АППРОКСИМАЦИЯ СПЛАЙНАМИ
(Вычислительные системы)
1987 год Выпуск 121

УДК 512.643.8:519.652

ТОЧНАЯ ОЦЕНКА НОРМЫ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ ДЛЯ СИММЕТРИЧЕСКОГО ЦИРКУЛЯНТА

Б.С.Киндалев

Пусть $A = \mathrm{circ}(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{2n}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{N-2n-1}, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ – вещественная симметрическая циркулянтная матрица порядка $N \geq 2n+1$ ($n \geq 1$), где $(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{2n}, 0, \ldots, 0, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ – первая, определяющая строка матрицы A [1], причем $a_{2n} \neq 0$, $a_j = a_{2n-j}$, $j = 0,1,\ldots,n$. Сопоставим матрице A полином $Q_{2n}(z)$ вида

$$Q_{2n}(z) = \sum_{i=0}^{2n} a_i z^i. \tag{1}$$

В предлагаемой работе при ограничениях на нули полинома $Q_{2n}(z)$ получена точная равномерная по N оценка сверху для $\|A^{-1}\|_\infty$ (как обычно, $\|B\|_\infty = \max\limits_k \sum\limits_l |b_{kl}|$, b_{kl} $(k,l=1,\ldots,N)$ – элементы матрицы B).

Заметим, что в случае $n=1$ точная равномерная по N оценка получена в [2]. В случае произвольного $n>1$ известна лишь равномерная ограниченность по N для $\|A^{-1}\|_\infty$ [3,с. 146].

Отметим также работы [4,5],где для матриц A частного вида, возникающих в задачах периодической сплайн-интерполяции на равномерной сетке, получены точные равномерные по N оценки норм обратных матриц.

Докажем несколько вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 1. Для полинома $Q_{2n}(z)$ справедливо представление

$$Q_{2n}(z) = a_{2n}(z-1)^{m_1}(z+1)^{m_2} \prod_{\nu=1}^{m}(z-z_\nu)\cdot(z-\frac{1}{z_\nu}), \qquad (2)$$

$$m_1 + m_2 + 2m = 2n,$$

где m_1 и m_2 - четные, z_ν, $\nu = 1,\ldots,m$, такие, что $0 < |z_\nu| \leq 1$, причем если $|z_\nu| = 1$, то $\mathrm{Im}(z_\nu) > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале заметим, что полином $Q_{2n}(z)$ удовлетворяет тождеству

$$Q_{2n}(z) \equiv z^{2n}Q_{2n}(\frac{1}{z}). \qquad (3)$$

Поэтому вместе с η нулем полинома является и $1/\eta$, причем, как нетрудно убедиться, эти нули имеют одинаковую кратность. Так как $\eta \neq 1/\eta$ при $\eta \neq \pm 1$ и $Q_{2n}(0) \neq 0$, то в силу сказанного имеем (2), за исключением утверждения о четности m_1 и m_2.

Докажем, что числа m_1 и m_2 четные. Когда хотя бы одно из этих чисел равно нулю, то четность m_1 и m_2 следует из соотношения $m_1 + m_2 + 2m = 2n$. Остается рассмотреть случай $m_1 \neq 0$, $m_2 \neq 0$. Поскольку $m_1 + m_2$ четно, то либо m_1 и m_2 оба четные, либо оба нечетные. Предположим, что m_1 и m_2 нечетные. Так как $m_1 - 1$ четно, то полином $Q_{2n}(z)$ можно представить в виде $Q_{2n}(z) = (z-1)\,\psi(z)$, где

$$\psi(z) = a_{2n}(z-1)^{m_1-1}(z+1)^{m_2} \prod_{\nu=1}^{m}(z-z_\nu)(z-\frac{1}{z_\nu}),$$

причем $\psi(z) = z^{2n-1}\psi(1/z)$. Отсюда находим

$$Q_{2n}(z) = -z^{2n}(\frac{1}{z}-1)\,\psi(\frac{1}{z}) = -z^{2n}Q_{2n}(\frac{1}{z}),$$

что противоречит (3). Следовательно, m_1 и m_2 четные, и лемма полностью доказана.

