ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ
(Вычислительные системы)
1987 год Выпуск 122

УДК 510.25:519.68

# АЛГОРИТМ АНАЛИЗА КВАЗИРЕДУЦИРУЕМОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ПОДСТАНОВОК ТЕРМОВ

Г.А.Кучеров

## Введение

Результаты, представленные в работе, были получены в процессе исследования задач, возникающих при анализе алгебраических спецификаций абстрактных типов данных. Применяемый язык спецификаций - язык универсальных равенств, преобразованных в правила подстановки термов [1]. При использовании таких спецификаций важно уметь распознавать их семантические свойства. К ним относятся непротиворечивость спецификации, истинность данного равенства в некоторой (как правило, инициальной) модели данной спецификации, выразимость некоторой функции через другие, консервативность заданной теории по отношению к базисным (примитивным) спецификациям. Разумеется, все эти свойства в общем случае являются алгоритмически неразрешимыми, однако при естественных ограничениях, возникающих при самом использовании систем подстановок термов, а также накладываемых на эти системы, удается строить для распознавания этих свойств разрешающие алгоритмы. При переформулировке этих свойств на язык систем подстановок термов анализ их сводится прямо или косвенно к проверке квазиредуцируемости некоторого терма $t$ относительно системы $R$, т.е. редуцируемости $t$ при всех означиваниях переменных базисными термами. Например, для анализа консервативности (достаточной полноты) спецификации такое сведение осуществлено в работах [2,3]. Связь квазиредуцируемости с задачей доказательства равенств, истинных в инициальной модели, представлена в работе [4].

В качестве удобных средств, используемых для исследования описанных задач, нами выделены новые понятия - покрытия и допол -

нения. Изучение этих понятий, в свою очередь, привело к ряду результатов, полезных для формулировки и обоснования алгоритмов, а также представляющих, на наш взгляд, чисто математический интерес. Соответствующий материал излагается в §2; §3 посвящен изложению и обоснованию алгоритма распознавания квазиредуцируемости для линейных систем и представляет собой усовершенствование алгоритма, предложенного в [3]. В целом настоящая работа является развитием идей из [3] в направлении более глубокого их изучения и строгого обоснования.

## §I. Используемые понятия и обозначения

Для простоты мы будем вести изложение для односортных теорий, хотя в контексте теории абстрактных типов данных обычно рассматривается многосортный вариант. Отличия для многосортного случая носят технический характер и легко могут быть преодолены.

Рассмотрим конечное множество функциональных символов $F$, каждому из которых поставлено в соответствие натуральное число - его местность. При необходимости местность символа будем указывать в качестве его верхнего индекса. Пусть $X$ - счетное множество переменных. Через $T_F(X)$ обозначим множество термов с переменными из $X$, а через $T_F$ - множество термов без переменных (базисных термов). Всюду далее будем предполагать, что $F$ содержит по меньшей мере один символ местности нуль (константный символ) и один символ положительной местности. Это гарантирует бесконечность $T_F$. Ясно, что терм имеет структуру дерева, поддерево которого назовем подтермом исходного терма. Под $root(t)$ будем понимать ведущий (корневой) символ терма $t$. Для рассуждений о термах нам будет удобно пользоваться координатами - цепочками натуральных чисел. Каждому $t \in T_F(X)$ поставим в соответствие множество координат $O(t)$ и для каждой координаты $u \in O(t)$ определим $t/u$ - подтерм терма $t$ по координате $u$ следующим образом:

если $t$ - переменная или константный символ, то $O(t) = \{\varepsilon\}$, где $\varepsilon$ - пустая цепочка;

если $t = f(t_1,\dots,t_n)$, то $O(t) = \{\varepsilon\} \cup \{ iu \mid u \in O(t_i)\}$, где $iu$ обозначает добавление $i$ к цепочке $u$, $t/\varepsilon = t$, $t/iu = t_i/u$.

Если $u_1$ - префикс цепочки $u_2$, то $u_1 \preceq u_2$; $u_1 \prec u_2$, если $u_1 \preceq u_2$, и неверно $u_2 \preceq u_1$. Если $u_1, u_2 \in O(t)$, $u_1 \preceq u_2$, то $t/u_2$ - подтерм $t/u_1$. Через $|u|$ обозначим длину цепочки $u$. Если

$u \in O(t)$, то будем говорить, что подтерм $t/u$ имеет высоту $|u|$ в терме $t$. Определим функцию глубины терма $depth(t) = \max\{|u| \mid u \in O(t)\}$ и определим

$$O_{var}(t) = \{u \in O(t) \mid t/u \in X\},$$

$$var(t) = \{x \in X \mid \exists u \in O_{var}(t) \quad t/u = x\}.$$

Терм назовем линейным, если $\forall u_1, u_2 \in O_{var}(t)$, $t/u_1 \neq t/u_2$. Переменную $x \in var(t)$ назовем линейной, если $\exists!\ u \in O_{var}(t)$ $t/u = x$, и нелинейной в противном случае. Для $u \in O(t)$ через $t[u \leftarrow s]$ обозначим терм, полученный заменой в терме $t$ подтерма $t/u$ термом $s$.

Отображение $\tilde{\sigma}: X \to T_F(X)$ и его гомоморфное расширение $\sigma: T_F(X) \to T_F(X)$ называется подстановкой. Область определения подстановки $\sigma$ определим как $Dom(\sigma) = \{x \in X \mid \sigma(x) \neq x\}$. Нас будут интересовать подстановки с конечной областью определения. Множество таких подстановок обозначим через $S$. Если $\forall x \in Dom(\tau)$ $\tau(x) \in T_F$, то такую подстановку назовем базисной. Множество всех базисных подстановок обозначим через $GS$. Подстановку $\sigma \in S$ будем записывать в виде $\sigma = \langle x_1 \leftarrow t_1, \ldots, x_n \leftarrow t_n \rangle$, где $\{x_1, \ldots, x_n\} = Dom(\sigma)$ и $\forall i \in \overline{1,n}$ $\sigma(x_i) = t_i$. Композиция подстановок определяется естественным образом: $(\sigma \circ \tau)(t) = \tau(\sigma(t))$. Под проекцией подстановки $\sigma$ на множество $Y \subset X$ (обозначается $\sigma|_Y$) понимается подстановка $\tau$ такая, что $\tilde{\tau}(x) = \tilde{\sigma}(x)$, если $x \in Dom(\sigma) \cap Y$, и $\tilde{\tau}(x) = x$ в противном случае.

