'(x)$ – монотонной на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$. Так как по предположению $S'_iS'_{i+1} \geq 0$, то свойством монотонности обладает и функция $S(x)$.

Приведенное построение заканчивает доказательство достаточности условий теоремы о функциях с изогеометрией из предыдущего параграфа.

§3. Числовой алгоритм построения функций с изогеометрией

При доказательстве теоремы о функциях с изогеометрией была описана процедура построения семейства рациональных сплайнов, удовлетворяющих условиям изогеометрии. Теперь следует уточнить, как нужно выбирать значения производных сплайна в узлах сетки Δ и дополнительные точки перегиба, достигая однозначности в таком построении. Естественно стремиться к тому, чтобы получить рациональный сплайн $S(x)$, который лежал бы возможно ближе к функции с изогеометрией $f(x)$.

Введем в рассмотрение многочлен Лагранжа n-й степени относительно точек (x_j, y_j), $j = i, \ldots, i+n$:

$$\begin{aligned} L_{n,i}(x) = f_i + f[x_i, x_{i+1}](x - x_i) + \ldots \\ \ldots + f[x_i, \ldots, x_{i+n}](x - x_i)\ldots(x - x_{i+n-1}), \end{aligned} \qquad (23)$$

где использовано стандартное обозначение для разделенных разностей $f[x_i,\dots,x_{i+k}] = (f[x_{i+1},\dots,x_{i+k}] - f[x_i,\dots,x_{i+k-1}])/(x_{i+k}-x_i)$.

Уточним вначале выбор значений производных во внутренних узлах сетки Δ, исходя из ограничений (1)-(5). При $\delta_i \neq 0$ положим

$$S_i^{(k)} = L^{(k)}_{3,i-2}(x_i) \quad \text{или} \quad S_i^{(k)} = L^{(k)}_{3,i-1}(x_i), \quad k=1,2, \tag{24}$$

в зависимости от того, какие из этих значений удовлетворяют неравенствам (1). Это обеспечивает точность задания производных $O(h^{4-k})$, $h = \max_i h_i$ (см. [17]).

Если с помощью такого выбора $S_i^{(k)}$ ограничениям (1) удовлетворить не удается, то полагаем $S_i^{(k)} = L^{(k)}_{2,i-1}(x_i)$, $k = 1,2$. Последнее автоматически гарантирует выполнение неравенств (1), так как

$$L'_{2,i-1}(x_i) = \frac{h_i\Delta_{i-1} + h_{i-1}\Delta_i}{h_{i-1}+h_i}, \quad L''_{2,i-1}(x_i) = 2\delta_i .$$

Хотя такое понижение степени интерполяционного многочлена Лагранжа, вообще говоря, уменьшает порядок аппроксимации производных на единицу, точность задания S'_i сохранится, если $\delta_j\delta_{j+1} > 0$, $j = i-1, i$. Действительно, так как

$$\begin{aligned} L'_{3,i-2}(x_i) &= \Delta_{i-1} + \delta_{i-1}h_{i-1} + \frac{h_{i-1}(h_{i-2}+h_{i-1})}{h_{i-2}+h_{i-1}+h_i}(\delta_i - \delta_{i-1}), \\ L'_{3,i-1}(x_i) &= \Delta_i - \delta_{i+1}h_i + \frac{(h_i+h_{i+1})h_i}{h_{i-1}+h_i+h_{i+1}}(\delta_{i+1} - \delta_i), \end{aligned} \tag{25}$$

то

$$(L'_{3,i-2}(x_i) - \Delta_{i-1})\delta_i > 0 \quad \text{при} \quad \delta_{i-1}\delta_i > 0,$$

$$(\Delta_i - L'_{3,i-1}(x_i))\delta_i > 0 \quad \text{при} \quad \delta_i\delta_{i+1} > 0.$$