ЛЕММА 2. Матрица A невырождена тогда и только тогда, когда $Q_{2n}(\xi_k) \neq 0$, $k = 0,1,\ldots,N-1$, где $\xi_k = \exp(2\pi k i/N)$ - корень N-й степени из единицы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Собственные значения λ_k циркулянта A имеют вид [I,с.96]:

$$\lambda_k = a_n + a_{n-1}\xi_k + \ldots + a_0\xi_k^n + a_{2n}\xi_k^{N-n} + a_{2n-1}\zeta_k^{N-n+1} + \ldots + a_{n+1}\zeta_k^{N-1},$$

$$k = 0, \ldots, N-1.$$

Так как $\xi_k^N = 1$, то, учитывая (I), получаем

$$\lambda_k = z^{-n}Q_{2n}(z)|_{z=\xi_k}, \; k = 0, \ldots, N-1. \qquad (4)$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Из леммы 2 вытекает достаточный признак невырожденности матрицы.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть полином $Q_{2n}(z)$ не обращается в нуль на единичной окружности $|z| = 1$. Тогда матрица A невырождена.

ЛЕММА 3. Пусть полином $Q_{2n}(z)$ не имеет нулей на окружности $|z| = 1$. Тогда матрицу A можно представить в виде

$$A = a_{2n} \prod_{\nu=1}^{n} A_\nu, \qquad (5)$$

где $A_\nu = \mathrm{circ}(\alpha_\nu, 1, 0, \ldots, 0, 1)$, $\nu = 1, \ldots, n$, – циркулянты порядка N, $\alpha_\nu = -(z_\nu + 1/z_\nu)$, $z_\nu(|z_\nu| < 1)$ – нули полинома $Q_{2n}(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [I, с. 96] циркулянт A можно представить в виде

$$A = a_n P^0 + a_{n-1}P^1 + \ldots + a_0 P^n + a_{2n}P^{N-n} + \\ + a_{2n-1}P^{N-n+1} + \ldots + a_{n+1}P^{N-1}, \qquad (6)$$

где $P = \mathrm{circ}(0, \ldots, 0, 1)$ – матрица перестановок порядка N. Так как $P^N = I$ (I – единичная матрица порядка N) [I, с. 95], то из (6), учитывая (I), получаем

$$A = P^{-n}Q_{2n}(P). \qquad (7)$$

По предположению нули полинома $Q_{2n}(z)$ не лежат на окружности $|z| = 1$. Поэтому в силу леммы I имеем

$$Q_{2n}(z) = a_{2n} \prod_{\nu=1}^{n} (z^2 - (z_\nu + \frac{1}{z_\nu}) z + 1),$$

где z_ν, $\nu = 1, \ldots, n$, – нули полинома $Q_{2n}(z)$, по модулю меньшие единицы. Отсюда и из (7) получаем

$$A = a_{2n} \prod_{\nu=1}^{n} (P + \alpha_\nu I + P^{-1}),$$

где $\alpha_\nu = -(z_\nu + 1/z_\nu)$, $\nu = 1, \ldots, n$. В итоге имеем (5) с $A_\nu = P + \alpha_\nu I + P^{-1}$.

ЛЕММА 4. Пусть $B = \mathrm{circ}(b, 1, 0, \ldots, 0, 1)$ – вещественный симметрический циркулянт нечетного порядка $M \geq 3$. Тогда если $b > 2$, то B невырожден и

$$\| B^{-1} \|_\infty < \frac{1}{b-2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $b > 2$, то матрица B имеет диагональное преобладание, следовательно, она невырождена. Воспользуемся результатами из [2], где для матрицы B выписаны элементы обратной матрицы

$$B^{-1} = \mathrm{circ}(b_1^M, b_2^M, \ldots, b_M^M),$$

$$b_i^M = \frac{\omega^{i-1} + \omega^{M-i+1}}{\sqrt{b^2-4}\,(1-\omega^M)}, \quad i = 1, \ldots, M; \quad \omega = \frac{-b + \sqrt{b^2-4}}{2}.$$

Положим $M = 2k+1$ $(k \geq 1)$. Так как $b_i^M = b_{M+2-i}^M$, то

$$\| B^{-1} \|_\infty = |b_1^M| + 2(|b_2^M| + |b_3^M| + \ldots + |b_{k+1}^M|) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-4}\,(1-\omega^M)} \Big\{ 1 + \omega^M + 2[-\omega + (-1)^k \omega^{k+1}][1 - \omega + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{k+1} \omega^{k-1}] \Big\} = \frac{1}{b-2} - \frac{4\,|\omega^{k+1}|}{\sqrt{b^2-4}\,(1-\omega^M)(1+\omega)}.$$

Поскольку $|\omega| < 1$, то отсюда $\|B^{-1}\|_\infty < \frac{1}{b-2}$. Лемма доказана.

