АППРОКСИМАЦИЯ СПЛАЙНАМИ
(Вычислительные системы)
1987 год Выпуск 121

УДК 681.3.06:519.65

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ЛОПАСТИ ГИДРОТУРБИНЫ

П.А. Турук

Введение

Основополагающим моментом автоматизации расчетно-конструкторских и инженерно-технологических работ при создании рабочих колес гидротурбин является математическое моделирование их наиболее важного элемента - лопастей. При этом способ математического представления лопасти во многом определяет методы автоматизированного решения различных задач проектирования и подготовки производства,а также качество получаемых результатов. Рассматриваются лопасти поворотно-лопастных и радиально-осевых гидротурбин,и предлагается общая методика построения геометрической модели лопастей этих типов. Для определенности, она будет изложена на примере радиально-осевой гидротурбины.

Поверхность лопасти в общем случае условно можно разбить на четыре части: поверхность стороны всасывания, поверхность стороны нагнетания, входная поверхность и выходная поверхность (рис.1). Наряду с лопастью рассматривается ее заготовка. Заготовка лопасти отличается от самой лопасти тем, что в ней отсутствует входная и выходная поверхности, а поверхности всасывания и нагнетания продлены так, что их меридианные проекции совпадают с меридианной проекцией всей поверхности лопасти. Под меридианной проекцией поверхности понимается ее проекция на плоскость (R,Z) относительно цилиндрической системы координат, в которой ось Z совпадает с осью вращения рабочего колеса.

С учетом характера задач проектирования и подготовки производства рабочих колес гидротурбин и алгоритмов их решения в качестве математической модели лопасти удобно принять совокупность

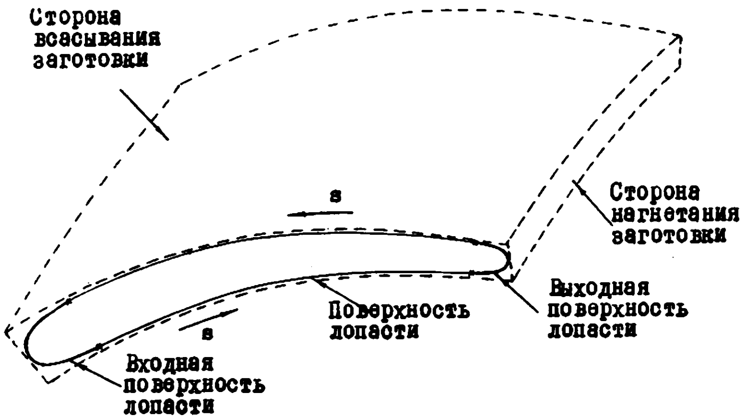

Рис. I

трех поверхностей: поверхность лопасти, поверхности всасывания и нагнетания заготовки. Каждая из них представляется в виде W-сплайна [I].

Напомним, что W-сплайн есть вектор-функция со значениями в трехмерном евклидовом пространстве, определенная в прямоугольной области Ω: $\{a \le t \le b,\ c \le s \le d\}$ вещественных переменных t и s в виде:

$$\vec{W}(t,s) = \{ W_x(t,s), W_y(t,s), W_z(t,s) \} ,$$

где $W_x(t,s), W_y(t,s), W_z(t,s)$ - кубические сплайн-функции, заданные на прямоугольной сетке $\Delta = \Delta_t \times \Delta_s$, Δ_t: $a = t_1 < t_2 < \ldots < t_N = b$, Δ_s: $c = s_1 < s_2 < \ldots < s_M = d$.

Если фиксировать один из параметров, например $s = s^*$, то уравнение $\vec{W} = \vec{W}(t,s^*)$ опишет линию на поверхности. Такие кривые называются координатными линиями. Условимся координатные линии для фиксированного значения параметра s считать линиями первого семейства, а координатные линии для фиксированного значения параметра t считать линиями второго семейства. Введем следующую параметризацию поверхности лопасти. Будем считать, что параметр t растет от верхнего обода к нижнему ободу лопасти гидротурбины (рис.2), а