Следовательно, $(L'_{3,i-2}(x_i) - \Delta_{i-1})(\Delta_i - L'_{3,i-1}(x_i)) > 0$ и либо $L'_{3,i-2}(x_i) > \Delta_{i-1}$, $L'_{3,i-1}(x_i) < \Delta_i$, либо $L'_{3,i-2}(x_i) < \Delta_{i-1}$, $L'_{3,i-1}(x_i) > \Delta_i$. Мы предполагаем, что задание S'_i с помощью (24) недопустимо из-за невыполнения неравенств (1). Поэтому с учетом сказанного выше или $L'_{3,i-2}(x_i) > \max(\Delta_{i-1}, \Delta_i)$, $L'_{3,i-1}(x_i) < \min(\Delta_{i-1}, \Delta_i)$, или, наоборот, $L'_{3,i-2}(x_i) < \min(\Delta_{i-1}, \Delta_i)$, $L'_{3,i-1}(x_i) > \max(\Delta_{i-1}, \Delta_i)$. В обоих случаях найдется такое число $\alpha \in (0,1)$, что $L'_{2,i-1}(x_i) = \alpha L'_{3,i-2}(x_i) + (1-\alpha)L'_{3,i-1}(x_i)$, т.е. точность задания S'_i будет $O(h^3)$ [x].

В случае $\delta_i = 0$, $\delta_{i-1}\delta_{i+1} < 0$, $2 \le i \le N-2$, положим

$$S''_i = 0, \qquad S'_i = \begin{cases} L'_{4,i-2}(x_i) & \text{при } L'_{4,i-2}(x_i)\Delta_i \ge 0, \\ 0 - & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где в соответствии с (23) выражение для значения производной многочлена Лагранжа четвертой степени имеет вид:

$$L'_{4,i-2}(x_i) = \Delta_{i-1} + \delta_{i-1}\,\frac{h_{i-1}h_i(h_i+h_{i+1})}{(h_{i-2}+h_{i-1}+h_i)(h_{i-2}+h_{i-1}+h_i+h_{i+1})} -$$

$$- \delta_{i+1}\,\frac{h_{i-1}h_i(h_{i-2}+h_{i-1})}{h_{i-2}+h_{i-1}+h_i+h_{i+1}} .$$

Так как в данном случае $\Delta_{i-1} = \Delta_i$, то $(L'_{4,i-2}(x_i) - \Delta_i)\delta_{i-1} > 0$ и ограничения (2) будут выполнены. Отметим, что для достаточно гладкой функции с изогеометрией $f(x)$ будет также выполнено неравенство $|S'_i - L'_{4,i-2}(x_i)| \le |f'(x_i) - L'_{4,i-2}(x_i)| = O(h^4)$.

При $\delta_1 = 0$ положим

$$S''_1 = 0, \qquad S'_1 = \begin{cases} L'_{3,0}(x_1) & \text{при } L'_{3,1}(x_1)\Delta_1 \ge 0, \\ 0 - & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

а при $\delta_{N-1} = 0$

$$S''_{N-1} = 0, \quad S'_{N-1} = \begin{cases} L'_{3,N-3}(x_{N-1}) & \text{при } L'_{3,N-3}(x_{N-1})\Delta_{N-1} \ge 0, \\ 0 - & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Привлекая (25), нетрудно убедиться, что ограничения (3) будут удовлетворены.

Корректировку значений первой и второй производных в узлах x_0, x_N осуществляем по формулам:

при $\delta_1 \ne 0$

$$S''_0 = L''_{2,0}(x_0), \qquad S'_0 = \begin{cases} L'_{2,0}(x_0) & \text{при } L'_{2,0}(x_0)\Delta_0 \ge 0, \\ 0 - & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

---

[x] Примечание редактора. Рассмотренная ситуация, как нетрудно видеть, возможна только при достаточно больших h, когда рассуждения о порядке приближения не имеют особого смысла. Для всех достаточно малых h выбор производных по формулам (24) всегда удовлетворяет ограничениям (I).

