А П П Р О К С И М А Ц И Я   С П Л А Й Н А М И
(Вычислительные системы)
1987 год   Выпуск 121

УДК 519.652

ЛОКАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ КУБИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ С ЭЛЕМЕНТАМИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Ю.С. Завьялов

Задача интерполирования функции $f(x)$ кубическими сплайнами на сетке Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ сводится к решению системы $N+3$ линейных уравнений с трехдиагональной матрицей [1,гл.3]. Локальная аппроксимация состоит в вычислении коэффициентов b_i в разложении сплайна по базису из B-сплайнов

$$S(x) = \sum_{i=-1}^{N+1} b_i(f) B_i(x) \qquad (1)$$

через данные о функции на интервалах-носителях соответствующих B-сплайнов.

Положим [2-4]:

$$b_{-1} = f_0 - h_0 f_0' + \frac{h_0^2}{3} f_0'' , \qquad (2а)$$

$$b_i = f_i + \frac{h_i - h_{i-1}}{3} f_i' - \frac{h_i h_{i-1}}{6} f_i'', \quad i = 0, \ldots, N, \qquad (2б)$$

$$b_{N+1} = f_N + h_{N-1} f_N' + \frac{h_{N-1}^2}{3} f_N'' , \qquad (2в)$$

где $h_i = x_{i+1} - x_i$. Для интерполяционного сплайна $S^0(x)$ на местах f_i' и f_i'' стоят значения его производных m_i и M_i. Если f_i' и f_i'' - производные аппроксимируемой функции, то (1)-(2) представляют формулы локальной аппроксимации, точные на кубических многочленах. Это свойство сохраняется, если значения производных заменить их конечно-разностными аппроксимациями, порождаемыми интерполяционными многочленами Ньютона третьей степени. Приведем значения коэффициентов b_i для случая равномерной сетки Δ :

$$\bar{b}_{-1} = \frac{1}{6}(21f_0 - 28f_1 + 17f_2 - 4f_3), \tag{3а}$$

$$\bar{b}_0 = \frac{1}{6}(4f_0 + 5f_1 - 4f_2 + f_3), \tag{3б}$$

$$\bar{b}_i = \frac{1}{6}(-f_{i-1} + 8f_i - f_{i+1}), \quad i = 1,\ldots,N-1 . \tag{3в}$$

Формулы для $\bar{b}_N, \bar{b}_{N+1}$ симметричны формулам для $\bar{b}_0, \bar{b}_{-1}$ соответственно.

Как интерполяционные, так и аппроксимационные сплайны обеспечивают одинаковый порядок приближения для функций из одного и того же класса. Максимальный порядок достигается для функций $f(x) \in W^4_\infty$ и равен $O(H^4)$, $H = \max\limits_i h_i$. Но константы в оценках погрешностей для аппроксимационных сплайнов оказываются в несколько раз больше [I,4].

Это наглядно видно на асимптотических формулах сплайнов. При равномерной сетке узлов Δ для функций $f(x) \in W^6_\infty$ на интервалах $[x_i, x_{i+1}]$ имеем [I, с.230]:

$$S(x) = f(x) - \left[\beta_4(t) + \frac{1}{30} + c_0 + c_1(h)\right] \frac{h^4 f^{IV}(x)}{4!} +$$

$$+ 4\beta_5(t) \frac{h^5 f^{V}(x)}{5!} + O(h^6), \tag{4}$$

где $t = (x-x_i)/h$, а $\beta_4(t)$ и $\beta_5(t)$ - многочлены Бернулли, причем $0 \le \beta_4(t) + 1/30 = t^2(1-t)^2 \le 1/16$. Для интерполяционного сплайна, периодического или со специальными граничными условиями [I, с.23I], $c_0 = c_1(h) = 0$.