Двустороннюю оценку $\|A^{-1}\|_\infty$ устанавливает следующая

ТЕОРЕМА I. Если все нули полинома $Q_{2n}(z)$ вещественные и $Q_{2n}(\pm 1) \neq 0$, то матрица A невырождена и

$$\max_{0\leq k\leq N-1}\left\{\frac{1}{|a_{2n}|\prod\limits_{\nu=1}^{n}|\alpha_\nu+2\cos\frac{2\pi k}{N}|}\right\} \leq \|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{|a_{2n}|\prod\limits_{\nu=1}^{n}(|\alpha_\nu|-2)}, \quad (8)$$

где $\alpha_\nu = -(z_\nu + \frac{1}{z_\nu})$, $z_\nu(|z_\nu| < 1)$ – нули полинома $Q_{2n}(z)$. Причем если N нечетно и у полинома $Q_{2n}(z)$ имеется хотя бы один отрицательный нуль, то в правой части (8) имеет место строгое неравенство.

Если у полинома $Q_{2n}(z)$ имеются нули на окружности $|z| = 1$ и матрица A невырождена, то не существует оценки вида

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq K < +\infty \quad (9)$$

с константой $K>0$, не зависящей от N.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Получим оценку (8). Заметим, что невырожденность A вытекает из следствия. Согласно лемме 3 для матрицы A справедливо представление

$$A = a_{2n}\prod_{\nu=1}^{n} A_\nu, \quad (10)$$

где $A = \mathrm{circ}(\alpha_\nu, 1, 0, \ldots, 0, 1)$, $\alpha_\nu = -(z_\nu + \frac{1}{z_\nu})$, $z_\nu(|z_\nu| < 1)$ – нули полинома $Q_{2n}(z)$. Так как $|t + t^{-1}| > 2$ для всех вещественных $t \neq -1, 0, 1$, то

$$|\alpha_\nu| > 2, \quad \nu = 1, \ldots, n. \quad (11)$$

Следовательно, все матрицы A_ν, $\nu = 1, \ldots, n$, с диагональным преобладанием, поэтому они невырождены, и в силу [6, с. 334]

$$\|A_\nu^{-1}\|_\infty \leq (|\alpha_\nu| - 2)^{-1}, \quad \nu = 1, \ldots, n. \quad (12)$$

Из (10), учитывая (12), получаем

$$\| A^{-1}\|_\infty \le \frac{1}{|a_{2n}|} \prod_{\nu=1}^{n} (|\alpha_\nu| - 2)^{-1} . \tag{13}$$

Эту оценку можно уточнить при N нечетном, если у полинома $Q_{2n}(z)$ имеется хотя бы один отрицательный нуль. В этом случае, согласно лемме 4, по меньшей мере в одном из неравенств (12) имеется строгое неравенство, и, следовательно, в (13) будет строгое неравенство.

Следуя [2], оценим $\|A^{-1}\|_\infty$ снизу. Как известно [7], спектральный радиус матрицы не превосходит любой матричной нормы. Поэтому

$$\left[\min_{0\le k\le N-1} |\lambda_k|\right]^{-1} \le \| A^{-1}\|_\infty ,$$

где λ_k - собственные значения матрицы A. Из (4), учитывая (2), получаем

$$\lambda_k = a_{2n} \prod_{\nu=1}^{n} (z + \alpha_\nu + \frac{1}{z})\Big|_{z=\xi_k} = a_{2n} \prod_{\nu=1}^{n} (\alpha_\nu + 2\cos \frac{2\pi k}{N}),$$

$$k = 0,\dots,N-1.$$

Следовательно,

$$\left[\min_{0\le k\le N-1} (|a_{2n}| \prod_{\nu=1}^{n} |\alpha_\nu + 2\cos \frac{2\pi k}{N}|)\right]^{-1} \le \| A^{-1}\|_\infty . \tag{14}$$

В итоге из оценок (13),(14) получаем (8).

