ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ
(Вычислительные системы)
1987 год Выпуск I22

УДК 681.3:512.8

ЛОГИЧЕСКИЕ ПРОГРАММЫ БЕЗ РАВЕНСТВА И КОНСТРУКТИВНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Н.Х. Касымов

Дается положительное решение проблемы специфицируемости квазитождествами в обогащениях без сортов для позитивно представимых структур данных с конечно-порожденными абсолютно свободными функциональными обеднениями, и доказывается, что при отсутствии равенства язык квазитождеств существенно выразительнее языка тождеств. Приводится критерий рекурсивной представимости позитивно представимых конечно-порожденных алгебраических структур данных. Неопределяемые понятия можно найти в [3,4, 7-10].

§I. Логические программы без равенства

Под логической программой обычно понимается конечная совокупность квазитождеств [I4,I5]. Для логических программ естественно считать каноническими структурами данных, или их моделями, свободные модели соответствующего квазимногообразия [8], поскольку наиболее простые и важные запросы в виде экзистенциальных позитивных предложений к логической программе, истинные в некоторой свободной модели, суть логические следствия программы в силу устойчивости таких предложений относительно эпиморфизмов и расширений [8]. Стандартной моделью логической программы мы будем называть свободную структуру, порожденную значениями сигнатурных констант [I2,I5]. Эта структура характеризуется тем, что всякое экзистенциальное позитивное следствие логической программы эффективно подтверждается в стандартной модели подходящим набором замкнутых термов. Для существования стандартной модели логической программы необходимо и достаточно, чтобы в сигнатуре программы содержались символы для обозначения констант. Кроме того, мы будем предпола -

гать, что для каждого сорта [2] в любой модели логической программы найдется замкнутый терм, значение которого принадлежит данному сорту.

Интересующие нас структуры данных должны обладать конструктивными, при том или ином уточнении понятия конструктивности, представлениями. Всякая стандартная модель подходящей логической программы имеет естественное и с точностью до рекурсивной эквивалентности единственное позитивное представление [I,4].

Мы принимаем следующий тезис [2]: всякая структура данных имеет позитивное представление. Проблема специфицируемости для структуры данных $\mathfrak{A}$ состоит в следующем: существует ли логическая программа P, для которой $\mathfrak{A}$ - стандартная модель? Например, если $\mathfrak{A}$ не порождается сигнатурными константами, то такой программы нет. Известно [I3], что если $\mathfrak{A}$ рекурсивно представима [4], то существует обогащение $\mathfrak{A}^*$ с тем же носителем, что у $\mathfrak{A}$, которое является стандартной моделью некоторой логической программы. Аналогичное утверждение справедливо и для позитивно представимых структур, но обогащения в этом случае нужно задавать над расширением носителя исходной алгебры, т.е. добавлять новые сорта [I3]. В обоих случаях соответствующие программы можно строить в языке тождеств, но в программе обязательно должен содержаться символ равенства, т.е. неявно присутствуют квазитождества как общелогические аксиомы равенства. Любая логическая программа в чистом языке тождеств, т.е. без равенства, как будет показано ниже, имеет рекурсивно представимую стандартную модель. Поэтому в языке тождеств с равенством именно условные свойства равенства несут ответственность за возникновение эффектов неразрешимости. Проблема существования у произвольной позитивно представимой модели обогащения над тем же носителем, являющимся стандартной моделью некоторой логической программы (состоящей из квазитождеств) с равенством, решается отрицательно [6] и относительно просто. Однако для конечно-порожденных структур данных этот вопрос оказывается гораздо сложнее. Известно [5], что существует конечно-порожденная структура данных, никакое обогащение которой над исходным носителем не является свободной моделью ни в каком конечнобазируемом многообразии с равенством. Проблема специфицируемости квазитождествами в обогащении без сортов для класса конечно-порожденных структур данных является открытой [I7].

Логические программы без равенства кажутся даже более естественными, чем программы с равенством, так как обычно предполагается, что носитель стандартной модели есть абсолютно свободная алгебра термов [15], а для программы, следствием которой является не тождественно истинное равенство, носитель стандартной модели таковым быть не может. Ниже мы покажем, что всякая позитивно представимая модель, функциональное обеднение которой есть конечнопорожденная абсолютно свободная алгебра, обладает обогащением над тем же носителем, являющимся стандартной моделью подходящей логической программы без равенства. Заметим, что соответствующее обогащение должно быть чисто предикатным. Начиная с этого момента, все рассматриваемые структуры будут односортными, поскольку нас будут интересовать только обогащения без новых сортов, а многосортный случай отличается лишь несущественными нюансами и большей громоздкостью обозначений.

Проиллюстрируем на простейшем примере метод спецификации в обогащениях без сортов в языках равенства, квазитождеств без равенства и тождеств без равенства.

Пусть $\mathfrak{A} = (\omega; o, s, Ч)$, где ω - множество натуральных чисел, o - константа для нуля, s - операция прибавления единицы и Ч - одноместное отношение, выделяющее множество четных чисел.

Пусть f - символ одноместной функции. Следующие три тождества:

$$f(o) = o \ ,$$

$$fs(x) = ssf(x) \ ,$$

$$Ч(f(x))$$

имеют $\mathfrak{A}$ в качестве обеднения своей стандартной модели. Носитель обогащения не есть абсолютно свободная алгебра.