Коэффициенты аппроксимационного сплайна (2б) можно представить в виде $b_i = b_i^0 + \Delta b_i$, где $b_i^0 = f_i - h^2 M_i/6$ - коэффициенты интерполяционного сплайна, $\Delta b_i = h^2(M_i - f_i'')/6$. Известно [I,с.230], что $M_i - f_i'' = -(1/12)h^2 f_i^{IV} + O(h^4)$. Член Δb_i вносит поправку в асимптотическую формулу (4). Представляя $\Delta b_i = -(1/72)\,h^4[f^{IV}(x) + (x_i - x)f^{V}(x)] + O(h^6)$ и учитывая, что при подстановке в (I)

$\sum\limits_i (x_i - x) B_i(x) = 0$, находим, что в данном случае в (4) $c_0 = 1/3$, т.е. погрешность приближения увеличилась по сравнению с интерполяционным сплайном в пять раз.

При использовании коэффициентов (3) имеем асимптотическое разложение

$$\tilde{b}_i = f_i - \frac{h^2}{6} f_i'' - \frac{h^4}{72} f_i^{IV} + O(h^6), \quad i = 1, \ldots, N-1.$$

Отсюда видно, что по сравнению с разложением (2б) добавился еще один член порядка $O(h^4)$. Повторяя рассуждения, получаем, что в (4) стало $c_0 = 2/3$. В обоих случаях $c_1(h) = 0$ и не меняется коэффициент при h^5. Формулы (4) для коэффициентов (2) справедливы на отрезке $[x_1, x_{N-1}]$, где нет влияния нестандартно вычисляемых коэффициентов b_{-1} и b_{N+1}, а для коэффициентов (3) – на отрезке $[x_2, x_{N-2}]$.

Представляет интерес добиваться уменьшения погрешности локальной аппроксимации (при сохранении порядка относительно h) за счет усложнения формул (2). Примеры известны. Так, в ряде работ, в частности [I, гл. 9], исследованы квазиинтерполяция и квазинаилучшие равномерные приближения, отличающиеся от собственно интерполяции и наилучших равномерных приближений малыми порядка выше $O(h^4)$. В настоящей статье рассматриваются примеры, в которых для уменьшения погрешности используются элементы интерполяции.

I. <u>Аппроксимационно-интерполяционные формулы.</u> В работе [3] обсуждается вопрос, когда в задаче интерполирования разрешается в некоторых узлах заменять условия интерполяции локальной аппроксимацией. В этом случае система $N+3$ уравнений распадается на несколько подсистем меньшего порядка.

Предельный случай, когда вообще не требуется решать систем уравнений, возникает в следующей ситуации. Пусть число узлов сетки Δ нечетное ($N = 2n$). Коэффициенты b_{2i+1}, $i = 0, \ldots, n-1$, вычисляются по формулам (2б), а коэффициенты с четными номерами из условий интерполяции

$$b_{2i} = B_{2i}^{-1}(x_{2i}) [f_{2i} - b_{2i-1} B_{2i-1}(x_{2i}) - b_{2i+1} B_{2i+1}(x_{2i})], \quad i = 1, \ldots, n-1. \tag{5а}$$

Коэффициенты b_k, $k = -1, 0, N, N+1$, находятся из условий интерполяции в узлах x_0, x_1, x_{N-1}, x_N по формулам

$$b_0 = B_0^{-1}(x_1)[f_1 - b_1B_1(x_1) - b_2B_2(x_1)],$$

$$b_{-1} = 6[f_0 - b_0B_0(x_0) - b_1B_1(x_0)],$$

$$b_N = B_N^{-1}(x_{N-1})[f_{N-1} - b_{N-1}B_{N-1}(x_{N-1}) - b_{N-2}B_{N-2}(x_{N-1})], \tag{5б}$$

$$b_{N+1} = 6[f_N - b_NB_N(x_N) - b_{N-1}B_{N-1}(x_N)].$$

Здесь принято, что сетка вне отрезка $[a,b]$ продолжена с равными шагами h_0 и h_{N-1}.