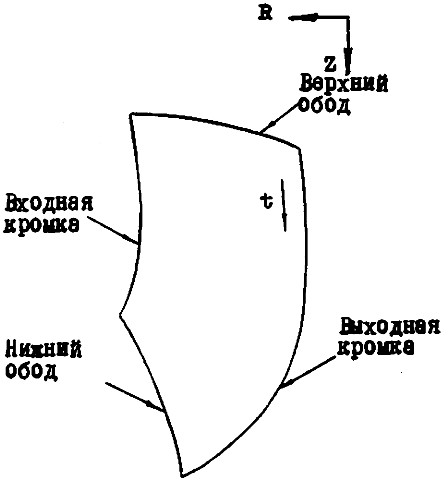

Рис. 2

параметр s увеличивается в направлении от выходной кромки по поверхности всасывания к входной кромке, далее по поверхности нагнетания – к выходной кромке (рис. I). Аналогичным образом вводится параметризация поверхностей всасывания и нагнетания заготовки.

Прием построения поверхностей заготовки рассмотрен в статье [2]. В настоящей статье рассматривается методика построения входной и выходной поверхностей, а также всей поверхности лопасти, когда известны поверхности сторон всасывания и нагнетания ее заготовки. Способ построения выходной поверхности не отличается от способа построения входной поверхности. Поэтому рассмотрим только построение входной поверхности.

§I. Построение входной поверхности

Входная поверхность должна удовлетворять следующим условиям:

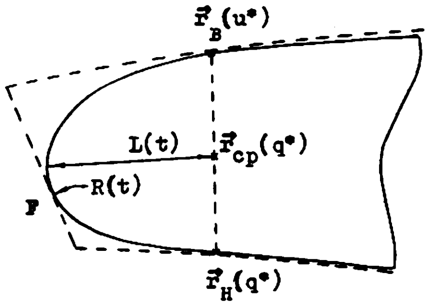

Рис. 3

а) поскольку меридианная проекция всей лопасти и ее заготовки совпадают, то входная поверхность соприкасается вдоль некоторой линии F с поверхностью вращения, образующей которой являются входные кромки поверхностей заготовки (рис.3);

б) в окрестности входной кромки радиус нормальной кривизны входной поверхности в направлении координатных линий $t = \text{const}$ должен соответствовать заданному закону распределения $R(t)$;

в) входная поверхность должна сопрягаться с поверхностями всасывания и нагнетания заготовки на расстоянии $L(t)$ от входной кромки. Следует отметить, что в общем случае эти линии сопряжения не являются координатными линиями для поверхностей заготовки.

Рассмотрим две координатные линии второго семейства на поверхностях заготовки, соответствующие значению параметра $t = t^*$. Возьмем их уравнения в виде $\vec{r}_н = \vec{W}_н(t^*,s) \equiv \vec{r}_н(q)$ и $\vec{r}_в = \vec{W}_в(t^*,s) \equiv \vec{r}_в(u)$, где $s,q,u \in [c,d]$. Для фиксированной точки на стороне нагнетания $\vec{r}_н = \vec{r}_н(q^*)$ найдется такая точка $\vec{r}_в = \vec{r}_в(u^*)$ на стороне всасывания, что углы наклона касательных к этим линиям в этих точках к вектору $\vec{\Delta r}(q^*,u^*) = \vec{r}_в(u^*) - \vec{r}_н(q^*)$ равны. Тогда точка $\vec{r}_{ср}(q^*) = (\vec{r}_в(u^*) + \vec{r}_н(q^*))/2$ принадлежит некоторой линии, которую в дальнейшем будем называть квазисрединной линией. Направление касательного вектора к этой линии с учетом введенной параметризации на поверхностях лопасти и ее заготовки определяется выражением:

$$\vec{r}\,'_{ср}(q^*) = (\vec{r}\,'_в(u^*)u'(q^*) + \vec{r}\,'_н(q^*))/2 ,$$

где

$$u'(q^*) = \frac{(\vec{\tau}\,'_1, \vec{\Delta r}) - (\vec{\Delta\tau}, \vec{r}\,'_н(q^*))}{(\vec{\Delta\tau}, \vec{r}\,'_в(u^*)) - (\vec{\tau}\,'_2, \vec{\Delta r})} ,$$

$$\vec{\tau}_1 = \langle \vec{r}\,'_н(q^*) \rangle , \quad \vec{\tau}_2 = \langle \vec{r}\,'_в(u^*) \rangle , \quad \vec{\Delta\tau} = \vec{\tau}_1 - \vec{\tau}_2 ,$$

$(\vec{m},\vec{f})$ обозначает операцию скалярного произведения векторов $\vec{m}$ и $\vec{f}$, а символ $\langle\cdot\rangle$ – операцию нормирования вектора. Выражение для $u'(q^*)$ следует из определения квазисрединной линии (см. первое уравнение в (I)).