Для данного примера самой естественной и простой спецификацией является спецификация в языке квазитождеств без равенства в обогащении (в данном случае пустом) без сортов:

$$Ч(o) \ ,$$

$$Ч(x) \to Ч(ss(x)) \ .$$

Стандартность $\mathfrak{A}$ для этих двух квазитождеств очевидна.

Очевидно, $\mathfrak{A}$ задается рекурсивной системой тождеств $\{Ч(s^{2m}(o))/m \in \omega\}$. Однако никакое предикатное обогащение $\mathfrak{A}$ не задается конечным числом тождеств. В самом деле, тождества в ко -

торых фигурирует символ Ч, никак не связаны с другими тождествами, кроме общелогической аксиомы $Ч(x) \& x = y \to Ч(y)$, но в предикатном обогащении абсолютно свободной алгебры не выполняется никакое нетривиальное равенство. Тождества, содержащие символ Ч, имеют один из двух видов: $Ч(s^{2m}(x))$ или $Ч(s^{2m}(0))$. Тождество первого вида выделяет почти все ω, а тождество второго вида одно число. Поэтому $\mathfrak{A}$ не характеризуется тождествами в предикатных обогащениях.

Многообразие моделей назовем чистым, если всякое не тождественно истинное равенство от двух термов (возможно, с переменными) ложно в подходящей модели этого многообразия. Это равносильно определимости многообразия в чистом языке тождеств.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Свободная модель ранга 0 любого рекурсивно-аксиоматизируемого чистого многообразия конечного ранга и конечной сигнатуры рекурсивнопредставима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K – рекурсивно-аксиоматизируемое чистое многообразие конечного ранга, функциональная часть сигнатуры которого есть Σ; $\mathfrak{A}$ – свободная ранга 0 модель в K и E – рекурсивная система аксиом в виде тождеств для K, все переменные которых принадлежат фиксированному конечному списку переменных X. Обозначим через T_Σ множество всех замкнутых термов сигнатуры Σ, а через $T_\Sigma(X)$ множество всех термов сигнатуры Σ с переменными из X. Следуя [7], определим функцию высоты $h: T_\Sigma(X) \to \omega$ индуктивным способом: $h(t) = 0$, если t – переменная или константа. Если $t = f(t_1,\dots,t_n)$, то $h(t) = \max\{h(t_1),\dots,h(t_n)\} + 1$. Пусть P – предикатный символ сигнатуры K местности m и $\langle t_1^0,\dots,t_m^0\rangle \in T_\Sigma^m$, $n = \max\{h(t_1^0),\dots,h(t_m^0)\}$. Рассмотрим множество

$$D(P;\ t_1^0,\dots,t_m^0) = \{P(t_1,\dots,t_m) \in E / \max\{h(t_1),\dots,h(t_m)\} \le n\}.$$

Ясно, что $D(P;\ t_1^0,\dots,t_m^0)$ конечно, в силу конечности X, и эффективно строится по набору $\langle P, t_1^0,\dots,t_m^0\rangle$. Если $P(t_1,\dots,t_m) \in E$ и $\max\{h(t_1),\dots,h(t_m)\} > \max\{h(t_1^0),\dots,h(t_m^0)\}$, то $P(t_1^0,\dots,t_m^0)$ не может быть логическим следствием тождества $P(t_1,\dots,t_m)$, поэтому

$$\mathfrak{A} \models P(t_1^0,\dots,t_m^0) \Leftrightarrow D(P;\ t_1^0,\dots,t_m^0) \vdash P(t_1^0,\dots,t_m^0).$$

Нетрудно заметить, что правая часть этой эквивалентности – рекурсивное отношение от $P, t_1^0, \ldots, t_m^0$, так как носителем $\mathfrak{A}$ является абсолютно свободная алгебра. Предложение доказано.

Покажем теперь, что чистого языка квазитождеств достаточно для описания любой позитивно представимой модели с абсолютно свободным конечно-порожденным носителем.

ТЕОРЕМА I. Всякая позитивно представимая модель конечной сигнатуры с абсолютно свободным конечно-порожденным функциональным обеднением сама является обеднением стандартной модели подходящей логической программы без равенства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{A}$ – позитивно представимая модель; Σ-функциональная часть ее сигнатуры и Σ-обеднение $\mathfrak{A}$ изоморфно абсолютно свободной алгебре T_Σ. Мы хотим показать, что для любого рекурсивно-перечислимого m-местного отношения R на T_Σ найдется такое конечное множество квазитождеств E и m-местный предикатный символ P, что $\langle t_1, \ldots, t_m \rangle \in R \Leftrightarrow E \vdash P(t_1, \ldots, t_m)$. Идея заключается в доказательстве определимости любой примитивно-рекурсивной функции на некотором "хорошем" подмножестве N множества T_Σ и перенесении этих определений с N на все T_Σ с помощью гёделевской нумерации термов из T_Σ термами из N, которая будет определяться квазитождествами.