Формулы (5а) используют известные коэффициенты b_{2i-1} и b_{2i+1} с двух сторон от точек интерполяции, а формулы (5б) – два коэффициента с одной стороны.

Асимптотическую формулу такого приближения можно получить, как и выше, используя сравнение коэффициентов b_i с коэффициентами b_i^0. Для промежутка $[x_{2i}, x_{2i+1}]$ находим

$$s(x) = f(x) - \left[\beta_4(t) + \frac{1}{30} + \gamma_4(t)\right]\frac{h^4 f^{IV}(x)}{4!} +$$

$$+ [4\beta_5(t) + \gamma_5(t)]\frac{h^5 f^V(x)}{5!} + O(h^6), \tag{6}$$

где $\gamma_4(t) = \frac{t^2}{2}\left(1 - \frac{2t}{3}\right)$, $\gamma_5(t) = -\frac{t}{3}(1 - 2t^2 + t^3)$. Для промежутка $[x_{2i-1}, x_{2i}]$ $\gamma_4(t)$ и $\gamma_5(t)$ заменяются на $\gamma_4(1-t)$ и $\gamma_5(1-t)$.

Если коэффициенты с нечетными номерами вычисляются по формулам (3), то в (6) функции $\gamma_4(t)$ и $\gamma_5(t)$ умножаются на 2. В обоих случаях наибольшее значение коэффициента при h^4 примерно вдвое меньше его значения в (4), где $c_0 = 1/3$ и 2/3 соответственно.

2. <u>Аппроксимационная формула, интерполирующая заданную элементарную функцию $\varphi(x)$ на сетке Δ.</u>

В формулы (2) будем добавлять справа по одному слагаемому:

$$\hat{b}_{-1} = b_{-1}(f) + a_{-1}f_0^{IV}/\varphi_0^{IV}, \tag{7а}$$

$$\hat{b}_i = b_i(f) + a_i f_i^{IV}/\varphi_i^{IV}, \quad i = 0,\dots,N, \tag{7б}$$

$$\hat{b}_{N+1} = b_{N+1}(f) + a_{N+1}f_N^{IV}/\varphi_N^{IV}. \tag{7в}$$

Очевидно, формула (I) с такими коэффициентами остается точной на кубических многочленах, ибо $P^{IV}(x) = 0$. При этом предполагается, что $\varphi^{IV}(x_i) \neq 0$.

Величины a_i будем определять из условий интерполяции сплайном $S(x)$ (I) функции $\varphi(x)$ в узлах сетки. Это дает уравнения

$$\sum_{k=i-1}^{i+1} a_k B_k(x_i) = \varphi(x_i) - \sum_{k=i-1}^{i+1} b_k(\varphi) B_k(x_i), \quad i = 0,\dots,N. \tag{8}$$

Если $\varphi(x)$ - периодическая функция, то $i = 1,\dots,N$ и матрица системы есть интерполяционная матрица. В непериодическом случае систему нужно замкнуть какими-либо граничными уравнениями, например

$$\sum_{k=i-1}^{i+1} a_k B_k'(x_i) = \varphi'(x_i) - \sum_{k=i-1}^{i+1} b_k(\varphi) B_k'(x_i), \qquad i = 0,N. \tag{9}$$

В чистой интерполяции выбор граничных условий влияет на порядок приближения вблизи концов отрезка $[a,b]$. Здесь это также следует иметь в виду, хотя выполнить необходимые требования значительно проще. Правые части уравнений (8) представляют собой значения погрешности аппроксимационной формулы (I) с коэффициентами (2) для функции $\varphi(x)$ в узлах сетки Δ. Они являются малыми порядка $O(H^4)$. Поскольку $B_k(x_i)$ - величины порядка $O(1)$, то неизвестные a_i имеют порядок $O(H^4)$. Граничные уравнения можно задавать достаточно произвольно, лишь бы порядки малости левых и правых частей были одинаковыми, а матрица системы получалась бы невырожденной. Эти требования выполняются для уравнений (9).