Определим отношение частичного порядка на множестве термов $T_F(x)$: $t \leq s$, если $\exists \sigma \in S$ $s = \sigma(t)$. Известно [5], что множество $T_F(X)$ образует верхнюю полурешетку по отношению $\leq$. Определим $t \equiv s \Leftrightarrow t \leq s$ и $s \leq t$. Легко видеть, что $t \equiv s$ тогда и только тогда, когда $t$ можно получить из $s$ взаимно-однозначным переименованием переменных. Опираясь на это, мы, как правило, будем рассматривать терм с точностью до именно такого переименования, т.е. при рассмотрении произвольных термов $t$, $s$ будем считать, что $var(t) \cap var(s) = \emptyset$. Случаи, когда такое допущение некорректно (например, если речь идет о подтермах одного терма), будут ясны из контекста. Если $P \subset T_F(X)$ и $P$ имеет нижнюю грань, то $P$ имеет единственную точную нижнюю грань. Пусть $P = \{t_1, \ldots, t_n\}$ - конечное множество, $s$ - точная нижняя грань $P$, т.е. $s = \sigma_1(t_1) = \ldots = \sigma_n(t_n)$. В этом случае термы $t_1, \ldots, t_n$ называются унифицируемыми, а каждая $\sigma_i$ (или объединенная подстановка $\sigma = \sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_n$) - наиболее общим унификатором $t_1, \dots, t_n$. Известно, что существует алгоритм, распознающий, являются ли термы $t_1, \dots, t_n$ унифицируемыми, и в случае положительного ответа находящий наиболее общий унификатор.

Система подстановок термов $R = \{l_i \to r_i\}$, где $l_i, r_i \in T_F(X)$, $var(r_i) \subseteq var(l_i)$, интуитивно интерпретируется как множество правил преобразования термов. Терм $t$ редуцируется в $s$ по координате $u \in O(t)$ с помощью правила $(l_i \to r_i) \in R$, если $\exists \sigma \in S$ $t/u = \sigma(l_i)$, при этом $s = t[u \leftarrow \sigma(r_i)]$. Терм $t$ в этом случае называется редуцируемым. Если $u = \varepsilon$, то будем говорить, что $t$ редуцируем целиком. Терм $t$ квазиредуцируем, если $\forall \tau \in GS$ $\tau(t)$ редуцируем. Система подстановок термов $R$ называется линейной, если $\forall (l_i \to r_i) \in R$ $l_i$ – линейный терм.

## §2. Покрытия и их свойства

При исследовании алгебраической спецификации абстрактных типов данных обычно рассматриваются ее термальные модели, т.е. фактор-алгебры алгебры базисных термов $T_F$. Базисный терм $m \in T_F$ ассоциируется с некоторым объектом типа, а терм с переменными $t \in T_F(X)$ интуитивно воспринимается как "покрывающий" соответствующее множество термов без переменных (объектов типа). В данном параграфе дается формализация рассматриваемых понятий и исследуются их свойства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Множество термов $\Theta \subset T_F(X)$ назовем покрытием множества базисных термов $\Sigma \subset T_F$, если $\forall m \in \Sigma$ $\exists t \in \Theta$, $t \le m$. В этом случае будем говорить, что множество $\Sigma$ и каждый его элемент покрываются $\Theta$. Множество $\Theta$ назовем полным покрытием, если оно покрывает все множество $T_F$.

ПРИМЕР I. Пусть $F = \{a^0, b^0, h^1, f^2\}$. Тогда множество $\Theta = \{a, b, h(a), h(b), h(h(x)), h(f(x,y)), f(x,y)\}$ является полным покрытием.

Тривиальными примерами полных покрытий являются одноэлементное множество $\{x\}$ (или любое множество, его содержащее) или все множество базисных термов $T_F$. В качестве примера нетривиального полного покрытия построим множество $\pi(k)$, которое будем использовать в дальнейшем изложении. Для $t \in T_F(x)$ определим функцию $minvar(t) = min\{|u| \mid u \in O_{var}(t)\}$, выдающую минимальную высоту переменной в терме $t$. Определим:

$\pi_{const}(k) = \{t \in T_F \mid depth(t) < k\}$,

$\pi_{var}(k) = \{t \in T_F(x) \mid depth(t) = k,\ minvar(t) = k,\ t$ линеен$\}$,

$\pi(k) = \pi_{const}(k) \cup \pi_{var}(k)$.

Ясно, что поскольку $\forall t \in \pi(k)\ depth(t) \le k$, то $\pi(k)$ конечно.

Докажем

УТВЕРЖДЕНИЕ I. $\forall k\ \ \pi(k)$ - полное покрытие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t \in T_F$. Если $depth(t) < k$, то $t \in \pi_{const}(k)$ и, следовательно, покрывается $\pi(k)$. Если $depth(t) \ge k$, то преобразуем $t$ в терм $\tilde{t} \in T_F(X)$, заменив все подтермы $t/u_i$ при $u_i \in O(t)$, $|u_i| = k$, $i \in \overline{1,n}$, на различные переменные $x_1, \dots, x_n$ из $X$. Ясно, что $t = \sigma(\tilde{t})$ при $\sigma = \langle x_1 \leftarrow t/u_1, \dots, x_n \leftarrow t/u_n \rangle$. С другой стороны, $\tilde{t} \in \pi_{var}(k)$. Следовательно, при $depth(t) \ge k$ терм $t$ также покрывается $\pi(k)$.

Следующее полезное понятие - дополнение множества термов до полного покрытия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\theta \subset T_F(X)$. Множество $\bar{\theta} \subset T_F(k)$ называется дополнением $\theta$ до полного покрытия, если

1) $\theta \cup \bar{\theta}$ - полное покрытие,

2) $\forall s \in \theta\ \ \forall t \in \bar{\theta}\ \ s$ и $t$ неунифицируемы.

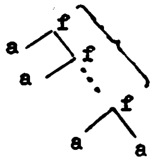
Требование 2 означает, что множества базисных термов, покрываемые $\theta$ и $\bar{\theta}$, не должны пересекаться.

ПРИМЕР 2. В примере I для любого $\Gamma_1 \subset \theta$ верно $\bar{\Gamma}_1 = \theta \setminus \Gamma_1$, так как $\forall t, s \in \theta\ \ t$ и $s$ неунифицируемы. Если $\Gamma_2 = \{f(h(x), y),\ f(x,a)\}$, то в качестве $\bar{\Gamma}_2$ можно взять $\{a, b, h(x), f(a,b), f(a,h(x)), f(a,f(x,y)), f(b,b), f(b,h(x)), f(b,f(x,y)), f(f(x,y), b), f(f(x,y), h(z)), f(f(x,y), f(z,v))\}$.