Пусть c, s – константный и ненульместный функциональные символы сигнатуры Σ соответственно. Определим новое отношение N на T_Σ : $N(c)$, $N(x) \to N(s(x,x,\ldots,x))$. Обозначим $\Delta_0 \rightleftharpoons c$, $\Delta_{n+1} \rightleftharpoons s(\Delta_n, \Delta_n, \ldots, \Delta_n)$. Будем говорить, что t-местная функция $f : \omega^t \to \omega$ является Δ-представимой, если существуют такие конечное множество квазитождеств E и $t+1$-местная предикатная буква F, что $f(n_1, \ldots, n_t) = n \Leftrightarrow E \vdash F(\Delta_{n_1}, \ldots, \Delta_{n_t}, \Delta_n)$. Очевидно, что всякая Δ-представимая функция рекурсивна.

ЛЕММА I. Всякая примитивно-рекурсивная функция Δ-представима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно проверить, что следующие квазитождества представляют нуль-функцию, функцию следования и проектируют соответственно:

$$N(x) \to O(x, \Delta_0) ,$$

$$N(x) \to S(x, s(x, x, \ldots, x)) ,$$

$$\underset{1\le i\le n}{\&} N(x_i) \to I_n^j(x_1, \ldots, x_n, x_j), \quad 1 \le j \le n,\ n \in \omega \setminus \{o\}.$$

Покажем, что суперпозиция и примитивная рекурсия сохраняют Δ-представимость.

Пусть $\bar{x} \rightleftharpoons (x_1, \ldots, x_m)$, $f(\bar{x}) = h(g_1(\bar{x}), \ldots g_n(\bar{x}))$, $h, g_1, \ldots$ $\ldots, g_n$ – примитивно-рекурсивные функции, Δ-представляемые программами и буквами $E, E_1, \ldots, E_n$ и $H, G_1, \ldots, G_n$ соответственно. Во избежание коллизий будем предполагать, что программы $E, E_1, \ldots, E_n$ не имеют общих (кроме S) предикатных символов. Этого всегда можно добиться путем подходящего переименования имен отношений. Добавим к системе $E \cup E_1 \cup \ldots \cup E_n$ одно квазитождество $G_1(\bar{x}, y_1)$ & $\ldots$ $\ldots$ & $G_n(\bar{x}, y_n)$ & $H(y_1, \ldots, y_n, y) \to F(\bar{x}, y)$, где F – новый предикатный символ; обозначим полученную систему квазитождеств через E^*. Если $f(k_1, \ldots, k_m) = k$ и $g_i(k_1, \ldots, k_m) = l_i$, $h(l_1, \ldots, l_n) = k$, то, по предположению, $E^* \vdash \underset{1\le i\le n}{\&} (G_i(\Delta_{k_1}, \ldots, \Delta_{k_m}, \Delta_{l_i}))$ & $H(\Delta_{l_1}, \ldots$ $\ldots, \Delta_{l_n}, \Delta_k)$. Тогда $E^* \vdash F(\Delta_{k_1}, \ldots, \Delta_{k_m}, \Delta_k)$. Обратно, пусть $E^* \vdash F(\Delta_{k_1}, \ldots, \Delta_{k_m}, \Delta_k)$. Если $g_i(k_1, \ldots, k_m) = l_i$, но $h(l_1, \ldots, l_n) \ne k$, то $E^* \vdash \underset{1\le i\le n}{\&} (G_i(\Delta_{k_1}, \ldots, \Delta_{k_m}, \Delta_{l_i}))$ и $E^* \nvdash H(\Delta_{l_1}, \ldots, \Delta_{l_n}, \Delta_k)$. Следовательно, для некоторой модели $\mathfrak{A}_0 \models E^*$ имеет место $\mathfrak{A}_0 \models \underset{1\le i\le n}{\&} (G_i(\Delta_{k_1}, \ldots, \Delta_{k_m}, \Delta_{l_i}))$ & $\neg H(\Delta_{l_1}, \ldots$ $\ldots, \Delta_{l_n}, \Delta_k)$ & $F(\Delta_{k_1}, \ldots, \Delta_{k_m}, \Delta_k)$. Но тогда в свободной системе для E^* не может иметь места $F(\Delta_{k_1}, \ldots, \Delta_{k_m}, \Delta_k)$, т.е. $E^* \nvdash F(\Delta_{k_1}, \ldots, \Delta_{k_m}, \Delta_k)$, поэтому $f(k_1, \ldots, k_m) = k$.

Пусть $f(\bar{x}, o) = g(\bar{x})$, $f(\bar{x}, y+1) = h(\bar{x}, y, f(x, y))$ и функции g, h имеют Δ-представления программами и буквами E_1, G и E_2, H соответственно.

Добавим к системе $E_1 \cup E_2$ два квазитождества:

$$G(\bar{x}, y) \to F(\bar{x}, \Delta_0, y),$$

$$F(\bar{x}, y, u) \ \&\ H(\bar{x}, y, u, v) \ \&\ S(y, z) \to F(\bar{x}, z, v),$$

где F – новый предикатный символ, и обозначим расширенную систему квазитождеств через E^*. Будем доказывать индукцией по k_{m+1}, что $f(k_1,\ldots,k_m,k_{m+1}) = k \Leftrightarrow E^* \vdash F(\Delta_{k_1},\Delta_{k_m},\Delta_{k_{m+1}},\Delta_k)$.