3. Схема с разделенными разностями. Формулы (7) в этом случае заменяются формулами:

$$\hat{b}_i = \bar{b}_i(f) + a_i f[x_0,\dots,x_4]/\varphi[x_0,\dots,x_4], \; i = -1,0,1, \tag{10а}$$

$$\hat{b}_i = \bar{b}_i(f) + a_i f[x_{i-2},\dots,x_{i+2}]/\varphi[x_{i-2},\dots,x_{i+2}],$$
$$i = 2,\dots,N-2, \tag{10б}$$

$$\hat{b}_i = \bar{b}_i(f) + a_i f[x_{N-4},\dots,x_N]/\varphi[x_{N-4},\dots,x_N],$$
$$i = N-1,N,N+1. \tag{10в}$$

При равномерной сетке узлов коэффициенты $\bar{b}_i(f)$ и $\bar{b}_i(\varphi)$ вычисляются по формулам (3). Система уравнений (8) переходит в систему

$$a_{i-1}+4a_i+a_{i+1}=0\,, \qquad i=0,1\,, \tag{11а}$$

$$a_{i-1}+4a_i+a_{i+1}=4h^4\varphi[x_{i-2},\ldots,x_{i+2}]\,,$$

$$i=2,\ldots,N-2\,, \tag{11б}$$

$$a_{i-1}+4a_i+a_{i+1}=0\,, \qquad i=N-1,N\,. \tag{11в}$$

Рассмотрим несколько примеров, когда удается явно выписать значения величин a_i, удовлетворяющих уравнениям (II), периодическим или со специальными граничными условиями.

4. <u>Формулы, интерполирующие степенную функцию $\varphi(x)=x^4$. Квазиинтерполяция</u>. В этом случае в (II) $\varphi[x_{i-2},\ldots,x_{i+2}]=1$. Уравнения (II) удовлетворяются следующими значениями неизвестных:

$$a_i=2h^4/3\,, \quad i=1,\ldots,N-1\,;$$

$$a_0=a_N=-10h^4/3\,;$$

$$a_{-1}=a_{N+1}=38h^4/3\,.$$

Формулы a_{-1} и a_{N+1}, по существу, являются специальными граничными условиями к уравнениям интерполяции (II).

Коэффициенты (I0) получают значения

$$\hat{b}_i=\bar{b}_i(f)+d_ih^4f[x_0,\ldots,x_4]\,, \quad i=-1,0,1\,, \tag{12а}$$

где $d_{-1}=38/3$, $d_0=-10/3$, $d_1=2/3$;

$$\hat{b}_i=\bar{b}_i(f)+\frac{2h^4}{3}f[x_{i-2},\ldots,x_{i+2}]\,, \quad i=2,\ldots,N-2\,; \tag{12б}$$

$$\hat{b}_i=\bar{b}_i(f)+d_ih^4f[x_{N-4},\ldots,x_N]\,, \quad i=N-1,N,N+1\,, \tag{12в}$$

где $d_{N-1}=2/3$, $d_N=-10/3$, $d_{N+1}=38/3$.

В асимптотической формуле (4) за счет членов $\bar{b}_i$ имеем $c_0=2/3$. В дополнительных членах в (I2) $f[x_{i-2},\ldots,x_{i+2}]=\frac{1}{4!}f_i^{IV}+O(h^2)$. За счет них в (5) $c_1(h)=-2/3$ так, что $c_0+c_1(h)=0$. Но тогда асимптотическая формула локально аппроксимационного сплайн -

на с точностью до малых $O(h^6)$ совпадает с формулой интерполяционного сплайна. Это для отрезка $[x_3, x_{N-3}]$. Поэтому схема локальной аппроксимации названа квазиинтерполяцией (см., например, [I, гл. 9]).