В приведенном примере фигурировали только линейные термы. Для множества, включающего нелинейные термы, нахождение покрытия представляет более сложную задачу. Ниже мы увидим, что для конечного множества линейных термов всегда существует конечное дополнение, в то время как для множества с нелинейными термами не всегда. Иллюстрацией последнего утверждения служит простое

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $F = \{a^0, f^2\}$, $\theta = \{a, f(x,x)\}$. Тогда не существует конечного $\bar{\theta}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда $\bar{\theta} = \{f(t_i, s_i) \mid i \in \overline{1,n}\}$. Обозначим

$M_j =$  $j$ раз

и рассмотрим терм $N_j = f(M_j, M_{j+1}) \in T_F$. Заметим, что $depth(N_j) = j+1$. Так как $N_j$ не покрывается $\theta$, то $\exists f(t_k, s_k) \in \bar{\theta}$ $f(t_k, s_k) \le N_j$. Пусть $j \ge \max\{depth(f(t_i, s_i)) \mid i \in \overline{1,n}\}$. Легко заметить, что $t_k$ и $s_k$ имеют вид:

$$t_k = f(\xi_1, f(\xi_2, f(\ldots f(\xi_l, x)\ldots))),$$

$$s_k = f(\eta_1, f(\eta_2, f(\ldots f(\eta_m, y)\ldots))),$$

где $x, y \in X$, а $\xi_1, \ldots, \xi_l$, $\eta_1, \ldots, \eta_m$ обозначают либо символ $a$, либо некоторую переменную из $X$.

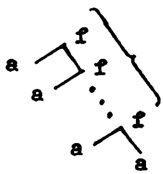
Отметим следующие факты:

$n, m < j$;

$x$ не может совпадать ни с одним из $\xi_i$, а $y$ – ни с одним из $\eta_i$;

среди $\xi_i$ и $\eta_j$, являющихся переменными, могут быть совпададающие.

Пусть (для определенности) $l < m$. Определим подстановку $\sigma \in GS$, поставив в соответствие переменной $y$, а также всем переменным $\xi_i$ и $\eta_j$ терм $a$, а переменной $x$ – терм

 $(m-1)$ раз

Отметим, что поскольку всем $\xi_i$ и $\eta_j$ ставится в соответствие один и тот же терм, то, несмотря на их возможное совпадение, подстановка $\sigma$ определена корректно. Поскольку $\sigma(t_k) = \sigma(s_k)$, то $\sigma(f(t_k, s_k))$ покрывается $\theta$. Это означает, что для конечного $\bar{\theta}$ условие 2 не может быть выполнено, что приводит к противоречию.

Дальнейшей целью статьи являются ответы на следующие вопросы. Всегда ли для конечного множества линейных термов существует конечное дополнение? В каких случаях нельзя построить конечного дополнения для множества, содержащего нелинейные термы, и в каких случаях можно?

ЛЕММА I. Пусть $\theta$ - множество линейных термов. Пусть $t \in T_F(X)$ такой, что $\mathrm{minvar}(t) > \max\{\mathrm{depth}(s) \mid s \in \theta\}$. Тогда выполняется одна из следующих альтернатив:

(I) $t \in T_F$ и $t$ покрывается $\theta$;

(2) $t \in T_F$ и $t$ не покрывается $\theta$;

(3) $\mathrm{var}(t) \neq \emptyset$ и $\forall s \in \theta$ $s$ и $t$ неунифицируемы (в частности, $\forall s \in \theta$ $\forall \sigma \in S$ $\sigma(s) \neq t$);

(4) $\mathrm{var}(t) \neq \emptyset$ и $\exists s \in \theta$ $\exists \sigma \in S$ $\sigma(s) = t$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фактически лемма утверждает, что невозможна пятая альтернатива:

$$(*)\ \mathrm{var}(t) \neq \emptyset,\quad \exists s \in \theta \quad s \text{ и } t \text{ унифицируемы, но } \forall \sigma \in S \quad \sigma(s) \neq t.$$

Доказательство невозможности этой ситуации похоже на доказательство утверждения I. Пусть $t$ удовлетворяет условию леммы, $s \in \theta$, $s$ и $t$ унифицируемы. Рассмотрим координату $u \in O(s) \setminus O_{var}(s)$. Учитывая то, что $s$ и $t$ унифицируемы и $\mathrm{depth}(s) < \mathrm{minvar}(t)$, легко понять, что $u \in O(t) \setminus O_{var}(t)$ и $\mathrm{root}(t/u) = \mathrm{root}(s/u)$. Следовательно, поскольку $s$ линеен, его можно отождествить с $t$, подставив на место каждой переменной с координатой $u \in O_{var}(s)$ терм $t/u$. Это и приводит ситуацию (*) к противоречию.

Заметим, что условие леммы можно слегка ослабить, потребовав, чтобы $\mathrm{minvar}(t) \geq \max\{\mathrm{depth}(s) \mid s \in \theta\}$, но если для некоторого $s \in \theta$ $\exists u \in O(s)$ $|u| = \max\{\mathrm{depth}(s) \mid s \in \theta\}$, то $s/u \in X$.

ТЕОРЕМА I. Для любого множества линейных термов всегда существует конечное дополнение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\theta$ - множество линейных термов. Рассмотрим $\pi(k)$ для любого $k > \max\{\mathrm{depth}(s) \mid s \in \theta\}$. По лемме I для любого $t \in \pi(k)$ выполняется одна из первых четырех альтернатив. Термы, для которых выполняется вторая или третья, объединим во множество $\bar{\theta}$. Покажем, что $\bar{\theta}$ действительно является дополнением, т.е. удовлетворяет определению 2. Поскольку $\pi(k)$ является полным покры -

тием, то $\forall m \in T_F$ $\exists t \in \pi(k)$ $\exists \sigma \in GS$ $m = \sigma(t)$. Если $t$ удовлетворяет второй или третьей альтернативам, то $m$ покрывается $\bar{\theta}$. Если $t$ удовлетворяет первой альтернативе, то $m = t \in \theta$. Наконец, если $t$ удовлетворяет четвертому условию, т.е. $\exists s \in \theta$ $\exists \eta \in s$ $\eta(s) = t$, то $(\eta \circ \sigma)(s) = \sigma(\eta(s)) = \sigma(t) = m$, т.е. $m$ покрывается $\theta$. Условие 2 определения 2 следует непосредственно из второго и третьего условий леммы I. Конечность $\bar{\theta}$ следует из конечности $\pi(k)$.

Отметим, что доказательство теоремы I дает конструктивный путь построения дополнения для множества линейных термов. Кроме того, термы из этого дополнения могут быть глубины не больше любого наперед заданного $k$, где $k > \max\{depth(s) \mid s \in \theta\}$.