Если $f(k_1,\ldots,k_m,0)= k$, то $g(k_1,\ldots,k_m)= k$, т.е. $E^*\vdash G(\Delta_{k_1},\ldots$ $\ldots,\Delta_{k_m},\Delta_k)$, но тогда $E^* \vdash F(\Delta_{k_1},\ldots,\Delta_{k_m},\Delta_0,\Delta_k)$. Обратно, если $E^* \vdash F(\Delta_{k_1},\ldots,\Delta_{k_m},\Delta_0,\Delta_k)$, то $E^* \vdash G(\Delta_{k_1},\ldots,\Delta_{k_m},\Delta_k)$, так как в противном случае в свободной модели для E^* имеет место $\neg F(\Delta_{k_1},\ldots,\Delta_{k_m},\Delta_0,\Delta_k)$, поэтому, по предположению, $g(k_1,\ldots$ $\ldots,k_m) = k$.

Пусть $f(k_1,\ldots,k_m,t)= k_t \Leftrightarrow E^*\vdash F(\Delta_{k_1},\ldots,\Delta_{k_m},\Delta_t,\Delta_{k_t})$, $t \le n$. Допустим, что $f(k_1,\ldots,k_m,n+1) = 1$. Тогда $h(k_1,\ldots,k_m,n,k_n)= 1$, т.е. $E^* \vdash H(\Delta_{k_1},\ldots,\Delta_{k_m},\Delta_n,\Delta_{k_n},\Delta_1)$. Поскольку $E^* \vdash S(\Delta_n,\Delta_{n+1})$, то из второго добавленного квазитождества следует, что $E^* \vdash F(\Delta_{k_1},\ldots,\Delta_{k_m},\Delta_{n+1},\Delta_1)$. Обратно, пусть $E^* \vdash F(\Delta_{k_1},\ldots,\Delta_{k_m},$ $\Delta_{n+1},\Delta_1)$. Если $f(k_1,\ldots,k_m,n) = r$, но $h(k_1,\ldots,k_m,n,r) \neq 1$, то, по индукционному предположению, $E^*\vdash F(\Delta_{k_1},\ldots,\Delta_{k_m},\Delta_n,\Delta_r)$, а в силу Δ-представимости h

$$E^* \nvdash H(\Delta_{k_1},\ldots,\Delta_{k_m},\Delta_n,\Delta_r,\Delta_1).$$

Но тогда в свободной модели для E^* предложение $F(\Delta_{k_1},\ldots,\Delta_{k_m},$ $\Delta_{n+1},\Delta_r)$ ложно. Лемма доказана.

Определим гёделевскую нумерацию из N в T_Σ следующим образом. Пусть M, D – предикаты, определяющие умножение и возведение в степень соответственно на N. Определим новый двуместный предикат Γ_0 на T_Σ: $\Gamma_0(\Delta_{2n},c_n)$, $0\le n\le t$; $c_0,\ldots,c_t$ – все константные символы сигнатуры Σ. Если $g_0,\ldots,g_r$ – все неконстантные функциональные символы сигнатуры Σ, то для $j\in\{0,\ldots,r\}$ и g_j местности k введем квазитождество:

$$\Gamma_0(x_1,y_1)\,\&\,\ldots\,\&\,\Gamma_0(x_k,y_k)\,\&\,D(\Delta_3,\Delta_j,u_0)\,\&\,D(\Delta_5,x_1,u_1)\,\&\,\ldots$$
$$\ldots\,\&\,D(\Delta_{p_{k+1}},x_k,u_k)\,\&\,M(u_0,u_1,z_1)\,\&\,M(z_1,u_2,z_2)\,\&\,\ldots$$
$$\ldots\,\&\,M(z_{k-1},u_k,x) \to \Gamma_0(x,g_j(y_1,\ldots,y_k)),$$

где p_{k+1} есть $k+1$-е простое число.

В силу Δ-представимости всех примитивно-рекурсивных функций отношение Γ_0 определяет взаимно-однозначное соответствие между рекурсивным подмножеством множества N и T_Σ. Пусть f – примитивно-рекурсивная функция, перечисляющая это рекурсивное подмножество без повторений. По лемме I найдутся такое конечное множество квазитождеств E и буква F, что $f(n) = m \Leftrightarrow E \vdash F(\Delta_n, \Delta_m)$. Тогда квазитождество $F(x,y) \,\&\, \Gamma_0(y,z) \to \Gamma(x,z)$ вместе со списком определений всех функций, участвующих в описании F и Γ_0, определяет гёделевскую нумерацию множества T_Σ всем множеством N.

Поскольку R рекурсивно-перечислимо, то и отношение $R_0 = \{\langle x_1,\ldots,x_m\rangle / \underset{1\le i\le m}{\&} (\Gamma_0(x_i,y_i)) \,\&\, \langle y_1,\ldots,y_m\rangle \in R\}$ также рекурсивно-перечислимо, а значит, существуют примитивно-рекурсивные функции $f_1,\ldots,f_m$ такие, что $R_0=\{\langle \Delta_{f_1(t)},\ldots,\Delta_{f_m(t)}\rangle / t\in\omega\}$. Пусть $E_1,\ldots,E_m$ есть Δ-определения этих функций с буквами $F_1,\ldots,F_m$ соответственно. Тогда отношение R_0 представляется некоторой буквой P_0 и программой $E_1 \cup \ldots \cup E_m$ с квазитождеством

$$F_1(x,y_1) \,\&\ldots\&\, F_m(x,y_m) \to P_0(y_1,\ldots,y_m) .$$

Добавление к этой системе буквы P и квазитождества

$$P_0(x_1,\ldots,x_m) \,\&\, \underset{1\le i\le m}{\&} (\Gamma_0(x_i,y_i)) \to P(y_1,\ldots,y_m)$$