В случае неравномерной сетки узлов анализ существенно усложняется, ибо приходится решать систему уравнений (8)-(9). Однако общие выводы сохраняются, за исключением того, что в асимптотической формуле будут изменяться коэффициенты при h^5.

5. Формулы, интерполирующие тригонометрические функции. Положим $\varphi(x)= e^{j\alpha x}=\cos\alpha x + j\sin\alpha x$ (j - мнимая единица). Будем аппроксимировать периодическую комплексную функцию вещественного аргумента $f(x)$. Задача определения коэффициентов $\hat{b}_i$ сводится к нахождению комплексного решения a_i уравнений (IIб) для $i = 1,\dots$ $\dots, N$ и вычислениям по формулам (IOб).

В уравнениях (IIб) $\varphi[x_{i-2},\dots,x_{i+2}]= e^{j\alpha x_i}(1-\cos\alpha h)^2/6h^4$. Их решение есть

$$a_i = \frac{(1-\cos\alpha h)^2}{3(2+\cos\alpha h)}\, e^{j\alpha x_i}, \quad i = 1,\dots, N .$$

Коэффициенты (IOб) суть

$$\hat{b}_i= \bar{b}_i(f) + \frac{2h^4}{2+\cos\alpha h}\, f[x_{i-2},\dots, x_{i+2}] , \quad i = 1,\dots,N. \qquad (13)$$

Формулы аппроксимации с такими коэффициентами интерполируют функцию $e^{j\alpha x}$, а значит, и функции $\cos\alpha x$ и $\sin\alpha x$.

В асимптотической формуле (4) будет

$$c_0 + c_1(h) = \frac{2}{3} - \frac{2}{2+\cos\alpha h} = O(h^2),$$

т.е. снова с точностью до малых порядка $O(h^6)$ она совпадает с формулой интерполяционного сплайна, что, собственно, и следовало ожидать.

6. Формулы, интерполирующие экспоненту $\varphi(x) = e^{\alpha x}$. В этом случае $\varphi[x_{i-2},\dots, x_{i+2}]= e^{\alpha x_i}(1-\operatorname{ch}\alpha h)^2/6h^4$.

Введем обозначение

$$d = \frac{(1-\operatorname{ch}\alpha h)^2}{3(2+\operatorname{ch}\alpha h)} .$$

Уравнения (II) удовлетворяются следующими значениями a_i :

$$a_{-1}= e^{\alpha x_1}d(15+ 4e^{\alpha h}), \qquad a_0= -e^{\alpha x_1}d(4+ e^{\alpha h}) ;$$

$$a_i= e^{\alpha x_i} d , \qquad i = 1,\dots, N-1;$$

$$a_N= -e^{\alpha x_{N-1}} d(4+ e^{-\alpha h}), \qquad a_{N+1}= e^{\alpha x_{N-1}} d(15+ 4e^{-\alpha h}).$$

Формулы a_{-1} и a_{N+1} , как и в случае функции x^4 , играют роль граничных условий к уравнениям интерполяции (II).

Коэффициенты b_i (IO) принимают значения:

$$\hat{b}_i= \bar{b}_i(f) + \frac{2h^4 d_i}{2+\mathrm{ch}\ \alpha h} f[x_0,\dots, x_4] , \quad i = -1,0,1, \tag{14а}$$

где $\quad d_{-1}= 4+15e^{-\alpha h}, \quad d_0= -(1+4e^{-\alpha h}), \quad d_1= e^{-\alpha h}$,

$$\hat{b}_i= \bar{b}_i(f) + \frac{2h^4}{2+\mathrm{ch}\,\alpha h} f[x_{i-2},\dots,x_{i+2}], \quad i=2,\dots, N-2, \tag{14б}$$

$$\hat{b}_i= \bar{b}_i(f) + \frac{2h^4 d_i}{2+\mathrm{ch}\ \alpha h} f[x_{N-4},\dots, x_N], \quad i = N-1,N,N+1, \tag{14в}$$

где $\quad d_{N-1}= e^{\alpha h}, \quad d_N= -(1+4e^{\alpha h}), \quad d_{N+1}= 4+15e^{\alpha h}.$

В асимптотической формуле (4) для отрезка $[x_3,x_{N-3}]$

$$c_0+ c_1(h) = \frac{2}{3} - \frac{2}{2+\mathrm{ch}\ \alpha h} = O(h^2).$$

Снова имеем квазиинтерполяцию.