при $\delta_1 = 0$

$$S''_0 = L''_{3,0}(x_0), \qquad S'_0 = \begin{cases} L'_{3,0}(x_0) & \text{при} \quad L'_{3,0}(x_0)\Delta_0 \ge 0, \\ 0 - & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

при $\delta_{N-1} \ne 0$

$$S''_N = L''_{2,N-2}(x_N), \quad S'_N = \begin{cases} L'_{2,N-2}(x_N) & \text{при} \quad L'_{2,N-2}(x_N)\Delta_{N-1} \ge 0, \\ 0 - & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

при $\delta_{N-1} = 0$

$$S''_N = L''_{3,N-3}(x_N), \quad S'_N = \begin{cases} L'_{3,N-3}(x_N) & \text{при} \quad L'_{3,N-3}(x_N)\Delta_{N-1} \ge 0, \\ 0 - & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Непосредственная проверка выполнения ограничений (4),(5) не представляет затруднений.

В результате во всех узлах сетки Δ будут заданы удовлетворяющие условиям изогеометрии значения производных $S_i^{(k)}$, $k = 1,2$.

Рассмотрим теперь вопрос о выборе дополнительных точек перегиба. Как было указано при доказательстве теоремы о функциях с изогеометрией, если исходные данные таковы, что $\delta_i \delta_{i+1} < 0$, то на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ в дополнение к узлам сетки Δ необходимо ввести точку перегиба $\bar{x}$. В этой точке перегиба следует задать значение $S'(\bar{x})$ (по определению полагаем $S''(\bar{x}) = 0$).

Итак, пусть $\delta_i \delta_{i+1} < 0$. На отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ рассмотрим эрмитов кубический многочлен

$$S_{3,2}(x) = S_i + h_i t^2(3-2t)\Delta_i + h_i t(1-t)^2 S'_i - h_i t^2(1-t)S'_{i+1},$$

где $t = (x - x_i)/h_i$, $h_i = x_{i+1} - x_i$. Из требования $S''_{3,2}(x) = 0$ находим

$$x = \bar{x}_0 = x_i + t^* h_i, \quad t^* = \frac{1}{3}(3\Delta_i - 2S'_i - S'_{i+1})/(2\Delta_i - S'_i - S'_{i+1}) ,$$

и так как в силу условия $\delta_i \delta_{i+1} < 0$ в данном случае

$$\Delta_i < \min(S'_i, S'_{i+1}) \quad \text{или} \quad \Delta_i > \max(S'_i, S'_{i+1}) , \tag{26}$$

то $t^* \in (0,1)$ и, значит, точка перегиба $\bar{x}_0 \in (x_i, x_{i+1})$.

Последовательно рассмотрим следующие ситуации.

а) Если выполняется условие

$$\min(S_i, S_{i+1}) < S_{3,2}(\bar{x}_0) < \max(S_i, S_{i+1}), \tag{27}$$

то в качестве точки перегиба берется $\bar{x}_0$ и полагается

$$S'(\bar{x}_0) = \begin{cases} S'_{3,2}(x_0) & \text{при} \quad S'_{3,2}(\bar{x}_0)\Delta_i \ge 0 , \\ 0 - & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

б) Требование (27) не выполняется. Из условия $S'_{3,2}(x) = 0$ находим

$$\bar{x}_{1,2} = \bar{x}_0 \pm \tilde{t}h_i, \quad \tilde{t} = \frac{1}{3}\sqrt{(S'_i + S'_{i+1} - 3\Delta_i)^2 - S'_i S'_{i+1}} \,/ (S'_i + S'_{i+1} - 2\Delta_i),$$

и в качестве точки перегиба берется та из точек $\bar{x}_1, \bar{x}_2$, для которой выполнены неравенства (27). В этой точке полагаем $S'(\bar{x}_k) = 0$.