Ситуация существенно усложняется в случае нелинейных термов, так как здесь лемма I перестает быть верной, т.е. утверждение (*) в этом случае может быть истинным. Так, например, для примера из утверждения 2 терм $f(f(x,y), f(z,v))$ не является результатом подстановки для любого терма из $\theta$, но унифицируем с $f(x,x) \in \theta$ подстановкой $\sigma = \langle z \leftarrow x,\ v \leftarrow y \rangle$.

Ответы на второй поставленный вопрос дают следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $\Gamma \subset T_F(X)$ целиком состоит из нелинейных термов. Тогда не существует конечного дополнения $\bar{\Gamma}$, состоящего из линейных термов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\theta = \bar{\Gamma}$, $\theta$ конечно и $\forall s \in \theta$ $s$ линеен. Рассмотрим $\pi(k)$ для $k > \max\{depth(t) \mid t \in \theta \cup \Gamma\}$. Доказательство теоремы I показывает, что $\theta$ разбивает $\pi(k)$ на непересекающиеся множество термов, удовлетворяющих условиям I или 4, и множество термов, удовлетворяющих условиям 2 или 3 леммы I. Последнее множество образует дополнение $\bar{\theta} \subset \pi(k)$ для множества $\theta$. Ясно, что $\bar{\theta}$ должно покрывать в точности те термы, которые покрываются $\Gamma$.

Рассмотрим $\Gamma_0 = \{t_1, \ldots, t_n\} \subset \Gamma$ – произвольное максимальное унифицируемое подмножество $\Gamma$, т.е. термы $t_1, \ldots, t_n$ унифицируемы и $\forall t \in \Gamma \setminus \Gamma_0$ $\forall i \in \overline{1,n}$ $t_i$ и $t$ неунифицируемы. Отметим, что в этом случае, если $u \in O(t_i)$, то $root(t_i/u)$ – переменная или фиксированный (для всех $t_i$) функциональный символ.

Из определения $\Gamma_0$ следует, что любой терм, покрываемый $\Gamma_0$, не может покрываться термами из $\Gamma \setminus \Gamma_0$. Доказательство проведем в два этапа:

I. Исходя из $\Gamma_0$, построим терм $\tilde{s} \in \pi(k)$ такой, что $\tilde{s}$ унифицируем с некоторым $t_i$, но $\forall i \in \overline{1,n}$ $t_i \not\leq \tilde{s}$. Ясно, что в этом случае $\tilde{s} \in \tilde{\theta}$ и, в силу унифицируемости $\tilde{s}$ с некоторым $t_i$ и свойства максимальности $\Gamma_0$, $\forall t \in \Gamma \setminus \Gamma_0$ $t \not\leq \tilde{s}$.

2. Исходя из $\tilde{s}$, построим терм $\tau(\tilde{s})$, $\tau \in GS$, который не может покрываться ни одним термом из $\Gamma$. Полученное противоречие свидетельствует о невозможности существования конечного $\theta$.

Рассмотрим первый этап. Для дальнейшего изложения нам необходимо осуществить следующее вспомогательное построение. Пусть $\xi^l \in F$, $l > 0$ (такой символ должен существовать по предположению, сделанному в §I). Обозначим через $N_j$ линейный терм, построенный с помощью единственного функционального символа $\xi$ и переменных из $X$, такой, что $\mathrm{minvar}(N_j) = \mathrm{depth}(N_j) = j$. Такой терм представляет собой дерево, у которого все нетерминальные вершины соответствуют символу $\xi$ и имеют ровно $l$ потомков, а все терминальные соответствуют различным переменным, причем длина каждой ветви равна $j$. Мы будем использовать тот факт, что любое множество вида $\{N_{j_1}, \ldots, N_{j_k}\}$, где каждый $N_{j_i}$ имеет уникальный набор переменных, унифицируемо. Доказательство этого факта считаем очевидным и поэтому опускаем.

Поочередно анализируя термы $t_1, \ldots, t_n$, будем строить термы $s_1, \ldots, s_n$, при этом каждый $s_i$ при $i \in \overline{2,n}$ будем строить путем преобразования $s_{i-1}$. Опишем построение $s_1$ на основе $t_1$. Для всех $u \in O_{var}(t_1)$ заменим переменные $t_1/u$ новыми термами $N_{j_u}$, где $j_u = k - |u|$, а все введенные термы содержат уникальные переменные, т.е. $\forall u_1, u_2 \in O_{var}(t_1)$ $u_1 \neq u_2 \Rightarrow \mathrm{var}(N_{j_{u_1}}) \cap \mathrm{var}(N_{j_{u_2}}) = \emptyset$.

Такое построение корректно, так как $\forall u \in O(t_1)$ $j_u > 0$, ввиду $k \geq \mathrm{depth}(t_1) \geq |u|$. Отметим, что нелинейным переменным в $t_1$ (а таковые обязательно существуют) мы поставили в соответствие термы, содержащие различные переменные, поэтому $t_1 \not\leq s_1$. С другой стороны, так как множество термов $N_j$, соответствующих различным координатам некоторой нелинейной переменной, унифицируемо, то ясно, что $t_1$ и $s_1$ унифицируемы. Поскольку по построению $\forall v \in O_{var}(s_1)$ $|v| = k$ и $\mathrm{depth}(s_1) = k$, то $s_1 \in \pi(k)$.

Опишем построение $s_i$ путем преобразования $s_{i-1}$ на основе анализа $t_i$. Если $t_i \not\leq s_{i-1}$, то положим $s_i = s_{i-1}$. В противном случае поскольку $s_{i-1}$ линеен, а $t_i$ нелинеен, то всем нелинейным переменным $t_i$ соответствуют базисные подтермы терма $s_{i-1}$. Подобно построению $s_1$, все нелинейные переменные $t_i/u$ заменим на $N_{j_u}$ (где $j_u = k - |u|$) с уникальным набором переменных, пост -

роив тем самым терм $s_i$. Аналогично случаю с $s_1$ убеждаемся, что $t_i \not\leq s_i$, но $t_i$ и $s_i$ унифицируемы.

Построив таким образом последовательность $s_1,\dots,s_n$, положим $\tilde{s} = s_n$ и докажем, что $\tilde{s}$ - искомый терм. Очевидно, что $\tilde{s}$ унифицируем с некоторым $t_i \in \Gamma_0$. Покажем, что $\forall i \in \overline{1,n}$ $t_i \not\leq \tilde{s}$. Предположим противное, т.е. $\exists i$ $t_i \leq \tilde{s}$, и покажем, что в этом случае $t_i \leq s_i$, что противоречит построению $s_i$. Для этого докажем три утверждения:

а) если $x$ - нелинейная переменная $t_i$ с координатами $u_1,\dots,u_k$, то $s_i/u_1 = \dots = s_i/u_k \in T_F$;

б) если $y$ - линейная переменная $t_i$ с координатой $u$, то $u \in O(s_i)$;

в) если $u \in O(t_i)$, $t_i/u \in T_F$, то $u \in O(s_i)$, $s_i/u = t_i/u$.