<u>I.I. Определение точки входной кромки.</u> Для определения точки входной кромки $O(t^*)$ поступим следующим образом. Найдем точку D (рис.4) как пересечение квазисрединной линии $\vec{r}_{ср}(q)$ с плоскостью P_1, проходящей через точки A и B входных кромок заготовки, радиусы-векторы которых соответственно равны $\vec{r}_A = \vec{r}_н(c)$, $\vec{r}_B = \vec{r}_в(d)$. Направление нормали $\vec{n}$ к этой плоскости определим выражением $\vec{n} = \langle [\vec{r}\,'_B \times (\vec{r}_B - \vec{r}_A)] \rangle$, где $[\vec{m} \times \vec{f}]$ – операция векторного произведе -

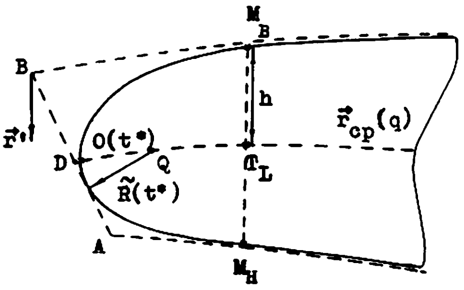

Рис. 4

ния векторов $\vec{m}, \vec{f}$; $\vec{r}'_B$ – направление касательного вектора в точке B к координатной линии первого семейства.

Плоскость P_1 можно рассматривать как линейное приближение окрестности поверхности вращения, с которой должна соприкасаться координатная линия $t = t^*$ входной поверхности. Радиус кривизны этой линии в окрестности точки $O(t^*)$ имеет величину $\tilde{R}(t^*) = R(t^*)(\langle [\vec{r}'_B \times \vec{\tau}_{cp} \times \vec{r}'_B] \rangle, \vec{\tau}_{cp})$, где $\vec{\tau}_{cp} = \langle \vec{r}'_{cp} \rangle$ – касательный вектор к квазисрединной линии в точке D. Определим центр кривизны Q как точку, лежащую на квазисрединной линии на расстоянии $\tilde{\tilde{R}}(t^*) = \tilde{R}(t^*) \cdot |[\langle [\vec{r}'_B \times \vec{\tau}_{cp} \times \vec{r}'_B] \rangle \times \vec{\tau}_{cp}]|$ от плоскости P_1 путем решения системы уравнений (I) (см. п. I.2). Отложив от центра Q по отрезку DQ расстояние $\tilde{R}(t^*)$, получаем точку, которую можно принять в качестве точки входной кромки $O(t^*)$.

I.2. <u>Определение точек сопряжения входной поверхности с поверхностями заготовки</u>. Следующим шагом находятся точки сопряжения M_B и M_H координатной линии входной поверхности с координатными линиями поверхностей сторон всасывания и нагнетания заготовки. Рассмотрим плоскость P_2, проходящую через точку входной кромки $O(t^*)$, нормальную отрезку DQ. Обозначим через $\vec{r}_0$ радиус-вектор точки $O(t^*)$, а $\vec{n}_0$ – направление нормали к плоскости P_2. Точка T_L квазисрединной линии, отстоящая от этой плоскости на расстоянии $L(t^*)$, определяется путем решения системы следующих уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &(\langle \vec{r}'_H(q)\rangle - \langle \vec{r}'_B(u)\rangle, \overline{\Delta \vec{r}}(q,u)) = 0, \\ &(\vec{r}_H(q) + \vec{r}_B(u) - 2(\vec{r}_0 + L\vec{n}_0), \vec{n}_0) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Первое равенство ставит в соответствие каждой точке $\vec{r}_H(q)$ одной стороны заготовки такую точку $\vec{r}_B(u)$ другой ее стороны, что $\vec{r}_{cp}(q) = (\vec{r}_B(u) + \vec{r}_H(q))/2$. Второе равенство означает, что точка $\vec{r}_{cp}(q)$ отстоит от плоскости P_2 на расстоянии L в направлении нормали $\vec{n}_0$. Таким образом, найденными путем решения этой системы значениями u_L, q_L определяются точки M_B, M_H на поверхностях заготовки, которые принимаются в качестве точек сопряжения (рис.4).

