А П П Р О К С И М А Ц И Я   С П Л А Й Н А М И
(Вычислительные системы)
1987 год Выпуск 121

УДК 519.651

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ЛОКАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ КУБИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ. ПРОСТЕЙШАЯ ФОРМУЛА

Т.Э. Овчинникова

Введение

Пусть на отрезке $[a,b]$ в узлах сетки Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ известны значения $f_i = f(x_i)$ функции $f(x)$. Дополним сетку Δ узлами $x_{-3} \le x_{-2} \le x_{-1} \le x_0$, $x_n \le x_{n+1} \le x_{n+2} \le x_{n+3}$. Формулы локальной аппроксимации кубическими сплайнами имеют вид:

$$S(x) = \sum_{k=-1}^{n+1} \alpha_k(f) B_k(x), \tag{1}$$

где $B_k(x)$ – нормализованные кубические B-сплайны с носителем $[x_{k-2}, x_{k+2}]$; α_k – коэффициенты, зависящие от нескольких значений f_i аппроксимируемой функции [1]. Простейшая формула локальной аппроксимации получается, если положить $\alpha_k = f_k$, $k = 0,1,\ldots,n$. Коэффициенты $\alpha_{-1}, \alpha_{n+1}$ будем определять, как это предлагается в [2], из условий интерполяции $S(x_j) = f_j$, $j = 0,n$, из которых имеем

$$\begin{aligned} \alpha_{-1} &= f_0 - (f_1 - f_0)\frac{B_1(x_0)}{B_{-1}(x_0)}, \\ \alpha_{n+1} &= f_n + (f_n - f_{n-1})\frac{B_{n-1}(x_n)}{B_{n+1}(x_n)}. \end{aligned} \tag{2}$$

Узлы x_j, $j = -3,-2,-1,n+1,n+2,n+3$, могут быть взяты произвольными. На практике наиболее употребительны следующие три варианта расширения сетки Δ:

а) $h_{-2} = h_{-1} = 0$, $h_{n+1} = h_n = 0$;

б) $h_{-2} = h_{-1} = h_0$, $h_{n+1} = h_n = h_{n-1}$;

в) $h_{-2} = h_1$, $h_{-1} = h_0$, $h_{n+1} = h_{n-2}$, $h_n = h_{n-1}$,

где $h_j = x_{j+1} - x_j$. Всюду в дальнейшем узлы x_{-3}, x_{n+3} не присутствуют в формулах, поэтому мы не оговариваем их расположение. Отметим, что для случая "а" $\alpha_{-1} = f_0$, $\alpha_{n+1} = f_n$.

На равномерной сетке с шагом h простейший аппроксимационный сплайн приближает функцию $f \in W^2_\infty[a,b]$ с порядком $O(h^2)$, а ее производную – с порядком $O(h)$. Точные оценки погрешности приближения для различных классов функций, заданных на равномерной сетке, получены в [I].

Нашей целью является исследование погрешности простейшей локальной аппроксимации на произвольной неравномерной сетке. В §I в предположении $f \in W^1_\infty[a,b]$ получена точная оценка погрешности приближения $\| S-f \|_C \le KH \|f'\|_\infty$, где $K \approx 0{,}59468$, $H = \max\limits_k h_k$.

Для более гладких функций, например, $f \in W^2_\infty[a,b]$, справедливо равенство $S(x) = f(x) + \varphi(x)f'(x) + O(H^2)$.

В §2 найдена точная оценка главного члена погрешности – функции $|\varphi(x)|$. В результате получена точная асимптотическая оценка $\|S-f\|_C \le \bar{K}H\|f'\|_C + O(H^2)$, $\bar{K} \approx 0{,}I994I$.

Отметим, что при выводе оценок в некоторых случаях использовались численные расчеты на ЭВМ.

Из приведенных результатов, в частности, следует, что порядок приближения для простейшей аппроксимации кубическими сплайнами для произвольной неравномерной сетки не превосходит $O(H)$. Точность $O(H^2)$ возможна только при дополнительных ограничениях на сетку, например, если соседние шаги сетки мало отличаются друг от друга, т.е. сетка близка к равномерной. Сформулированное в [3] условие достижения точности $O(H^2)$, требующее равномерной ограниченности $|S''(x)|$ при $H \to 0$, по существу, носит именно такой характер.