При доказательстве "а"-"в" воспользуемся следующими фактами. Поскольку в процессе построения $\tilde{s}$ мы заменяем базисные подтермы на термы вида $N_j$, а все терминальные вершины последних переменные, то если для некоторого $i$ $u \in O(s_i)$ $s_i/u \in T_F$, то $\forall j < i$ $u \in O(s_j)$ $s_j/u = s_i/u$. С другой стороны, если $s_i/u$ содержит переменные, то $\forall j > i$ $u \in O(s_j)$, $root(s_j/u) = root(s_i/u)$.

Если $t_i \leq \tilde{s}$, то, поскольку $\tilde{s}$ - линейный терм, каждой нелинейной переменной $t_i$ соответствуют в $\tilde{s}$ одинаковые базисные подтермы. В силу вышеприведенного замечания, эти подтермы с теми же координатами присутствуют в $s_i$, что доказывает утверждение "а".

Пусть $t_i/u = y$ - линейная переменная. Если $u \notin O(s_i)$, то $\exists v < u$ $root(s_i/v) \neq root(t_i/v)$. Если $s_i/v$ содержит переменные, то $root(s_i/v) = root(\tilde{s}/v)$, что противоречит предположению $t_i \leq \tilde{s}$. Если $s_i/v \in T_F$, то $\forall j < i$ $s_j/v = s_i/v$, в частности, $s_1/v = t_1/v \in T_F$. Но тогда $t_1$ и $t_i$ не будут унифицируемыми, что противоречит требованию унифицируемости $\Gamma_0$ в начале доказательства. Утверждение "б" доказано.

Если $t_i/u \in T_F$, то, так как $t_i \leq \tilde{s}$, $u \in O(\tilde{s})$ и $\tilde{s}/u = t_i/u$. Следовательно, $s_i/u = \tilde{s}/u = t_i/u$, что доказывает "в".

Перейдем ко второму этапу. Построим $\tau \in GS$: $\forall i \in \overline{1,n}$ $t_i \not\leq \tau(\tilde{s})$. Ясно, что достаточно рассматривать те $t_i$, которые унифицируемы с $\tilde{s}$.

Пусть $t_i$ унифицируем с $\tilde{s}$. Существует нелинейная переменная $x \in var(t_i)$: $t_i/u_1 = t_i/u_2 = x$, $\tilde{s}/u_1, \tilde{s}/u_2$ - термы с переменными. В противном случае $t_i \le \tilde{s}$, что противоречит построению $\tilde{s}$. Пусть $var(\tilde{s}) = \{x_1,\dots,x_n\}$, $var(\tilde{s}/u_1) = \{x_{i_1},\dots,x_{i_l}\} \subset var(\tilde{s})$, где $i_1 < \dots < i_l$ $var(\tilde{s}/u_2) = \{x_{j_1},\dots,x_{j_m}\} \subset var(\tilde{s})$, где $j_1<\dots<j_m$. Так как $\tilde{s}$ линеен, то $var(\tilde{s}/u_1) \cap var(\tilde{s}/u_2) = \emptyset$. Обозначим через $M_j$ произвольный базисный терм глубины $j$. Рассмотрим $\tau = \langle x_1 \leftarrow M_k, x_2 \leftarrow M_{2k},\dots, x_n \leftarrow M_{n\cdot k}\rangle$. Так как $0 < |u_1| < k$, а $\tilde{s} \in \pi(k)$, то $i_l \cdot k < depth(\tau(\tilde{s})/u_1) < (i_l+1)\cdot k$. Аналогично $j_m \cdot k < depth(\tau(\tilde{s})/u_2) < (j_m+1)\cdot k$. Так как $i_l \ne j_m$, то $depth(\tau(\tilde{s})/u_1) \ne depth(\tau(\tilde{s})/u_2)$, а следовательно, и $\tau(\tilde{s})/u_1 \ne \tau(\tilde{s})/u_2$, т.е. $t_i \not\le \tau(\tilde{s})$. В силу независимости $\tau$ от $t_i$ и произвольного выбора $t_i$, п.2 и вся теорема доказаны.

СЛЕДСТВИЕ I. Конечное множество, состоящее из нелинейных и базисных термов, не может иметь конечного дополнения, состоящего из линейных термов. В частности, такое множество не может быть полным покрытием.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Gamma = \Gamma_{нелин} \cup \Gamma_{базис}$. Тогда $\Gamma_{базис} = \Gamma'_{базис} \cup \Gamma''_{базис}$, где $\Gamma'_{базис}$ покрывается $\Gamma_{нелин}$, а $\Gamma''_{базис}$ не покрывается $\Gamma_{нелин}$. Тогда если $\theta$ – конечное дополнение $\Gamma$, то $\theta \cup \Gamma''_{базис}$ – конечное дополнение $\Gamma_{нелин}$, что противоречит теореме 2.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\Gamma$ – конечное множество нелинейных термов, $\theta$ – конечное множество линейных термов. Тогда $\Gamma \cup \theta$ – полное покрытие $\Leftrightarrow$ $\Gamma^* \cup \theta$ – полное покрытие, где $\Gamma^*$ – конечное множество линейных термов, полученное из $\Gamma$ подстановкой вместо нелинейных переменных базисных термов ограниченной глубины. В частности, если термы из $\Gamma$ не содержат линейных переменных, то $\Gamma^*$ – конечное множество базисных термов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $k > \max\{depth(s) \mid s \in \Theta\}$. Рассмотрим множество $\Gamma^* = \{\sigma(t) \mid t \in \Gamma, \sigma \in S\}$, где $\sigma$ удовлетворяет следующим ограничениям:

1. Если $x \in var(t)$, $x$ – линейная переменная с координатой $u$, то $|u| + depth(\sigma(x)) \leq k$, $|u| + minvar(\sigma(x)) = k$, причем если $v \in O(\sigma(x))$ $|v| = k - |u|$, то $\sigma(x)/v \in X$.

2. Если $y \in var(t)$, $y$ – нелинейная переменная с координатами $u_1, \ldots, u_n$, то $\sigma(y) \in T_F$, $\min\{|u_i| \mid i \in \overline{1,n}\} + depth(\sigma(y)) < k$.