7. Практические рекомендации. Схемы локальной аппроксимации, интерполирующие заданные функции, следует применять с целью уменьшения погрешности приближения. Они особенно уместны при обработке данных с одной и той же сеткой значений независимой переменной. В этом случае величины a_i вычисляются из системы уравнений (8)-(9) один раз, а затем многократно используются в формулах (6).

Если аппроксимируемая функция представлена только своими значениями на сетке, то встает вопрос: какую из схем предпочесть? В общем случае следует использовать схему, интерполирующую степенную функцию x^4. Если же заданные значения близки к значениям ка-

Т а б л и ц а

Номера точек	e^x	e^x_1	e^x_{10}	e^x_{100}
0	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
1	1.05404	1.09401	1.07349	1.05470
2	1.11100	1.10717	1.12752	1.11207
3	1.17104	1.19305	1.17238	1.17085
4	1.23433	1.20463	1.22089	1.23046
5	1.30103	1.30000	1.30111	1.29175
6	1.37134	1.39583	1.37700	1.35699
7	1.44545	1.40463	1.42206	1.42894
8	1.52356	1.49768	1.49384	1.50950
9	1.60590	1.60046	1.59763	1.59861
10	1.69268	1.70000	1.70120	1.69410
11	1.78416	1.80000	1.80021	1.79268
12	1.88058	1.90000	1.89971	1.89162
13	1.98221	2.00000	2.00019	1.99039
14	2.08933	2.10000	2.10117	2.09111
15	2.20224	2.20046	2.19791	2.19758
16	2.32125	2.29776	2.29405	2.31338
17	2.44669	2.40442	2.42009	2.43996
18	2.57878	2.59538	2.57641	2.57594
19	2.71828	2.71828	2.71828	2.71828

кой-либо элементарной функции $\varphi(x)$, то следует предпочесть схемы с последней. В этом случае можно ожидать, что в асимптотической формуле (4) уменьшатся коэффициенты и при степенях $h^m, m>4$. Но этот вопрос требует специального рассмотрения.

Наконец, формулы локальной аппроксимации, интерполирующие заданные функции, можно использовать для сглаживания исходных данных. Оставляя в стороне подробный анализ, приведем результаты численного эксперимента.

Функция e^x рассматривалась на отрезке $[0,1]$, где задавалась сетка с шагом $h = 1/19$. Значения функции на сетке округлялись с точностью до 0,05 и затем обрабатывались по формулам (I), (I4), только значения на концах отрезка фиксировались точно. В таблице даны точные значения функции на сетке и результаты сглаживания e^x_1, e^x_{10}, e^x_{100} при одной, десяти и ста итерациях соответственно.

Литература

I. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. - М.: Наука, 1980. - 352 с.

2. ЖАНЛАВ Т. О представлении интерполяционных кубических сплайнов через В-сплайны //Методы сплайн-функций. - Новосибирск, 1981. -Вып. 87: Вычислительные системы. - С. 3-10.

3. МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Об интерполяции и аппроксимации сплайнами //Проблемы обработки информации. - Новосибирск,1983.-Вып.100: Вычислительные системы. - С. 83-100.

4. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., ЛЕУС В.А., СКОРОСПЕЛОВ В.А. Сплайны в инженерной геометрии. -М.: Машиностроение, 1985. - 222 с.

Поступила в ред.-изд.отд.
16 сентября 1987 года