§I. Точная оценка погрешности

Обозначим $h_k = x_{k+1} - x_k$, $\lambda_k = h_k/(h_k + h_{k-1})$, $\mu_k = 1 - \lambda_k$, $\gamma_k = h_k/(h_{k-1} + h_k + h_{k+1})$, $t = (x - x_k)/h_k$, $x \in [x_k, x_{k+1}]$. В дальнейшем нам потребуются выражения для кубических В-сплайнов. Воспользуемся представлением кубического сплайна в виде [I]:

$$S(x) = \varphi_1(t)S_i + \varphi_2(t)S_{i+1} + h_i\varphi_3(t)S'_i + h_i\varphi_4(t)S'_{i+1}, \quad (3)$$

где $S_k = S(x_k)$, $S'_k = S'(x_k)$, $\varphi_1(t) = (1-t)^2(1+2t)$, $\varphi_2(t) = t^2(3-2t)$, $\varphi_3(t) = t(1-t)^2$, $\varphi_4(t) = -t^2(1-t)$. Подставляя в (3) значения B-сплайнов и их производных в узлах x_i, x_{i+1} [I,с.I40], получаем

$$\left.\begin{aligned} B_{i-1}(x) &= \frac{(1-t)^3 \lambda_i h_i}{h_{i-2}+h_{i-1}+h_i}, \\ B_i(x) &= 1 - C_i(x) - B_{i-1}(x), \\ B_{i+1}(x) &= C_i(x) - B_{i+2}(x), \\ B_{i+2}(x) &= \frac{t^3 \mu_{i+1} h_i}{h_i + h_{i+1} + h_{i+2}}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где

$$C_i(x) = \gamma_i\left[(1-t)^3\lambda_i - t^3\mu_{i+1} + 3t\right] + \frac{h_{i-1} - h_i}{h_{i-1}+h_i+h_{i+1}}.$$

ТЕОРЕМА I. Если $S(x)$ – простейший аппроксимационный сплайн для функции $f \in W^1_\infty[a,b]$ и продолжение сетки удовлетворяет одному из условий "а"-"в", то $\|S-f\|_C \le KH\|f'\|_\infty$, где $K = \max\limits_{t\in[0,1]} (3t^4-5t^3+t+1)/2 \approx 0{,}59468$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как следует из формулы (I), остаточный член аппроксимации $R(x) = S(x) - f(x)$ можно представить в виде

$$R(x) = \sum_{k=-1}^{n+1} \left[\alpha_k - f(x)\right] B_k(x). \tag{5}$$

Пусть $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $1 \le i \le n-2$. Тогда

$$R(x) = \sum_{k=i-1}^{i+2} \left[f_k - f(x)\right] B_k(x). \tag{6}$$

Подставляя в (6) выражения

$$f_k = f(x) + \int_x^{x_k} f'(v)dv, \tag{7}$$

имеем

$$R(x) = -B_{i-1}(x)\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(v)dv - [B_{i-1}(x) + B_i(x)]\int_{x_i}^{x} f'(v)dv +$$

$$+ [B_{i+1}(x) + B_{i+2}(x)]\int_{x}^{x_{i+1}} f'(v)dv + B_{i+2}(x)\int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}} f'(v)dv.$$

Отсюда, используя неравенство Гёльдера, получаем

$$|R(x)| \le \|f'\|_\infty \, \phi(t), \qquad (8)$$

где $\phi(t) = th_i + h_{i-1}B_{i-1}(x) + (1-2t)h_iC_i(x) + h_{i+1}B_{i+2}(x)$. Учитывая (4), находим

$$\phi(t) = (1-2t)h_i\gamma_i\left[(1-t)^3\lambda_i - t^3\mu_{i+1}\right] + (1-t)^3\lambda_i h_i\gamma_{i-1} +$$
$$+ t^3\mu_{i+1}h_i\gamma_{i+1} + \gamma_i\left[6t(1-t)h_i + t(h_{i+1}-h_i) + (1-t)(h_{i-1}-h_i)\right]. \qquad (9)$$

Остается оценить $\max\limits_{t,h_k} \phi(t)$. Поскольку шаги h_{i-2}, h_{i+2} входят только в знаменатели коэффициентов γ_{i-1}, γ_{i+1}, то ϕ является убывающей функцией по этим переменным, поэтому ее максимум достигается при $h_{i-2} = h_{i+2} = 0$. Соотношение между остальными шагами в точке максимума было установлено путем численных расчетов на ЭВМ и оказалось следующим: $h_i = h_{i-1} = H$, $h_{i+1} = 0$. Функция $\phi(t)$ при таких условиях принимает вид $\phi(t) = H(3t^4-5t^3+t+1)/2$. В итоге $\max\phi(t) = \phi(t^*) \approx 0{,}59468H$, где $t^* \approx 0{,}29545$ – положительный корень уравнения $\phi'(t) = 0$.