дает такую программу E, что если $\mathfrak{A}_0$ – свободная модель для E, то $\mathfrak{A}_0 \models R(t_1,\ldots,t_m) \Leftrightarrow E \vdash P(t_1,\ldots,t_m)$. Для конечной системы рекурсивно-перечислимых отношений на T_Σ нужно взять соответствующее число программ, заботясь о переименовании букв, когда это надо. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если R – рекурсивно-перечислимая конгруэнция на T_Σ, то по теореме I существуют программа E и символ P такие, что $\langle t_1,t_2\rangle \in R \Leftrightarrow E \vdash P(t_1,t_2)$. Однако если интерпретировать P как конгруэнцию той системы, сигнатура которой содержит все символы из E, то к системе E добавляются неявным образом общелогические аксиомы:

$$Q(x_1,\ldots,x_n) \;\&\; \underset{1\le i\le n}{\&} (E(x_i,y_i)) \to Q(y_1,\ldots,y_n)$$

для каждого символа Q из E. Поэтому проблема корректного описания обогащений (неважно, предикатных или функциональных) квазитождествами упирается в проблему корректного описания конгруэнций.

§2. Алгебраические структуры и их конгруэнции

Из заключительного замечания предыдущего параграфа следует важность изучения конгруэнций структур данных. В этом параграфе мы рассмотрим некоторые свойства конгруэнций структур данных чисто функциональной сигнатуры. Основное внимание будет уделено характеризации рекурсивно-представимых структур данных, поскольку именно последние образуют наиболее важный, с практической точки зрения, класс данных [I]. Нам будет удобно следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Алгебраической структурой называется позитивно представимая алгебра конечной сигнатуры, конечно-порожденная значениями сигнатурных констант.

Все рассматриваемые алгебраические структуры будут предполагаться односортными, поскольку принципиального различия между односортным и многосортным случаями в описываемых ситуациях нет. Кроме того, все упоминаемые обогащения алгебраических структур будут чисто функциональными.

ТЕОРЕМА 2. *Алгебраическая структура рекурсивно представима тогда и только тогда, когда существует рекурсивно-перечислимое множество универсальных предложений, выполнимое в ней и невыполнимое в любой ее фактор-алгебре по ненулевой конгруэнции.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть E – множество всех равенств между замкнутыми термами, истинных в алгебраической структуре $\mathfrak{A}$, и E' – множество всех неравенств между замкнутыми термами, истинных в $\mathfrak{A}$.

Если $\mathfrak{A}$ рекурсивно представима, то очевидно, что E' рекурсивно и ложно в любой фактор-алгебре $\mathfrak{A}$ по ненулевой конгруэнции.

Обратно, пусть Φ – рекурсивно-перечислимое множество универсальных предложений, выполнимое в $\mathfrak{A}$ и невыполнимое в любой фактор-алгебре алгебры $\mathfrak{A}$ по ненулевой конгруэнции. Рассмотрим множество $E \cup \Phi$. Оно рекурсивно-перечислимо в силу рекурсивной перечислимости E. Если замкнутые термы t_1, t_2 равны в $\mathfrak{A}$, то $E \cup \Phi \vdash t_1 = t_2$. В противном случае множество $E \cup \Phi \cup \{t_1 = t_2\}$ противоречиво. В самом деле, пусть $\mathfrak{A}_0 = E \cup \Phi \cup \{t_1 = t_2\}$. Поскольку $\mathfrak{A}_0 = E$, то $\mathfrak{A}_0$ содержит гомоморфный образ алгебраической структуры $\mathfrak{A}$,причем ядро соответствующего (единственного) гомоморфизма ненулевое, так как $\mathfrak{A} \models t_1 \neq t_2$. Из универсальности Φ следует, что Φ выполняется в подструктуре $\mathfrak{A}_0$, порожденной константами, а последняя, как было только что замечено, есть фактор-алгебра $\mathfrak{A}$ по ненулевой конгруэнции. Противоречие. Следовательно, $E \cup \Phi \vdash t_1 \neq t_2$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ I (А.В.Кузнецов, А.И.Мальцев [7]). Алгебраическая структура с конечным числом конгруэнций рекурсивнопредставима.

По условию, в структуре истинно некоторое предложение $\underset{1\leq j\leq n}{\&} (t_j \neq t_j')$, такое, что всякая ненулевая конгруэнция содержит пару $\langle t_j, t_j' \rangle$ при некотором $j \in \{1,\ldots,n\}$. Полагаем

$$\Phi = \underset{1\leq j\leq n}{\&} (t_j \neq t_j') .$$

Обобщением следствия I,правда, выглядящим "менее алгебраически", является

СЛЕДСТВИЕ 2 (Ю.Л.Ершов [4]). Алгебраическая структура $\mathfrak{A}$ рекурсивнопредставима тогда и только тогда, когда существует рекурсивно-перечислимое множество попарно различных в $\mathfrak{A}$ термов $\{t_0, t_1, t_2, \ldots\}$ такое, что всякая ненулевая конгруэнция структуры $\mathfrak{A}$ содержит подходящую пару различных термов из этого множества.