в) Если с помощью точек $\bar{x}_{1,2}$ ограничениям (27) удовлетворить не удается, то в качестве точки перегиба берется точка пересечения графика функции $S_{3,2}(x)$ с отрезком прямой, соединяющей точки (x_i, S_i), (x_{i+1}, S_{i+1}). Находим $\bar{x}_3 = x_i + \hat{t}h_i$, $\hat{t} = (\Delta_i - S'_i)/(2\Delta_i - S'_i - S'_{i+1})$, причем в силу (26) здесь $\hat{t} \in (0,1)$, и, следовательно, $\bar{x}_3 \in (x_i, x_{i+1})$. В данном случае полагаем $S'(\bar{x}_3) = 0$. Отметим, что

$$\bar{x}_3 - \bar{x}_0 = (\hat{t} - t^*)h_i = \frac{h_i}{3}(S'_{i+1} - S'_i)/(2\Delta_i - S'_i - S'_{i+1}),$$

и поэтому точки $\bar{x}_3, \bar{x}_0$ совпадают лишь при $S'_i = S'_{i+1}$.

Известно [18], что эрмитов кубический многочлен дает приближение интерполируемой функции с порядком $O(h^4)$. В силу построения этот порядок имеет место для всех трех случаев "а"–"в".

Теперь остается убедиться в том, что на тех отрезках $[x_i, x_{i+1}]$, на концах которых значения производных не корректировались, соответствующий эрмитов кубический многочлен $S_{3,2}(x)$ будет монотонен (выпуклость имеет место в силу линейности $S''_{3,2}(x)$). Это достигается с помощью проверки необходимых и достаточных условий монотонности Фрича-Карлсона [7]:

$$0 \le d_i, \quad e_i \le 3 \quad \text{или} \quad d_i - \frac{1}{3}\cdot\frac{(2d_i + e_i - 3)^2}{(d_i + e_i - 2)} \ge 0,$$

где $d_i = S'_i/\Delta_i$, $e_i = S'_{i+1}/\Delta_i$. Если эти соотношения не выполняются, то на $[x_i, x_{i+1}]$ следует рассмотреть построение рационального сплайна. Такое же построение проводится, если на концах подотрезка $[x_i, x_{i+1}]$ значения производных были изменены.

Резюмируем основные этапы алгоритма построения сохраняющего изогеометрию рационального сплайна $S(x)$, исходя из возможности его обобщения.

Ш а г I. Построение по исходным данным на сетке Δ сплайна $\tilde{S}(x)$ класса C^2. Это может быть стандартный кубический сплайн или, например, локально-аппроксимационный сплайн. В последнем случае требуется заменить в узлах сетки Δ значения y_i на $\tilde{S}(x_i)$.

Шаг 2. Корректировка значений первой и второй производных сплайна $\tilde{S}(x)$ в узлах сетки Δ, исходя из требований изогеометрии, и выбор расширяющих сетку Δ дополнительных точек перегиба.

Шаг 3. Проверка условий монотонности и выпуклости на подотрезках, где значения производных не менялись. При невыполнении этих условий, а также в случае корректировки концевых значений производных построение на соответствующих подотрезках рациональных сплайнов.

В итоге реализации этого алгоритма будет построен рациональный сплайн, являющийся функцией с изогеометрией.

§4. Примеры

Описанный алгоритм изогеометрической интерполяции был апробирован на ряде тестовых примеров.

Данные для первого примера взяты из [18]. Рассматривается интерполяция функции $f(x)= 1-[\exp(100x)-1]/[\exp(100)-1]$, $x \in [0,1]$, на равномерной сетке: $x_i = i/10$, $i = 0,\ldots,10$. На рис. I (и далее) штриховой и сплошной линиями показаны графики обычного кубического сплайна $S_3(x)$ класса C^2 и рационального сплайна $S(x)$ соответственно. В обоих случаях использованы краевые условия $S_0'=0$, $S_{10}' = -100$. Сплайн $S_3(x)$ дает неприемлемые осцилляции. Амплитуду последних можно уменьшить введением неравномерной сетки со сгущением узлов в области большого градиента или выбором соответствующей параметризации. В то же время максимальное отклонение рационального сплайна $S(x)$ от интерполируемой функции в данном примере не превосходит 0,078, причем поведение $S(x)$ согласовано по монотонности и выпуклости с $f(x)$.