В результате получена оценка на промежутке $[x_1, x_{n-1}]$. Рассмотрим теперь случай $x \in [x_0, x_1]$ (по соображениям симметрии все проделанные рассуждения будут верны и при $x \in [x_{n-1}, x_n]$).

Если используется продолжение сетки, удовлетворяющее соотношениям "а", то при $x \in [x_0, x_1]$ оценка остаточного члена аппроксимации определяется формулами (8),(9). Поэтому оценка, полученная для промежутка $[x_1, x_{n-1}]$, справедлива и в данном случае.

Далее,покажем, что в случаях "б" и "в" справедлива оценка

$$|R(x)| \le \|f'\|_\infty \phi_0(t), \quad x \in [x_0, x_1], \qquad (10)$$

где

$$\psi_0(t) = (1-2t)\frac{h_0^2}{2h_0+h_1}(3t-t^3\mu_1) + t^3h_0\mu_1\gamma_1 + th_0 . \qquad (11)$$

Действительно, для продолжения сетки по правилу "б" из (2), (4) имеем

$$\alpha_{-1} = f_0 + (f_0-f_1)\frac{3h_0}{2h_0+h_1} . \qquad (12)$$

Поэтому из (5) при $x \in [x_0,x_1]$ получаем

$$R(x) = \left[f_0 - f(x) + (f_0-f_1)\frac{3h_0}{2h_0+h_1}\right]B_{-1}(x) + \\ + \sum_{k=0}^{2}\left[f_k - f(x)\right]B_k(x) . \qquad (13)$$

Подставляя сюда разложения (7) и используя затем неравенство Гельдера, находим $|R(x)| \le \|f'\|_\infty \psi_0(t)$, где

$$\psi_0(t) = th_0[1-Q(x)] + (1-t)h_0|Q(x)| + h_1B_2(x),$$

$$Q(x) = C_0(x) - \frac{3h_0}{2h_0+h_1}B_{-1}(x).$$

Нетрудно убедиться, что $Q(x) \ge 0$, и в итоге получаем формулу (II).

Для сетки с продолжением "в" имеем

$$\alpha_{-1} = 2f_0 - f_1 , \qquad (14)$$

и повторяя рассуждения, проделанные для случая "б", получаем $|R(x)| \le \|f'\|_\infty \psi_1(t)$, где $\psi_1(t) = th_0[1-C_0(x) + B_{-1}(x)] + (1-t)h_0|C_0(x) - B_{-1}(x)| + h_1B_2(x)$. Учитывая, что $C_0(x)-B_{-1}(x) = h_0(3t-t^3\mu_1)/(2h_0+h_1) \ge 0$, и принимая во внимание (4), получаем $\psi_1(t) = \psi_0(t)$.

Таким образом, оценка (I0) доказана. Остается показать, что $\max_{t,h_k} \psi_0(t) < HK$, где $K = 0{,}59468$.

Прежде всего заметим, что ψ_0 является убывающей функцией от переменной h_2, поэтому можно положить $h_2 = 0$. Введем обозначения

$z = h_0/H$, $y = h_1/H$, $\tilde{\psi}_0 = \psi_0/H$. Из (II) получаем

$$\tilde{\psi}_0(t) = \frac{(1-2t)z^2}{2z+y}\left(3t - \frac{t^3 z}{z+y}\right) + \frac{t^3 z^2 y}{(z+y)^2} + tz.$$

Так как $\tilde{\psi}_0$ является однородной функцией переменных y, z, то максимум ее достигается на границе области изменения этих переменных. При $z = 0$ $\tilde{\psi}_0 \equiv 0$, поэтому надо рассмотреть только три случая: $z = I$; $y = 0$; $y = I$. Численные расчеты, выполненные на ЭВМ, показывают, что в точке максимума $z=y=1$. Функция при этих условиях имеет вид $\tilde{\psi}_0(t) = (4t^4+t^3-24t^2+24t)/12$, а ее производная $\tilde{\psi}_0'(t) = (16t^3+3t^2-48t+24)/12$. Ясно, что если $t^2-16t+8 \geq 0$, то $\tilde{\psi}_0'(t) \geq 0$. Это неравенство выполняется при $t \leq t_0 = 8-2\sqrt{14}$, где t_0-меньший из корней уравнения $t^2-16t+8 = 0$. Так как $t_0 > 0,6$, то на отрезке $[0, 0,6]$ функция $\tilde{\psi}_0$ возрастает, а $\tilde{\psi}_0(0,6) = 0,5412 < K$.