Если $\mathfrak{A}$ рекурсивно представима, то таким множеством будет $\{t / \mathfrak{A} \models t = t' \Rightarrow \gamma(t) \leq \gamma(t')\}$, где γ - гёделевская нумерация.

Обратно, положим $\Phi = \{t_i \neq t_j / i \neq j\}$. Очевидно, $\mathfrak{A} \models \Phi$ и Φ не выполняется ни в какой собственной фактор-алгебре структуры $\mathfrak{A}$.

СЛЕДСТВИЕ 3 (А.И.Мальцев [7]). Если алгебраическая структура $\mathfrak{A}$ обладает конгруэнциями только конечного индекса, то она рекурсивнопредставима.

Назовем конечную конъюнкцию равенств между замкнутыми равенствами m-полной, если каждый терм высоты m входит хотя бы в одно равенство и в каждом равенстве один из термов имеет высоту m , а другой - строго меньшую высоту (высота терма определялась в доказательстве предложения I). Очевидно, что имеется конечное, с точностью до логической эквивалентности, число m-полных предложений, причем это число, назовем его $r(m)$, эффективно вычисляется по m. Пусть $D_m^1, \ldots, D_m^{r(m)}$ – все m-полные предложения. Нетрудно понять, что алгебраическая структура конечна тогда и только тогда, когда в ней истинно некоторое m-полное предложение для подходящего m. Пусть $\mathfrak{A} \models t_1 \neq t_2$. Положим

$$\Phi = \{ D_m^j \to x = y / 1 \leq j \leq r(m),\ m \in \omega \setminus \{0\} \} \cup \{ t_1 \neq t_2 \}.$$

Тогда $\mathfrak{A}$ рекурсивно-представима по теореме 2.

СЛЕДСТВИЕ 4 (Д.Мак-Кинси [16]). Финитно-аппроксимируемая алгебраическая структура, свободная в конечнобазируемом многообразии, рекурсивнопредставима.

Свойство "быть свободной" и конечная базируемость позволяют эффективно выписать последовательность конечных гомоморфных образов исходной структуры. Вместе с финитной аппроксимируемостью эта последовательность дает эффективный способ перечисления всех неравенств, истинных в свободной структуре. Это множество и примем за Φ.

ЗАМЕЧАНИЕ. Прямое применение теоремы 2 к доказательствам следствий I–4, особенно последних двух, малоэффективно. В доказательствах этих следствий необходимо, в большей или меньшей степени, пользоваться идеями самих авторов. Однако во всех этих доказательствах есть одна общая черта: по существу, авторы строили множество Φ, указанное в теореме 2, существование которого влечет негативность исходной структуры. Поэтому следствия I–4 приведены главным образом для иллюстрации именно этого факта.

Приведем пример "эффективного" применения теоремы 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для произвольной алгебраической структуры $\mathfrak{A}$ следующие условия эквивалентны:

1) $\mathfrak{A}$ не является рекурсивнопредставимой;

2) если K – произвольный эффективно аксиоматизируемый универсальный класс, содержащий $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{A}$ аппроксимируется K-алгебрами, не изоморфными $\mathfrak{A}$;

3) всякое позитивно представимое конечное обогащение $\mathfrak{A}$ подпрямо разложимо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) $\Rightarrow$ 2). Пусть K – универсальный класс, $\mathfrak{A} \in K$ и E – рекурсивно-перечислимое множество универсальных аксиом для класса K. Если $\mathfrak{A} \models t_1 \neq t_2$, где t_1, t_2 – замкнутые термы, то $E \cup \{t_1 \neq t_2\}$ – рекурсивно-перечислимое множество универсальных предложений, каждое из которых истинно в $\mathfrak{A}$. По теореме 2, в силу не рекурсивной представимости $\mathfrak{A}$, множество $E \cup \{t_1 \neq t_2\}$ выполняется в подходящем гомоморфном образе $\mathfrak{A}_0$ структуры $\mathfrak{A}$, не изоморфном $\mathfrak{A}$. Таким образом, $\mathfrak{A}_0$ есть K-алгебра, в которой $t_1 \neq t_2$.

2) $\Rightarrow$ 3). По теореме 2 структура $\mathfrak{A}$ не имеет рекурсивного представления, а значит, таким представлением не обладает никакое конечное позитивно представимое обогащение $\mathfrak{A}^*$ структуры $\mathfrak{A}$. Любые два элемента $\mathfrak{A}^*$, опять-таки по теореме 2, различаются ненулевой конгруэнцией, поэтому пересечение всех ненулевых конгруэнций алгебраической структуры $\mathfrak{A}^*$ есть нулевая конгруэнция. Следовательно, $\mathfrak{A}^*$ подпрямо разложима [10].