<u>I.3. Построение координатной линии входной поверхности.</u> По трем точкам M_B, О, M_H требуется построить координатную линию входной поверхности. С этой целью ей поставим в соответствие плоский симметричный профиль $\tilde{M}_B\tilde{O}\tilde{M}_H$ (рис.5), обладающий следующими свойствами:

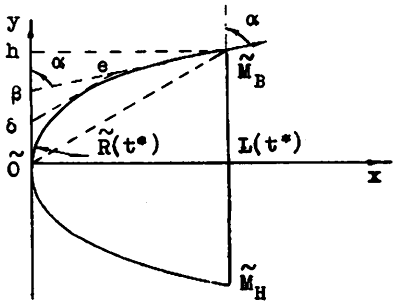

Рис. 5

- угол α наклона производных в точке $x = L(t^*)$ равен углу наклона касательного вектора в точке M_B к отрезку M_BM_H;
- координата у точки $\tilde{M}_B$ равняется величине $h = 0{,}5|\vec{r}_{M_B} - \vec{r}_{M_H}|$;
- радиус кривизны в точке $\tilde{O}$ равен $\tilde{R}(t^*)$:
- на отрезке $[\tilde{O}, L]$ сохраняется постоянный знак кривизны.

Аналитическое выражение для верхней половины профиля будем искать в виде кубической вектор-функции:

$$\vec{V}(v) = \vec{V}_0F_1(v) + \vec{V}_1F_2(v) + \vec{V}'_0F_3(v) + \vec{V}'_1F_4(v),\ v\in[0,1], \tag{2}$$

где

$$F_1(v) = (1-v)^2(1+2v); \qquad F_2(v) = v^2(3-2v);$$

$$F_3(v) = v(1-v)^2; \qquad F_4(v) = -v^2(1-v);$$

$$\vec{V}_0 = \vec{V}(0) = \{0,0\}; \qquad \vec{V}_1 = \vec{V}(1) = \{L,h\};$$

$$\vec{V}'_0 = \vec{V}'(v)|_{v=0} = \{0,p\}; \quad \vec{V}'_1 = \vec{V}'(v)|_{v=1} = \{g\sin\alpha, g\cos\alpha\}.$$

Здесь p и g - положительные произвольные величины. Выражением (2) обеспечивается выполнение первых двух свойств. Выберем значения p и g так, чтобы выполнились оставшиеся два условия. Из формулы для кривизны в точке $\tilde{O}$ имеем:

$$\frac{|\vec{V}_0' \times \vec{V}_0''|}{|\vec{V}_0'|^3} = \frac{1}{\tilde{R}(t^*)} .$$

Подставив сюда выражения для $\vec{V}_0'$, $\vec{V}_0''$, окончательно получим соотношение:

$$g = \frac{6\tilde{R}(t^*)L(t^*) - p^2}{2\tilde{R}(t^*)\sin\alpha} . \qquad (3)$$

Далее, перепишем (2) в виде кубического полинома в форме Безье:

$$\vec{V}(v) = (1-v)^3\vec{r}_0 + 3v(1-v)^2\vec{r}_1 + 3v^2(1-v)\vec{r}_2 + v^3\vec{r}_3 , \quad v \in [0,1] ,$$