С другой стороны, поскольку $12\tilde{\psi}_0'(t) \leq 19t^2-48t+24 = \chi(t)$, то при условии $\chi(t) < 0$ функция $\tilde{\psi}_0$ убывает. Так как $\chi(1) < 0$, $\chi(0,7) < 0$ и $\chi(t)$-выпуклая функция, то $\chi(t) < 0$ на всем отрезке $[0,7, 1]$, т.е. $\tilde{\psi}_0$ здесь убывает и $\tilde{\psi}_0(t) \leq \tilde{\psi}_0(1) = 5/16 < K$.

Для того чтобы оценить функцию $\tilde{\psi}_0$ на отрезке $[0,6, 0,7]$, перепишем ее в виде $\tilde{\psi}_0(t) = [t^3(1+4t) + 24t(1-t)]/2$. Очевидно, $24t(1-t) \leq 5,76$, $t^3(1+4t) < 1,32$ при $t \in [0,6, 0,7]$. В результате $\tilde{\psi}_0(t) \leq (5,76 + 1,32)/12 = 0,59 < K$. Теорема доказана.

§2. Точная асимптотическая оценка

Следующая теорема дает представление о поведении погрешности приближения для простейшей аппроксимации (I) при повышении требований к гладкости $f(x)$. В частности, из приведенных результатов видно, что на неравномерной сетке максимальный порядок точности простейшей аппроксимации есть $O(H)$.

ТЕОРЕМА 2. Если $S(x)$ - простейший аппроксимационный сплайн для функции $f \in W^2_\infty[a,b]$, а продолжение сетки удовлетворяет одному из условий "а"-"в", то

$$\|S-f\|_C \le H\bar{K}\,\|f'\|_C + O(H^2), \tag{15}$$

где $\bar{K} = (18 + 8\sqrt{2})/147 \approx 0{,}19941$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $1 \le i \le r-2$. Остаточный член аппроксимации в этом случае определяется выражением (6). Подставляя в эту формулу разложения

$$f_k = f(x) + (x_k-x)f'(x) + O\left[(x_k-x)^2\right], \tag{I6}$$

получаем

$$S(x) = f(x) + \varphi(t)f'(x) + O(H^2), \tag{I7}$$

где $\varphi(t) = th_i + h_{i-1}B_{i-1}(x) + h_iC_i(x) + h_{i+1}B_{i+2}(x)$, $t = (x-x_i)/h_i$. С учетом (4) функция $\varphi(t)$ приводится к виду

$$\begin{aligned}\varphi(t) = {} & t^3\mu_{i+1}h_i(\gamma_{i+1}-\gamma_i) + (1-t)^3\lambda_i h_i(\gamma_i - \gamma_{i-1}) + \\ & + \gamma_i[t(h_i-h_{i+1}) + (1-t)(h_{i-1}- h_i)] .\end{aligned} \tag{I8}$$

Остается найти $\bar{K} = \max\limits_{t,h_k} |\tilde{\varphi}(t)|$, $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t)/H$. Как нетрудно заметить, $\tilde{\varphi}(t, h_{i-2}, h_{i-1}, h_i, h_{i+1}, h_{i+2}) = -\tilde{\varphi}(1-t, h_{i+2}, h_{i+1}, h_i, h_{i-1}, h_{i-2})$, поэтому $\max|\tilde{\varphi}(t)| = \max\tilde{\varphi}(t) = -\min\tilde{\varphi}(t)$. Численные расчеты, произведенные на ЭВМ, показывают, что $\tilde{\varphi}(t)$ достигает максимального значения при $h_{i-2} = h_{i-1} = h_i = H$, $h_{i+1} = 0$. При этих условиях она принимает вид $\tilde{\varphi}(t) = [6t(1-t^2) + (1-t)^3]/12$, т.е. $\max\tilde{\varphi}(t) = \tilde{\varphi}(t^*) = (18+8\sqrt{2})/147$, где $t^* = (1+2\sqrt{2})/7$ – положительный корень уравнения $\tilde{\varphi}'(t) = 0$.

Пусть теперь $x \in [x_0, x_1]$. При условии "а" мы имеем дело с частным случаем асимптотики (I7), (I8), следовательно, утверждение теоремы остается справедливым.