Во многих работах по изогеометрической интерполяции (см., например, [8,12]) алгоритмы тестируются на данных из [19], приведенных в табл. I. Для этих данных на рис.2 представлены графики сплайнов $S_3(x)$ и $S(x)$. Последний имеет точку перегиба $\bar{x}$ на $[x_8, x_9]$ и по одному дополнительному узлу на участках $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 5,6$, $[x_8, \bar{x}]$, $[\bar{x}, x_9]$. По сравнению с приведенными в [8,12] профилями сплайн $S(x)$ наряду с сохранением свойств монотонности и выпуклости исходных данных ближе всего расположен к $S_3(x)$.

В [20] рассмотрен пример интерполяции функции $f(x) = 2-\sqrt{x(2-x)}$, $0 \le x \le 2$, задающей полуокружность. Эта функция ин-

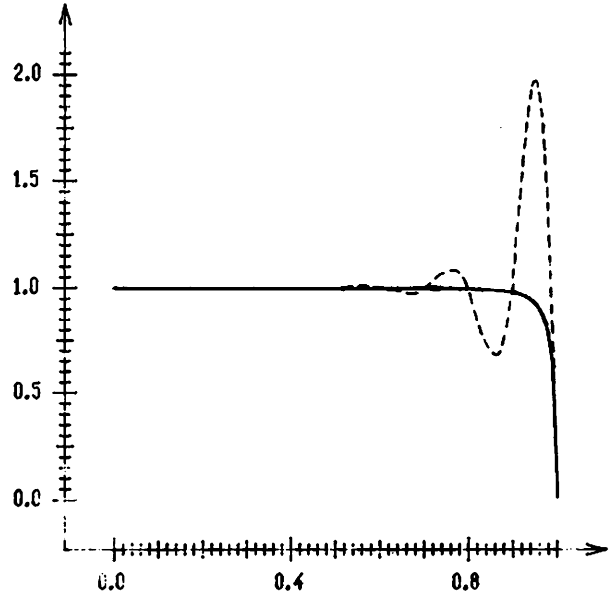

Рис. I

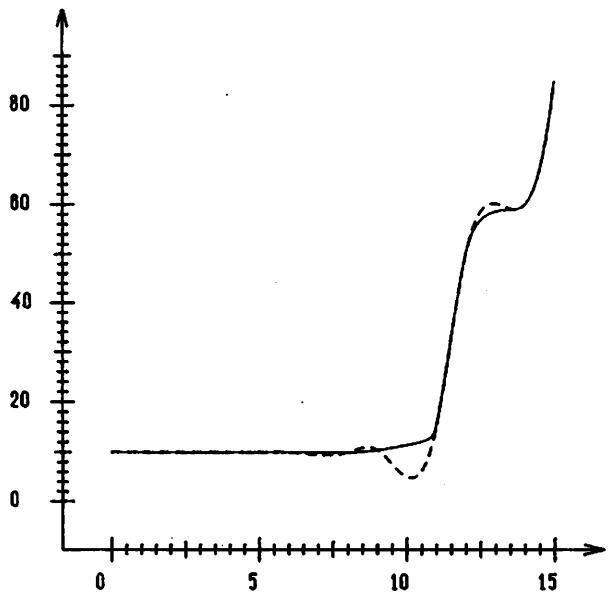