где $\vec{r}_0 = \vec{V}_0$, $\vec{r}_1 = \vec{V}_0'/3 + 3\vec{V}_0$, $\vec{r}_2 = 3\vec{V}_1 - \vec{V}_1'/3$, $\vec{r}_3 = \vec{V}_1$. Известно [3], что $\vec{V}(v)$ будет выпуклым вверх, если его характеристическая ломаная, проходящая через точки $\tilde{O}$, $б$, $е$, $\tilde{M}_B$ с радиусами-векторами $\vec{r}_0$, $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$, образует выпуклый многоугольник. Потребуем дополнительно, чтобы второе звено $бе$ многоугольника было параллельно хорде $\tilde{O}\tilde{M}_B$ (рис.5). Подобие треугольников $\tilde{O}\beta\tilde{M}_B$ и $б\beta е$ позволяет установить соотношение длин сторон $бе$ и $\tilde{O}\tilde{M}_B$. Поскольку указанные стороны представлены соответственно векторами $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \{3L(t^*) - (g\sin\alpha)/3 ,\ 3h - (g\cos\alpha)/3 - p/3\}$ и $\vec{r}_3 - \vec{r}_0 = \{L(t^*), h\}$, то имеем следующее равенство $(3L(t^*) - (g\sin\alpha)/3)h = (3h - (g\cos\alpha)/3 - p/3)L(t^*)$. Подставляя сюда выражение (3), получаем квадратное уравнение относительно величины p: $\beta p^2 + 2\gamma p - 6\beta\gamma = 0$, где $\beta = h - L(t^*)\mathrm{ctg}\alpha$, $\gamma = \tilde{R}(t^*)L(t^*)$. Поскольку нас интересует только положительный корень этого уравнения, то значение p записывается в виде:

$$p = \frac{(\sqrt{1 + 6\beta^2/\gamma} - 1)\gamma}{\beta} . \qquad (4)$$

Таким образом, соотношения (3) и (4) определяют выбор величин p и g. Легко убедиться, что $p > 0$ и $g > 0$ при условии $\beta > 0$. Геометрический смысл этого ограничения ясен из рис. 5.

Возьмем равномерную сетку по параметру v и определим значения вектор-функции $\vec{V}(v_i) = \{x_i, y_i\}$ в узлах этой сетки. Для каждого $L_i = x_i$ решается система уравнений (I). Тем самым находятся точки $\vec{r}_{ср}(q(x_i))$ квазисрединной линии, расположенные на расстоянии x_i от плоскости P_2, и соответствующие им точки на сторонах заготовки $\vec{r}_н(q(x_i))$, $\vec{r}_в(u(x_i))$. Далее вычисляются точки

$$\vec{r}(u(x_i)) = \vec{r}_{ср}(q(x_i)) + \langle \overline{\Delta\vec{r}}(q(x_i),u(x_i)) \rangle y_i ,$$

$$\vec{r}(q(x_i)) = \vec{r}_{ср}(q(x_i)) - \langle \overline{\Delta\vec{r}}(q(x_i),u(x_i)) \rangle y_i ,$$

которые принимаются в качестве узлов координатной линии входной поверхности.

§2. Построение всей поверхности лопасти

Окончательно построение всей поверхности лопасти состоит в следующем. Полагаем $t = t_1 = a$ и находим узлы соответствующей координатной линии входной поверхности. Аналогичным образом вычисляются узлы координатной линии выходной поверхности. Далее эту же процедуру осуществляем для $t = t_2$. Повторяем процесс для всех значений параметра t, соответствующих узлам исходной сетки Δ_t. В результате получаем узлы каркасов входной и выходной поверхностей.

На поверхностях всасывания и нагнетания заготовки имеем по две линии сопряжения с входной и выходной поверхностями, которые представлены множествами значений $\{s_{1В}(t_i)\}$, $\{s_{2В}(t_i)\}$, $\{s_{1Н}(t_i)\}$, $\{s_{2Н}(t_i)\}$ в области Ω параметров t, s. Теперь необходимо ввести такие параметризации на поверхностях заготовки, для которых линии сопряжения будут координатными линиями. Способ определения таких параметризаций рассмотрен в [4]. Задавшись новой сеткой $\tilde{\Delta}_t$ и $\tilde{\Delta}_s$ в каждой из полученных областей $\tilde{\Omega} \subset \Omega$, рассчитываем соответствующий каркас на поверхностях всасывания и нагнетания. Объединяя их с каркасами входной и выходной поверхностей, получаем общий каркас поверхности лопасти. Последний шаг - восстановление поверхности лопасти W-сплайном.