Покажем, что для продолжений "б" и "в" справедлива следующая асимптотическая формула:

$$S(x) = f(x) + \varphi_0(t)f'(x) + O(H^2), \tag{I9}$$

где

$$\varphi_0(t) = \frac{th_0(h_0 - h_1)}{2h_0 + h_1} + t^3\mu_1\left(\gamma_1 - \frac{h_0}{2h_0 + h_1}\right). \tag{20}$$

При условии "б" коэффициент α_{-1} определяется формулой (I2). Используя разложения (I6) для f_0 и f_1, имеем

$$\alpha_{-1} - f(x) = -f'(x)h_0\left(t + \frac{3h_0}{2h_0 + h_1}\right).$$

Подставляя это выражение и соотношения (16) в (13) и учитывая (4), получаем (20).

Совершенно аналогично для продолжения сетки по правилу "в", исходя из (14), имеем соотношение $\alpha_{-1} - f(x) = f'(x)(1+t)h_0 + O(H^2)$, использование которого в (5) с последующим применением разложений (16) приводит к представлению (19), (20).

Осталось найти $\max\limits_{t,h_k} |\varphi_0(t)|$. Обозначим $v = h_2/H$, $y = h_1/H$, $z = h_0/H$, $\tilde{\varphi}_0(t) = \varphi_0(t)/H$. Тогда

$$\tilde{\varphi}_0(t) = \frac{tz(z-y)}{2z+y} + \frac{t^3z^2}{z+y}\left(\frac{y}{z+y+v} - \frac{z}{2z+y}\right).$$

Поскольку функция $\tilde{\varphi}_0$ принимает и положительные и отрицательные значения, то $\max|\tilde{\varphi}_0(t)| = \max\{M,-m\}$, где $M = \max\tilde{\varphi}_0(t)$, $m = \min\tilde{\varphi}_0(t)$.

Сначала определим величину M. Так как $\tilde{\varphi}_0$ - убывающая функция по переменной v, можно положить $v = 0$. Тогда

$$\tilde{\varphi}_0(t) = \chi(t,y,z) = \frac{tz(z-y)}{2z+y} + \frac{t^3z^2}{z+y}\left(\frac{y}{z+y} - \frac{z}{2z+y}\right).$$

Функция χ является однородной по переменным y,z, следовательно, она не имеет внутренних точек экстремума в области их изменения. Учитывая, что $\chi \equiv 0$ при $z=0$, достаточно рассмотреть три граничных случая: $y = 0$; $y = 1$; $z = 1$.

При $y=0$ имеем $\chi(t,0,z) = z(t - t^3)/2$, $\max\limits_{t,z} \chi(t,0,z) = \max\limits_{t}(t-t^3)/2 = \sqrt{3}/9$.

При $y = 1$:

$$\chi(t,1,z) = \frac{tz(z-1)}{2z+1} + \frac{t^3z^2(1+z-z^2)}{(z+1)^2(2z+1)}.$$

Так как

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = \frac{6z^2(1+z-z^2)}{(z+1)^2(2z+1)} \geq 0,$$

то

$$\max \chi(t,1,z) = \chi(1,1,z) \le \chi_0(z) = \frac{z^2(1+z-z^2)}{(z+1)^2(2z+1)},$$

а поскольку

$$\chi_0(z) - \frac{1}{6} = \frac{-6z^4 + 2z^2(z-1) + (z^2-1)}{6(z+1)^2\,(2z+1)} \le 0,$$

то $\max \chi(t,1,z) \le 1/6 < \sqrt{3}/9$.

Рассмотрим случай $z=1$. Если $y^2+y-1 \ge 0$, то, очевидно, $\max\limits_t \chi(t,y,1) = \chi(1,y,1)$, и учитывая, что

$$6\chi(1,y,1) = -\frac{(1-2y)^2\,(y+2) + 3y^2}{(1+y)^2\,(y+2)} < 0,$$

получаем $\chi(t,y,1) < 1/6$. Пусть $y^2+y-1 < 0$. Имеем $\chi(t,y,1) = -at^3 + bt$, , где

$$a = \frac{1-y-y^2}{(1+y)^2\,(2+y)} > 0, \quad b = \frac{1-y}{2+y} > 0.$$

Положительным корнем уравнения $\frac{\partial\chi}{\partial t}=0$ является $t=t^* = \sqrt{b/(3a)}$. Если $b/a \ge 3$, то максимум χ достигается при $t=1$, а в этом случае, как уже было показано, он не превосходит $\sqrt{3}/9$.