Поскольку $\forall x \in var(t)$ $depth(\sigma(x))$ ограничена, то $\Gamma^*$ конечно. Отметим, что $\Gamma^*$ состоит из линейных термов. Пусть $M = \tau(t)$, где $t \in \Gamma$, $\tau \in GS$. Если для всех нелинейных переменных $t$ подстановка $\tau$ удовлетворяет условию 2, то $M = \eta(p)$ для некоторых $\eta \in GS$, $p \in \Gamma^*$. Если $\tau$ не удовлетворяет условию 2, т.е. для некоторой нелинейной переменной $y$ с координатами $u_1, \ldots, u_n$ имеет место $depth(\tau(y)) \geq k - \min\{|u_i| \mid i \in \overline{1,n}\}$, то "огрубим" терм $\tau(y)$, заменив подтермы, высота которых больше $(k - \min\{|u_i| \mid i \in \overline{1,n}\})$, новыми переменными. Обозначим $\Gamma^{**} = \{\sigma(t) \mid t \in \Gamma, \sigma \in S\}$, где $\sigma$ удовлетворяет условию I и следующему условию.

2′. Найдется $y \in var(t)$, где $y$ – нелинейная переменная с координатами $u_1, \ldots, u_n$, $\sigma(y)$ содержит переменные и $depth(\sigma(y)) = minvar(\sigma(y)) = k - \min\{|u_i| \mid i \in \overline{1,n}\}$.

Аналогично $\Gamma^*$ множество $\Gamma^{**}$ также конечно, но состоит из нелинейных термов. Согласно замечанию к лемме I, $\forall t_1 \in \Gamma^*$, $\forall t_2 \in \Gamma^{**}$, $t_1 \leq t_2$ либо $t_1$ и $t_2$ неунифицируемы. Первая альтернатива, очевидно, невозможна. С другой стороны, по лемме I, $\forall t \in \Gamma^{**}$ $\forall s \in \Theta$, $s \leq t$ либо $s$ и $t$ неунифицируемы. Пусть $\Gamma' = \{t \in \Gamma^{**} \mid \forall s \in \Theta\ s \not\leq t\}$. Если $\Gamma'$ пусто, то утверждение теоремы автоматически выполнено, в противном случае конечное множество линейных термов $\Gamma^* \cup \Theta$ является дополнением множества нелинейных термов $\Gamma'$, что противоречит теореме 2.

СЛЕДСТВИЕ I. *Множество нелинейных термов $\Gamma$ не может иметь конечного дополнения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{\Gamma} = \Theta \cup \Sigma$, где $\Theta$ – конечное множество линейных термов, $\Sigma$ – конечное множество нелинейных термов. Рассуждая аналогично доказательству теоремы 3, построим множества $\Sigma^*$ и $\Sigma^{**}$, затем выделим $\Sigma' \subset \Sigma^{**}$. При этом множество линейных термов $\Sigma^* \cup \Theta$ является дополнением множества нелинейных термов $\Sigma' \cup \Gamma$, что противоречит теореме 2.

В §3 нам понадобятся простые обобщения понятий покрытия и дополнения со множеств термов на множества кортежей термов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Множество кортежей термов $\Phi \subset (T_F(X))^n$ является полным покрытием, если для любого кортежа базисных термов $\nu \in (T_F)^n$, $\nu = (m_1, \dots, m_n)$ $\exists \varphi \in \Phi$ $\varphi = (t_1, \dots, t_n)$ $\exists \tau \in GS$ $\forall i \in \overline{1,n}$, $m_i = \tau(t_i)$. Множество кортежей $\bar{\Phi} \subset (T_F(X))^n$ – дополнение множества кортежей $\Phi$, если $\Phi \cup \bar{\Phi}$ – полное покрытие и $\forall \varphi_1 = (t_1, \dots, t_n) \in \Phi$ $\forall \varphi_2 = (s_1, \dots, s_n) \in \bar{\Phi}$ $\varphi_1$ и $\varphi_2$ неунифицируемы, т.е. $\nexists \sigma, \eta \in S$ $\forall i \in \overline{1,n}$ $\sigma(t_i) = \eta(s_i)$.

Легко видеть, что все результаты настоящего параграфа свободно переносятся на случай кортежей термов. В частности, если $\Phi$ – множество линейных кортежей, т.е. $\forall \varphi = (t_1, \dots, t_n)$ $\forall i \in \overline{1,n}$ $t_i$ – линейный терм и $\forall j \in \overline{1,n}$ $i \neq j \Rightarrow var(t_i) \cap var(t_j) = \emptyset$, то к $\Phi$ применимы лемма I и теорема I, естественным образом обобщенные на случай кортежей.

## §3. Применение к задаче анализа квазиредуцируемости

Понятие квазиредуцируемости играет важную роль при анализе абстрактных типов данных, описанных с помощью системы подстановок термов. Так, например, если $f^n \in F$, то квазиредуцируемость терма $f(x_1, \dots, x_n)$ в сочетании с полнотой системы подстановок термов означает полное задание функции $f$. Другими словами, функция $f$ не конструирует новых значений и однозначно определена на любом наборе аргументов. В многосортном случае, если $f$ определена на значениях нового (конструируемого) типа и имеет результатом значения старого (примитивного) типа, то квазиредуцируемость терма $f(x_1, \dots$ $\dots, x_n)$ является важным свойством достаточной полноты спецификации [2,3]. Квазиредуцируемость имеет тесную связь с задачей доказательства равенств в инициальной алгебре [4].

В [2] предложен разрешающий алгоритм анализа квазиредуцируемости для линейных систем подстановок термов. Однако громоздкость и большое количество лишних вычислений крайне затрудняют его практическое использование. В работе [3] сформулирован существенно более простой алгоритм, но его корректность не была строго доказана и оставалась особенно неясной для случая нелинейных систем. Проблема разрешимости квазиредуцируемости для нелинейных систем подстановок термов объявлена открытой в недавней работе [4]. Ниже при помощи введенного в §2 аппарата, а также теоремы 4 настоящего параграфа мы переформулируем в строгих терминах алгоритм [3], а главное – докажем его полноту и корректность для линейных систем. К сожалению, теоремы 2,3 не позволяют перенести данный алгоритм на случай нелинейных систем, поэтому проблема построения разрешающего алгоритма для этого случая по-прежнему остается предметом дальнейших исследований. Однако мы присоединяемся к авторам [2,4], высказывая догадку о возможности построения такого алгоритма.