3) $\Rightarrow$ I). Пусть $\mathfrak{A}$ изоморфна рекурсивной алгебре $(\omega; f_0, \ldots, f_m, c_0, \ldots, c_n)$, тогда алгебра $(\omega; f_0, \ldots, f_m, c_0, \ldots, c_n, g_0, \ldots, g_t)$, где $g_0, \ldots, g_t$ – рекурсивные функции, есть позитивно представимое конечное обогащение для $\mathfrak{A}$. Выбрав $g_0, \ldots, g_t$ так, чтобы алгебра $(\omega; g_0, \ldots, g_t)$ не имела нетривиальных конгруэнций, добьемся того, что алгебра $(\omega; f_0, \ldots, f_m, c_0, \ldots, c_n, g_0, \ldots, g_t)$ будет простой, а значит, подпрямо неразложимой [10]. Предложение доказано.

Сделаем важное замечание, касающееся связи между рекурсивной представимостью алгебраических структур и свойствами их обогащений. Всякая рекурсивно представимая алгебраическая структура изоморфна алгебре $(\omega; f_0, \ldots, f_m, c_0, \ldots, c_n)$ для подходящего набора рекурсивных функций $f_0, \ldots, f_m$ и чисел $c_0, \ldots, c_n$. Если g – рекурсивная функция, то алгебра $(\omega; f_0, \ldots, f_m, c_0, \ldots, c_n, g)$ есть рекурсивно представимое обогащение исходной структуры, поэтому рекурсивно представимые алгебраические структуры никак не связаны со своими позитивно представимыми обогащениями. Если же алгебраическая структура не является рекурсивно представимой, то обогащать ее можно не произвольными семействами рекурсивных функций, а лишь такими, которые допустимы относительно нумерационной эквивалентности позитивной нумерации структуры. Из предложения 2, в частности, следует, что как бы мы ни пытались уменьшить число конгруэнций не рекурсивно представимой алгебраической структуры путем добавления подходящих рекурсивных функций, число конгруэнций всегда будет оставаться достаточным для того, чтобы нетривиально различать любое конечное множество элементов обогащения. В общем случае можно сказать, что во многих конкретных ситуациях строение всевозможных эффективных обогащений позитивно, но не рекурсивно представимых алгебр (не обязательно являющихся алгебраическими структурами) очень тесно связано со строением исходной алгебры. Подробнее с этим можно ознакомиться в [5,6].

Перейдем к рассмотрению связей между нётеровостью решеток конгруэнций алгебраических структур и их эффективными свойствами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Если $\mathfrak{A}$ - бесконечная алгебраическая структура с нётеровой решеткой конгруэнций и К-эффективно аксиоматизируемый универсальный класс, содержащий $\mathfrak{A}$, то существует бесконечная рекурсивно представимая К-алгебра, являющаяся гомоморфным образом $\mathfrak{A}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть E - рекурсивно-перечислимое множество универсальных аксиом для K и Φ - рекурсивно-перечислимое множество универсальных предложений, выполнимое в любой бесконечной и невыполнимое в любой конечной алгебре (например, Φ можно выбрать, как в доказательстве следствия 3). Если $\mathfrak{A}$ рекурсивно представима, то доказывать нечего. В противном случае по теореме 2 существует собственный гомоморфный образ $\mathfrak{A}_0$ структуры $\mathfrak{A}$, являющийся моделью для $E \cup \Phi$.

ЛЕММА 2. *Всякая фактор-алгебра алгебраической структуры с нётеровой решеткой конгруэнций есть алгебраическая структура, т.е. является позитивно-представимой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{A}_0$ - гомоморфный образ $\mathfrak{A}$, не изоморфный $\mathfrak{A}$, и ядро соответствующего гомоморфизма не рекурсивно-перечислимо. Пусть $\mathfrak{A} \models t_1 \neq t_2$ и $\mathfrak{A}_0 \models t_1 = t_2$. Тогда наименьшая конгруэнция, содержащая нулевую конгруэнцию и пару $\langle t_1, t_2 \rangle$, является, очевидно, рекурсивно-перечислимой и фактор-алгебра $\mathfrak{A}_1$ алгебры $\mathfrak{A}$ по ней позитивно представима; $\mathfrak{A}_1$- собственный гомо -

морфный образ $\mathfrak{A}$, так как $\mathfrak{A}_1 \models t_1 = t_2$ и $\mathfrak{A}_0$ – собственный гомоморфный образ $\mathfrak{A}_1$, так как $\mathfrak{A}_1$ – позитивно представимая алгебра. Рассматривая $\mathfrak{A}_1$ в качестве $\mathfrak{A}$ и итерируя проведенные рассуждения, получим цепочку эпиморфизмов $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2 \to \ldots$, в которой каждый эпиморфизм имеет ненулевое ядро и любая алгебра $\mathfrak{A}_n$ есть гемоморфный прообраз $\mathfrak{A}_0$. Это противоречит нётеровости. Лемма доказана.

Таким образом, $\mathfrak{A}_0$ позитивно представима. Если $\mathfrak{A}_0$ рекурсивно представима, то она и будет удовлетворять требованию предложения. В противном случае по теореме 2 опять найдется алгебра $\mathfrak{A}_1$ такая, что $\mathfrak{A}_1 = E \cup \Phi$, $\mathfrak{A}_1$ есть собственный гомоморфный образ $\mathfrak{A}_0$ и $\mathfrak{A}_1$, по лемме 2 позитивно представима. Итерация этого рассуждения и нётеровость решетки конгруэнций гарантируют существование требуемой алгебры. Предложение доказано.