Из условия $b/a < 3$ следует неравенство $y^3 - 2y^2 - 4y+2 \ge 0$, из которого легко получить ограничение $y < 1/2$. В точке максимума $t = t^*$ имеем $\chi(t^*) = (2\sqrt{3}\sqrt{b^3/a})/9$. Далее заметим, что

$$\frac{1}{4} - \frac{b^3}{a} = \frac{y(4+y-13y^2-5y^3+4y^4)}{4(2+y)^2\,(1-y-y^2)} \ge \frac{y(4+y-18\,y^2)}{4(2+y)^2\,(1-y-y^2)},$$

и так как $4+y-18y^2 = (1-2y)(4+9y) > 0$, то $b^3/a \le 1/4$, т.е. $\chi(t^*) \le \sqrt{3}/9$.

В итоге установлено, что $M = \sqrt{3}/9$. Покажем, что $m \ge -\frac{1}{6}$. Так как $\tilde{\varphi}_0$ убывает по v, сразу же полагаем $v=1$. Тогда

$$\tilde{\varphi}_0(t) = \frac{tz(z-y)}{(2z+y)} + \frac{t^3z^2(yz+y^2-z^2-z)}{(z+y)(1+z+y)(2z+y)}.$$

Если $yz+y^2-z^2-z > 0$, то $\tilde{\varphi}_0(t) > tz(z-y)/(2z+y)$, а точка минимума лежит в области $z \le y$. При этом

$$\frac{tz(z-y)}{2z+y} \ge \frac{z(z-y)}{2z+y} \ge \frac{z(z-1)}{2z+1} > -\frac{1}{6},$$

т.е. $\tilde{\varphi}_0(t) > -1/6$.

Пусть теперь $yz+y^2-z^2-z \le 0$. Тогда, поскольку $\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_0}{\partial t^2} \le 0$, минимум $\tilde{\varphi}_0$ достигается при $t = 1$. Следовательно, достаточно показать, что

$$\tilde{\varphi}_0(1) + 1/6 = \frac{zy}{z+y}\left(\frac{z}{z+y+1} - \frac{y}{2z+y}\right) + 1/6 \ge 0$$

или

$$A(z,y) = 6z^2y(2z+y) - 6zy^2(1+z+y) + (z+y)(1+z+y)(2z+y) =$$
$$= 12z^3y - 6zy^3 - 2zy^2 + 2z^2y + y^2 + y^3 + (2z+3y)(z+z^2) \ge 0.$$

Учитывая, что $z + z^2 \ge yz + y^2$, имеем

$$A(z,y) \ge 12z^3y + 4z^2y + 2zy^2 + zy^2(1-y) + y^2(1-zy) + 4y^3(1-z) \ge 0,$$

что и требовалось.

Итак, мы показали, что $m \ge -1/6 > -\sqrt{3}/9$, а следовательно, $\max\limits_{t,h_k} |\tilde{\varphi}_0(t)| = \sqrt{3}/9$. Поскольку $\sqrt{3}/9 < K$, то тем самым утверждение теоремы полностью доказано.

Анализ функции $\varphi(t)$ в разложении (I7) позволяет сформулировать

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $S(x)$ - простейший аппроксимационный сплайн для функции $f \in W^2_\infty[a,b]$, а продолжение сетки Δ удовлетворяет условию "б" или "в". Если $h_k - h_{k-1} = O(H^2)$, $k = 1,\dots,n-1$, то $\|S - f\|_C = O(H^2)$.

В заключение отметим, что в силу локальности аппроксимационного сплайна при оценке погрешности для $x \in [x_i, x_{i+1}]$ вместо величин $H = \max\limits_{0 \le k \le n-1} h_k$ и $\|f''\|_\infty$ можно брать $H = \max\{h_{i-2}, h_{i-1}, h_i, h_{i+1}, h_{i+2}\}$ и $\|f''\|_{L_\infty[x_{i-2},x_{i+2}]}$, что позволяет более точно характеризовать погрешность приближения на сильно неравномерной сетке или при резком изменении свойств функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Литература

1. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. -М.: Наука, 1980. - 352 с.

2. МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Об интерполяции и аппроксимации сплайнами //Проблемы обработки информации. - Новосибирск, 1983.-Вып.100: Вычислительные системы. - С. 83-100.

3. ГРЕБЕННИКОВ А.И. Метод сплайнов и решение некорректных задач теории приближений. - М., 1983. - 208 с. (МГУ).

Поступила в ред.-изд.отд.
27 мая 1987 года