Пусть теперь хотя бы один нуль полинома $Q_{2n}(z)$ расположен на окружности $|z| = 1$. Тогда согласно (2) среди $2n$ нулей полинома $Q_{2n}(z)$ существует n нулей η_ν, $\nu = 1,\dots,n$, таких, что

$$Q_{2n}(z) = a_{2n} \prod_{\nu=1}^{n} (z^2+\alpha_\nu z+1), \quad \alpha_\nu = -(\eta_\nu + \frac{1}{\eta_\nu}),$$

причем существует номер $\nu_0 \in \{1,\dots,n\}$, такой что $|\eta_{\nu_0}| = |1/\eta_{\nu_0}| = 1$. Так как матрица A невырождена, то аналогично (14) можно записать

$$\left[\min_{0\le k\le N-1} (|a_{2n}| \prod_{\nu=1}^{n} |\alpha_\nu + 2\cos \frac{2\pi k}{N}|)\right]^{-1} \le \| A^{-1}\|_\infty . \tag{15}$$

Очевидно, что

$$|a_{2n}| \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\nu_0}}^{n} \left|\alpha_\nu + 2\cos\frac{2\pi k}{N}\right| \leq K_2 ,$$

где константа $K_2>0$ не зависит от N и k. Поэтому из (I5) имеем

$$\left(K_2 \min_k \left|\alpha_{\nu_0} + 2\cos\frac{2\pi k}{N}\right| \right)^{-1} \leq \| A^{-1} \|_\infty . \qquad (16)$$

Поскольку $\bar{\eta}_{\nu_0} = 1/\eta_{\nu_0}$, то α_{ν_0} – вещественное число, и так как $|\eta_{\nu_0}| = |1/\eta_{\nu_0}| = 1$, то $|\alpha_{\nu_0}| \leq 2$. Следовательно, $\min\limits_k |\alpha_{\nu_0} + 2\cos\frac{2\pi k}{N}|$ можно сделать сколь угодно малым для достаточно больших N. Поэтому из (I6) для достаточно больших N имеем $\|A^{-1}\|_\infty \geq K_1$, где $K_1>0$ – любое наперед заданное число. Теорема полностью доказана.

Отметим, что теорема I при $n=1$ доказана в [2] (за исключением уточнения, касающегося строгого неравенства в правой части оценки (8)), но требования к A сформулированы в эквивалентных в этом случае терминах диагонального преобладания.

Для некоторых матриц оценки сверху и снизу для $\|A^{-1}\|_\infty$ совпадают и из неравенства (8) получается точное значение $\|A^{-1}\|_\infty$. Справедливы следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть все нули полинома $Q_{2n}(z)$ положительные и $Q_{2n}(1) \neq 0$. Тогда матрица A невырождена и

$$\| A^{-1} \|_\infty = |Q_{2n}(1)|^{-1} .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как все нули полинома $Q_{2n}(z)$ положительные и отличные от единицы, то из (II) имеем $\alpha_\nu < -2$, $\nu = 1,\dots,n$. Поэтому

$$\max_{0\leq k\leq N-1} \left[|a_{2n}| \prod_{\nu=1}^{n} \left|\alpha_\nu + 2\cos\frac{2\pi k}{N}\right| \right]^{-1} =$$

$$= \left[|a_{2n}| \prod_{\nu=1}^{n} |\alpha_\nu + 2| \right]^{-1} = |Q_{2n}(1)|^{-1} ,$$

$$|a_{2n}| \prod_{\nu=1}^{n} (|\alpha_\nu| - 2) = |Q_{2n}(1)| .$$

Учитывая эти соотношения, из (8) получаем утверждение теоремы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть все нули полинома $Q_{2n}(z)$ отрицательны и $Q_{2n}(-1) \neq 0$. Тогда матрица A невырождена и