Алгебраическую структуру $\mathfrak{A}$ назовем эффективно бесконечной, если существует бесконечное рекурсивно-перечислимое множество попарно не эквивалентных в $\mathfrak{A}$ термов. Понятие эффективно бесконечных алгебраических структур важно в связи с тем, что известная методика спецификации бесконечных алгебраических структур использует бесконечные рекурсивные множества не эквивалентных термов.

СЛЕДСТВИЕ 5. *Всякая алгебраическая структура с нётеровой решеткой конгруэнций либо конечна, либо эффективно бесконечна.*

По предложению 3 для бесконечной алгебраической структуры с нётеровой решеткой конгруэнций найдется бесконечный рекурсивно представимый гомоморфный образ. Множество представителей всех, с точностью до эквивалентности, попарно различных в этом гомоморфном образе термов можно взять в качестве исходного множества.

В [6] доказано существование алгебраических структур, не являющихся эффективно бесконечными.

СЛЕДСТВИЕ 6. *Никакое позитивно представимое конечное обогащение бесконечной алгебраической структуры, не являющейся эффективно бесконечной, не обладает нётеровой решеткой конгруэнций.*

Пусть $\mathfrak{A}$ – бесконечная, но не эффективно бесконечная алгебраическая структура сигнатуры Σ и $\mathfrak{A}^*$ – произвольное позитивнопредставимое конечное обогащение структуры $\mathfrak{A}$. В силу рекурсивной устойчивости алгебраических структур [4], имеем рекурсивную эквивалентность $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}^* \upharpoonright \Sigma$. Если $\mathfrak{A}^*$ имеет нётерову решетку конгруэнций, то она, по следствию 5, эффективно бесконечна,но тогда эффективно бесконечно и ее Σ-обеднение, изоморфное $\mathfrak{A}$.

Другие вопросы, связанные с решеткой конгруэнций алгебраических структур, можно найти в [II].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Алгебраическая структура рекурсивнопредставима тогда и только тогда, когда существует ее позитивнопредставимое конечное обогащение, решетка конгруэнций которого нётерова и артинова одновременно.

Рекурсивная представимость алгебраических структур с нётеровой и артиновой решеткой конгруэнций доказана в [II]. Если же структура рекурсивно представима, то, очевидно, таково же и любое ее обеднение. Обратную импликацию доказать совсем просто. Достаточно на алгебре вида $(\omega; f_0,\ldots,f_m,c_0,\ldots,c_n)$ с рекурсивными функциями $f_0,\ldots,f_m$, изоморфной исходной, определить любые рекурсивные функции $g_0,\ldots,g_t$ так,чтобы алгебра $(\omega; f_0,\ldots,f_m, c_0,\ldots,c_n,g_0,\ldots,g_t)$ была простой.

В заключение автор выражает глубокую признательность С.С.Гончарову за постоянное внимание к работе.

Литература

1. ГОНЧАРОВ С.С. Матрицы как абстрактный тип данных //Математическое обеспечение ВС из микро-ЭВМ.-Новосибирск, 1983.-Вып. 96: Вычислительные системы. - С. 75-86.

2. ГОНЧАРОВ С.С. Модели данных и языки их описания //Логико-математические основы проблемы МОЗ. -Новосибирск, 1985. -Вып.107: Вычислительные системы. - С. 52-70.

3. ЕРШОВ Ю.Л. Теория нумераций. - М.: Наука, 1977.

4. ЕРШОВ Ю.Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. - М.: Наука, 1980.

5. КАСЫМОВ Н.Х. Об алгебрах с финитно-аппроксимируемыми позитивно-представимыми обогащениями //Алгебра и логика, 1987.-Т.26. № 6. - С.715-730.

6. КАСЫМОВ Н.Х., ХУСАЙНОВ Б.М. Конечно-порожденные перечислимые и абсолютно локально-конечные алгебры //Прикладная логика. - Новосибирск, 1986. - Вып. 116: Вычислительные системы.-С. 3-15.

7. МАЛЬЦЕВ А.И. Конструктивные алгебры. I. //Избранные труды, т.2. - М., 1976. - С. 134-185.

8. МАЛЬЦЕВ А.И. Алгебраические системы. -М.: Наука, 1970.

9. РОДЖЕРС Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. -М.: Мир, 1972.

10. СКОРНЯКОВ Л.А. Элементы общей алгебры. -М.: Наука, 1983.

11. BAUR W. Rekursive Algebren mit Kettenbedingungen// Z.Math. Logik Grundl.Math.-1974.-Bd 20,N 1.- S.37-46.

12. BERGSTRA I.A., TUCKER I.V. Algebraic specifications of computable and semicomputable data structures// Preprint, Amsterdam, 1979.

13. BERGSTRA I.A., TUCKER I.V. A characterisation of comput - able data types by means of a finite eouational specifications method// Lect.Not.Comp.Sci. V.85.- 1980.

14. KOWALSKI R. Predicate logicas programming language//Proc. IFIP Congr., Amsterdam,1974.- P.569-574.

15. LLOYD I.W. Foundations of Logic Programming. - Springer - Verlag,1984.

16. McKINSEY I. The decision problem for some classes of without quatifiers// J.Symbol.Log.- 1943.- V.8,N 3.- P.61-76.

17. Логическая тетрадь. - Новосибирск, 1986.

Поступила в ред.-изд.отд.
13 апреля 1987 года