Пусть $R=\{l_i \to r_i \mid i \in \overline{1,n}\}$, $t \in T_F(X)$ – произвольный (линейный или нелинейный) терм, квазиредуцируемость которого нас интересует. Пусть $var(t)=\{x_1,\dots,x_k\}$. Подстановку $\sigma$, действующую на терм $t$, можно записать в виде $\langle x_1 \leftarrow s_1,\dots,x_k \leftarrow s_k\rangle$ или для данного терма $t$ в виде кортежа $(s_1,\dots,s_k)$. Расширим понятия редуцируемости и квазиредуцируемости на множества подстановок (кортежей).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $\sigma=\langle x_1 \leftarrow s_1,\dots,x_k \leftarrow s_k\rangle$. Подстановка $\sigma$ (кортеж $(s_1,\dots,s_k)$) называется редуцируемой, если $\exists i \in \overline{1,k}$ $s_i$ редуцируем. Подстановка $\sigma$ (кортеж $(s_1,\dots,s_k)$) называется квазиредуцируемой, если $\forall \tau \in GS$ $\exists i \in \overline{1,k}$ $\tau(s_i)$ редуцируем.

В общем случае неверно, что $(s_1,\dots,s_k)$ квазиредуцируем $\Rightarrow \exists i \in \overline{1,k}$ $s_i$ квазиредуцируем. Однако это верно в случае, если $\forall\ i,j \in \overline{1,k}$ $i \neq j \Rightarrow var(s_i) \cap var(s_j) = \emptyset$.

В конце предыдущего параграфа понятие покрытия было обобщено на множество кортежей термов. Отметим, что если для $\sigma \in S$, $\tau \in GS$, $Dom(\sigma)=Dom(\tau)$, $\exists \eta \in GS$ $\tau=\sigma \circ \eta$, то, отождествляя подстановки $\sigma$ и $\tau$ с соответствующими кортежами, имеем $\sigma \leq \tau$.

Пусть $\tau=\langle x_1 \leftarrow m_1,\dots,x_k \leftarrow m_k\rangle \in GS$. Тогда $\tau(t)$ редуцируем, если $\exists i \in \overline{1,k}$ $m_i$ редуцируем ($\tau$ – редуцируемая подстановка) либо $\exists u \in O(t)$ $\tau(t/u)$ редуцируем целиком. Нижеследующие определение и теорема показывают, как эффективно получить конечное множество подстановок, покрывающее все базисные подстановки второго типа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Правило $(l_i \to r_i) \in R$ образует суперпозицию с термом $t$, если $\exists u \in O(t)$ $t/u$ и $l_i$ унифицируемы. Наиболее общий унификатор $\sigma$ термов $t/u$ и $l_i$ будем называть суперпозиционной подстановкой. Множество всевозможных суперпозиционных подстановок для данных $t$ и $R$ будем обозначать $SS_R(t)$.

Заметим, что мы всегда полагаем $var(t) \cap var(l_i) = \emptyset$. Говоря о суперпозиционной подстановке, мы часто будем иметь в виду проекцию $\sigma$ на множество переменных $var(t)$. Суперпозиция непосредственно связана с понятием критической пары, лежащим в основе алгоритма Кнута - Бендикса [I]. Связь предлагаемой техники с этим алгоритмом для доказательства индуктивных равенств будет рассматриваться нами в отдельной работе.

ТЕОРЕМА 4. Для произвольной системы подстановок термов $R$ терм $t$ квазиредуцируем $\Leftrightarrow$ множество $SS_R(t)$ покрывает все множество нередуцируемых базисных подстановок.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) Необходимость. Рассмотрим нередуцируемую базисную подстановку $\rho \in GS$. По условию, $\exists \sigma \in SS_R(t)$ $\exists \eta \in GS$ $\rho = \sigma \circ \eta$, т.е. $\rho(t) = \eta(\sigma(t))$. Но $\sigma(t)$ редуцируем, так как $\sigma$ - суперпозиционная подстановка, т.е. $\exists u \in O(t)$ $\exists (l_i \to r_i) \in R$ $\exists \tau \in S$ $\sigma(t/u) = \tau(l_i)$. Следовательно, $\eta(\sigma(t))$, а значит, и $\rho(t)$ редуцируемы. Если $\rho$ - редуцируемая подстановка, то $\rho(t)$ тем более редуцируем. Следовательно, $\forall \rho \in GS$ $\rho(t)$ редуцируем, т.е. $t$ квазиредуцируем.

2) Достаточность. Пусть $\rho \in GS$ - нередуцируемая подстановка. Так как $t$ квазиредуцируем, то $\rho(t)$ редуцируем. Поскольку $\rho$ - нередуцируемая подстановка, $\exists u \in O(t)$ $\rho(t/u)$ редуцируем целиком, т.е. $\exists (l_i \to r_i) \in R$ $\exists \delta \in GS$ $\rho(t/u) = \delta(l_i)$. Принимая во внимание, что $var(t) \cap var(l_i) = \emptyset$, заключаем, что $t/u$ и $l_i$ унифицируемы, т.е. существует суперпозиционная подстановка $\sigma \in SS_R(t)$ $\exists \eta \in GS$ $\rho = \sigma \circ \eta$, что завершает доказательство.

В качестве еще одной предпосылки для формулировки и обоснования алгоритма нам потребуется следующее техническое

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть $t$ - произвольный, а $l$ - линейный термы, $var(t) \cap var(l) = \emptyset$, $t$ и $l$ унифицируемы, т.е $\exists \delta, \sigma \in S$ $\delta(t) = \sigma(l)$, $\delta, \sigma$ - наиболее общие унификаторы. Пусть $var(t) = \{x_1, \dots, x_k\}$, $\delta = \langle x_1 \leftarrow s_1, \dots, x_k \to s_k \rangle$. Тогда кортеж $(s_1, \dots, s_k)$ линеен, причем

$$\max\{depth(s_i) \mid i \in \overline{1,k}\} < depth(l).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Линейность кортежа $(s_1, \dots, s_k)$ доказывается следующими рассуждениями. Так как $l \leq \delta(t)$, то очевидно, что $\forall u \in O_{var}(\delta(t))$ $\exists v \in O_{var}(l)$ $v \leq u$. Линеаризуем кортеж $(s_1, \dots, s_k)$, т.е. каждое повторное вхождение некоторой переменной заменим новой уникальной переменной, получив при этом новый кор -

теж $(s'_1, \ldots, s'_k)$ и соответствующую ему новую подстановку $\delta'$. Легко видеть, что $l \le \delta'(t)$. Но $\delta' \le \delta$, что противоречит тому, что $\delta$ – наиболее общий унификатор. Следовательно, кортеж $(s_1, \ldots, s_k)$ изначально линеен.