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leq |Q_{2n}(-1)|^{-1}, \tag{17}$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда N четное.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Исходя из условия теоремы, в силу (11) имеем $\alpha_\nu > 2$, $\nu = 1, \ldots, n$. . Поэтому

$$\max_{0 \leq k \leq N-1} \left[|a_{2n}| \prod_{\nu=1}^{n} \left|\alpha_\nu + 2\cos\frac{2\pi k}{N}\right| \right]^{-1} = \left[|a_{2n}| \prod_{\nu=1}^{n} (\alpha_\nu - 2 + \varepsilon_N) \right]^{-1},$$

$$|a_{2n}| \prod_{\nu=1}^{n} (|\alpha_\nu| - 2) = |Q_{2n}(-1)|,$$

где $\varepsilon_N = 0$ при N четном и $\varepsilon_N = 2 - 2\cos(\pi/N)$ при N нечетном. Из (8) получаем

$$\left.\begin{cases} |Q_{2n}(-1)|^{-1}, & N \text{ четное}; \\ |a_{2n}|^{-1} \prod\limits_{\nu=1}^{n} (\alpha_\nu - 2 + \varepsilon_N)^{-1}, & N \text{ нечетное}; \end{cases}\right\} \leq \|A^{-1}\|_{\infty} \leq |Q_{2n}(-1)|^{-1}, \tag{18}$$

причем при N нечетном в правой части (18) имеет место строгое неравенство. Отсюда следует (17).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В условиях теоремы 3 имеем

$$\lim_{N \to \infty} \|A^{-1}\|_{\infty} = |Q_{2n}(-1)|^{-1}. \tag{19}$$

Это соотношение немедленно вытекает из (18). Из (19), в частности, следует, что оценку (17) нельзя улучшить одновременно для всех нечетных N.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Поскольку для симметрических вещественных матриц спектральный радиус совпадает со спектральной нормой [7], то теоремы 1–3 верны и для спектральной нормы матрицы A^{-1}.

В качестве примеров матриц, для которых выполнены условия теоремы 3, а следовательно, справедлива оценка (17), отметим матрицы, возникающие в задачах периодической сплайн-интерполяции на равномерной сетке [4,5,8]. В добавление к известным результатам по оценкам погрешности приближения сплайнами, заметим, что если при нахождении оценки погрешности используется норма обратной матрицы и матрица удовлетворяет условиям теоремы 3, то в некоторых случаях в неравенстве, которое получается для оценки погрешности, можно ставить знак строгого неравенства. Например, в неравенстве (9) работы [9] имеет место строгое неравенство при N нечетном и $\|f^{VI}\|_\infty \neq 0$.

Литература

1. МАРКУС М., МИНК Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. - М.: Наука, 1972. - 232 с.

2. МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Некоторые свойства трехдиагональных матриц и их применение к теории кубической сплайн-интерполяции //Методы сплайн-функций. - Новосибирск, 1975. - Вып. 65: Вычислительные системы. - С. 29-49.

3. АЛБЕРГ Дж., НИЛЬСОН Э., УОЛШ Дж. Теория сплайнов и ее приложения. - М.: Мир, 1972. - 316 с.

4. ALBASINY E.L. , HOSKINS W.D. Explicit error bounds for periodic spline of odd order on a uniform mesh //J.Inst. Math.Appl. - 1973. -Vol.12,N 3. - P. 303-318.

5. КИНДАЛЕВ Б.С. Асимптотика погрешности и суперсходимость периодических интерполяционных сплайнов четной степени //Сплайны в вычислительной математике. - Новосибирск, 1986. - Вып.115: Вычислительные системы. - С. 3-25.

6. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. - М.: Наука, 1980. - 352 с.

7. ЛАНКАСТЕР П. Теория матриц. - М.: Наука, 1982. - 272 с.

8. DUBEAU F. On band circulant matrices in the periodic spline interpolation theory //Linear Algebra and its Appl.-1985.-Vol.72.-P.177-182.

9. КАЛИЕВ П.У. О получении точных оценок погрешности интерполяции функций сплайнами пятой степени дефекта 1 на равномерной сетке //Сплайны в вычислительной математике. - Новосибирск, 1986. - Вып. 115: Вычислительные системы. - С. 26-40.

Поступила в ред.-изд.отд.
29 мая 1987 года