Рис. 2

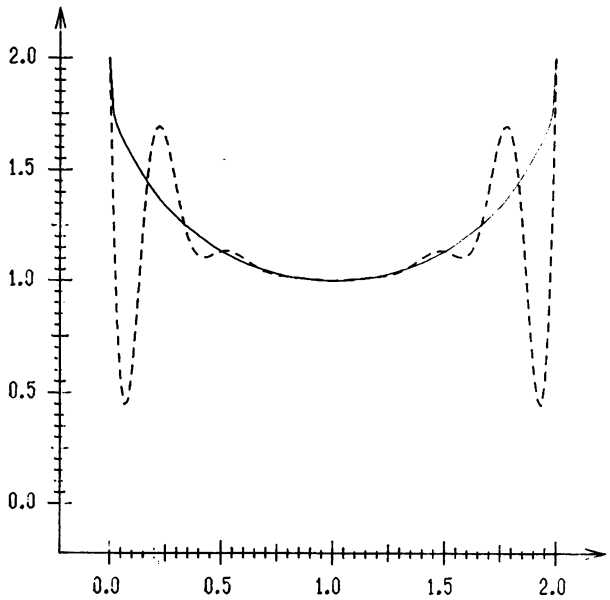

Рис. 3

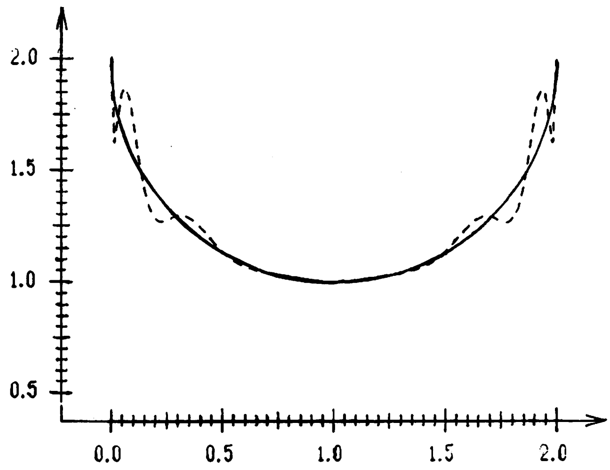

Рис. 4

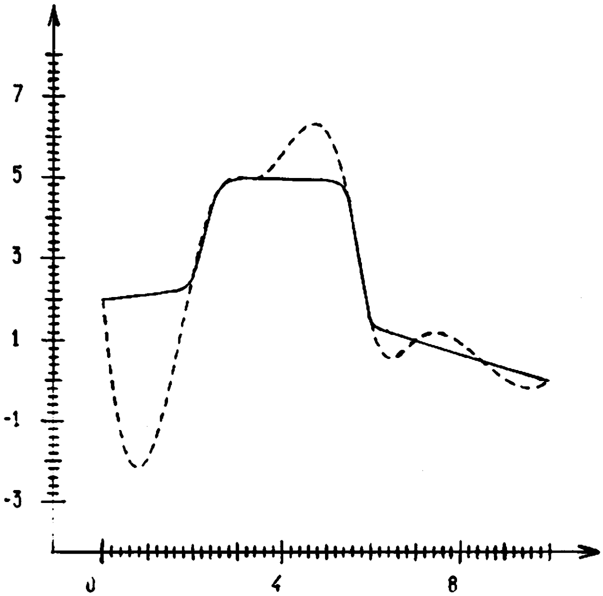

Рис. 5

Таблица I

i	0	I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0
x_i	0	2	3	5	6	8	9	II	I2	I4	I5
f_i	I0	I0	I0	I0	I0	I0	I0.5	I5	56	60	85

Таблица 2

i	0	I	2	3	4	5	6	7	8
x_i	0	2	2.5	3.5	5.5	6.0	7	8.5	I0
f_i	2	2.5	4.5	5	4.5	I.5	I	0.5.	0

терполируется на сетке, равномерной по x (рис.3) и по длине дуги (рис.4). В обоих случаях было взято 13 узлов интерполяции и использованы краевые условия $S_0' = -50$, $S_{12}' = 50$. Видно,что переход к сетке с постоянным шагом по длине дуги позволяет уменьшать осцилляции сплайна $S_3(x)$, но не устраняет их. Рациональный сплайн $S(x)$ опять сохраняет свойства монотонности и выпуклости исходных данных.