В заключение отметим, что предлагаемая методика предъявляет определенные требования к выбору параметризаций поверхностей всасывания и нагнетания, а именно: меридианные проекции координатных линий $t=const$ для обеих поверхностей должны быть достаточно близкими. Варьируя размер зон входных и выходных поверхностей и распределение их радиусов нормальных кривизн, получим удовлетворяющую с точки зрения физических характеристик поверхность лопасти.

В качестве примера на рис.6 приведены совмещенные сечения плоскостью $z = const$ всей поверхности лопасти радиально-осевой

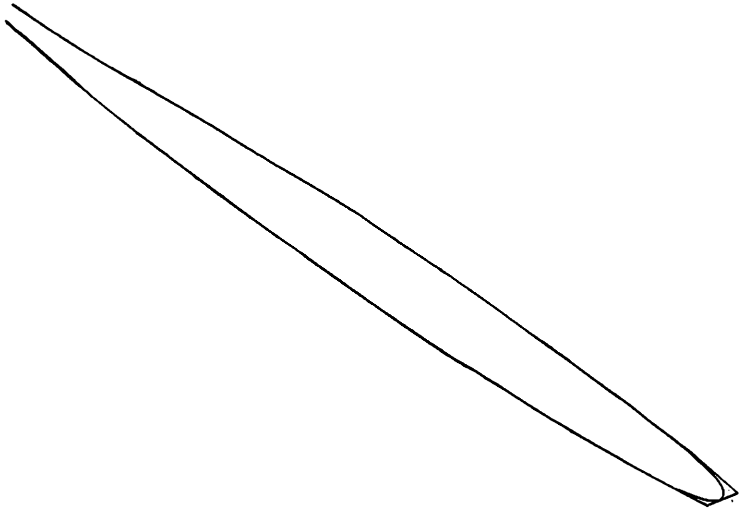

Рис.6. Совмещенные плоские сечения всей поверхности лопасти и ее заготовки.

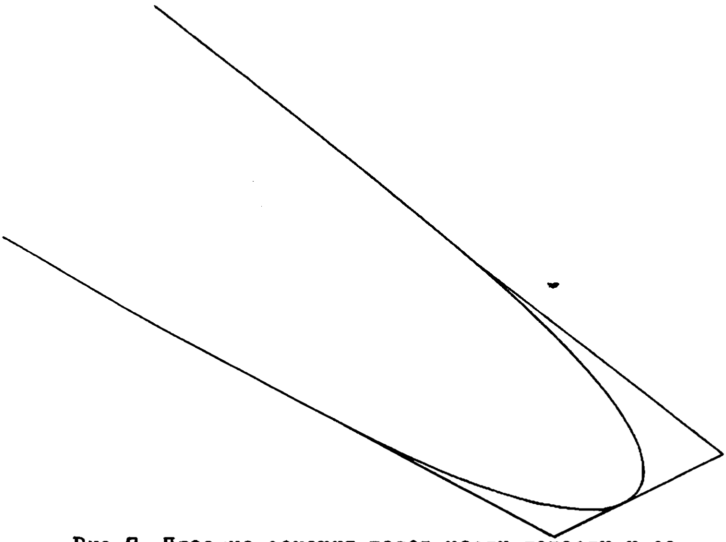

Рис.7. Плоские сечения поверхности лопасти и ее заготовки в районе входной поверхности.

гидротурбины и поверхностей ее заготовки. На рис.7 выделен район входной поверхности этих сечений.

Литература

1. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., ЛЕУС В.А., СКОРОСПЕЛОВ В.А. Сплайны в инженерной геометрии. - М.: Машиностроение, 1985. - 223 с.

2. ПАВЛОВ Н.Н., СКОРОСПЕЛОВ В.А. Аппроксимация поверхностей лопасти гидротурбины //Методы сплайн-функций. - Новосибирск,1977. - Вып. 75: Вычислительные системы. - С. 56-64.

3. ФОКС А., ПРАТТ М. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве: Пер. с англ. -М.: Мир, 1982.- 304 с.

4. СКОРОСПЕЛОВ В.А. Точки, кривые и области на поверхности //Сплайн-аппроксимация и численный анализ. - Новосибирск, 1985. - Вып. 108: Вычислительные системы. - С. 94-100.

Поступила в ред.-изд.отд.
18 апреля 1987 года