Рис. 5 иллюстрирует интерполяцию данных из [2] (табл.2). Здесь использован вариант алгоритма, когда из условий $\delta_{N-1} = 0$, $\delta_{N-2} \neq 0$ и $\Delta_{N-3}\Delta_{N-2} > 0$ следует прямолинейность сплайна на отрезке $[x_{N-2}, x_N]$.

Полученные профили рационального сплайна, сохраняющего свойства интерполируемых данных, характеризуют предлагаемый в работе алгоритм как достаточно универсальный.

Литература

1. SCHWEIKERT D.G. An interpolating curve using a spline in tension//J.math.phys.-1966.-Vol.45.- P.312-317.

2. SPÄTH H. Spline-Algorithmen zur Konstruktion glatter Kurven und Flächen.- München, Germany: R.Oldenbourg Verlag,1973. - 134 s.

3. NIELSON G.M. Some piecewise polynomial alternatives to splines under tension// Computer aided design/ Ed.by R.E.Barnhill and R.F.Riesenfeld.- New York,1974.- P.209-235.

4. Де БОР К. Практическое руководство по сплайнам.-М.: Радио и связь, 1985. - 303 с.

5. ГРЕБЕННИКОВ А.И. Изогеометрическая аппроксимация функций //Числ. анализ на ФОРТРАНе. Методы и алгоритмы. - М., 1978.-С.48-55.

6. ГРЕБЕННИКОВ А.И. Метод сплайнов и решение некорректных задач теории приближений. -М., 1983. - 207 с.

7. FRITSCH F.N., CARLSON R.E. Monotone piecewise cubic interpolation// SIAM J.Numer.Anal.-1980.-Vol.17,N 2.- P.238-246.

8. EISENSTAT S.E.,JACKSON K.R.,LEWIS J.W. The order of monotone piecewise cubic interpolation// SIAM J.Numer.Anal. - 1985. - Vol.22,N 6.- P.1220-1237.

9. ВОРОНИН Б.Т. Построение сплайнов, сохраняющих изогеометрию. - Новосибирск, 1982. - 19 с. -(Препринт/ВЦ СО АН СССР;№404).

10. SCHUMAKER L.L. On shape preserving quadratic spline interpolation// SIAM J.Numer.Anal.-1983.-Vol.20,N 4.-P.854-864.

11. КОБКОВ В.В. Кубические и квадратические сплайны с дополнительными узлами и их применение к интерполяции функций: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.07.-Новосибирск,1983.- 16 с.

12. DELBOURGO R., GREGORY J.A. Shape preserving piecewise rational interpolation// SIAM J.Sci.and statist.comput.- 1985. - Vol.6,N 4. - P.967-976.

13. МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Интерполяция функций с большими градиентами //Методы аппроксимации и интерполяции. - Новосибирск, 1980. - С. 98-107.

14. КВАСОВ Б.И. Интерполяция рациональными параболическими сплайнами //Численные методы механики сплошной среды. - Новосибирск, 1984. - Т.15, №4. - С.60-70.

15. PRUESS S. Alternatives to the exponential spline in tension// Math.comput.- 1979.- Vol.33.-P.1273-1281.

16. MIROSHNICHENKO V.L. Convex and monotone spline interpolation// Constructive theory of functions'84. - Sofia, 1984. - P.610-620.

17. МИРОШНИЧЕНКО В.Л. О погрешности приближения интерполяционными многочленами Лагранжа третьей степени //Приближение сплайнами. - Новосибирск, 1984. - Вып.106: Вычислительные системы.-С.3-24.

18. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. - М.: Наука, 1980. - 352 с.

19. AKIMA H. A new method of interpolation and smooth curve fitting based on local procedures// J.Assoc.comput.math.- 1970. - Vol.17. - P.589-602.

20. GREGORY J.A. Shape preserving rational spline interpolation// Lectures Notes Math.- 1984. - N 1105.- P.431-441.

Поступила в ред.-изд.отд.
22 апреля 1987 года