Пусть $depth(s_k) \ge depth(l)$. Пусть переменная $x_k$ входит в терм $t$ по координатам $u_1, \ldots, u_m$. Так как $\delta(t) \ge l$, то $\forall v \in O(s_k)$ такого, что $|v| = depth(l)$, $\forall j \in \overline{1,m}$ $\exists w \in O_{var}(l)$ $w \prec u_j v$. Поскольку терм $l$ линеен, то при замене в $s_k$ подтерма $s_k/v$ новой уникальной переменной мы получим новую подстановку $\delta'$, причем $\delta'(t) \ge l$. С другой стороны, $\delta' \le \delta$, что противоречит тому, что $\delta$ – наиболее общий унификатор.

Пусть $L_0$ – множество левых частей правил системы, т.е. множество термов, относительно которых мы доказываем квазиредуцируемость терма $t$. Сформулируем теперь рекурсивный алгоритм check($t$) проверки квазиредуцируемости $t$ относительно линейной системы подстановок термов $R$, а затем поясним его полноту и корректность. Пусть $L$ – "глобальное" множество термов, относительно которых анализируется квазиредуцируемость текущего терма $t$ (т.е. множество термов, квазиредуцируемость которых уже доказана). В начальный момент $L = L_0 = \{l_i \mid i \in \overline{1,n}\}$.

1. ЕСЛИ $t$ редуцируем относительно $L$ ТО
   ВОЗВРАТ (РЕДУЦИРУЕМ);
2. ЕСЛИ $t$ – переменная или нередуцируемый базисный терм, ТО
   ВОЗВРАТ (НЕРЕДУЦИРУЕМ);
3. Находим множество $SS_R(t)$ и соответствующее множество кортежей $\Phi$. Согласно теореме I находим дополнение $\overline{\Phi} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$, где
   $\varphi_i = (s^i_1, \ldots, s^i_n)$;
4. $L := L \cup \{t\}$.
5. ДЛЯ $i$ = I ДО $m$ ДЕЛАЙ
   НАЧАЛО
   ДЛЯ $j$ = I ДО $n$ ДЕЛАЙ
      НАЧАЛО
      ЕСЛИ check($s^i_j$) = РЕДУЦИРУЕМ
      ТО ПРОДОЛЖИТЬ внешний цикл по $i$
      КОНЕЦ;

ВОЗВРАТ (НЕРЕДУЦИРУЕМ);
КОНЕЦ;
6. ВОЗВРАТ (РЕДУЦИРУЕМ);

Алгоритм реализует следующую логику рассуждений. Необходимо проверить, что при всех сопоставлениях с переменными $x_1, \dots, x_n$ (где $\{x_1, \dots, x_n\} = var(t)$) базисных термов, т.е. при всех возможных $\varphi = (m_1, \dots, m_n) \in (T_F)^n$, терм $\varphi(t)$ редуцируем. По теореме 4 множество $SS_R(t)$ покрывает все неквазиредуцируемые подстановки, следовательно, все остальные подстановки должны быть квазиредуцируемыми. Алгоритм рекурсивно переходит к анализу каждого кортежа из $\bar{\Phi}$, проверяя существование в каждом из них квазиредуцируемого терма. При этом он добавляет ко множеству левых частей сам терм $t$. Этот шаг является ключевым в работе алгоритма, его отсутствие повлекло бы частое зацикливание. Пусть, например, $F = \{a^0, h^1, f^2\}$ и $L_0 = \{h(a), f(x,y)\}$. Легко видеть, что все базисные термы, кроме $a$, редуцируемы, так как содержат в качестве подтермов $h(a)$ или $f(a,a)$, оба из которых редуцируемы. Следовательно, все термы с переменными (кроме тривиального терма $x$, $x \in X$) квазиредуцируемы. В частности, применяя алгоритм к терму $t = h(x)$, получаем $SS_R(t) = \langle x \leftarrow a \rangle$, $\Phi = \{(a)\}$, $\bar{\Phi} = \{(h(x)), f(x,y))\}$ и вновь приходим к проверке квазиредуцируемости $h(x)$.

Алгоритм моделирует индуктивные рассуждения по глубине $\tau(t)$. Базой индукции служит редуцируемость термов $\eta(t)$, где $\eta$ ставит в соответствие переменным $x_1, \dots, x_n$ всевозможные кортежи константных символов. Те из этих кортежей, которые не покрываются $\Phi$, покрываются $\bar{\Phi}$, т.е. должны быть редуцируемыми. Поскольку на шаге 5 терм $t$ не является переменной или базисным, добавление $t$ ко множеству левых частей не влияет на редуцируемость кортежей из константных символов, т.е. при доказательстве базы индукции добавление $t$ корректно. Предположим теперь, что алгоритм проверяет редуцируемость $\tau(t) \in T_F$, где $depth(\tau(t)) = k$. Переходя на шаге 4 к проверке квазиредуцируемости термов $\bar{\Phi}$, мы фактически переходим к анализу собственных подтермов $\tau(t)$, глубина которых меньше $k$. Следовательно, использование "гипотезы индукции", т.е. предположения квазиредуцируемости $t$, вновь корректно. В силу произвольности $k$ корректность всего алгоритма доказана.

Обозначим $K = \max\{depth(l_i) \mid (l_i \leftarrow r_i) \in R\}$. Согласно утверждению 3, $\Phi$ содержит линейные кортежи, причем глубина входящих в них термов меньше $K$. Согласно замечанию к теореме I (обобщенной на случай кортежей), $\bar{\Phi}$ также конечно, причем глубина термов, входящих в кортежи $\bar{\Phi}$, не превышает $K$. Следовательно, $K$ мажорирует глубину термов, анализируемых алгоритмом. Поскольку число термов глубины, не большей $K$, конечно, а при каждом очередном вызове алгоритма число левых частей возрастает на единицу, алгоритм не может работать бесконечно. Это обосновывает его полноту.

Приведенный алгоритм отличается от изложенного в [3] тем, что множество кортежей $\Phi$ находится непосредственно путем суперпозиции, а не путем последовательной конкретизации терма $t$. Кроме того, терм, квазиредуцируемость которого доказана, добавляется ко множеству левых частей, и это доказательство учитывается при дальнейшей работе. В заключение проиллюстрируем работу алгоритма на примере.

ПРИМЕР 3. Пусть $F = \{a^0, h^1, f^2\}$, $L_0 = \{h(a), f(h(h(x)), y), f(x,a)\}$ - начальное множество левых частей, $t = f(x,h(y))$. При начальном вызове алгоритма $\Phi_0 = \{(x,a),(h(h(x)), y)\}$, $\bar{\Phi}_0 = \{(a,h(x)), (h(a),h(y)),(h(f(x,y)), h(z)), (f(x,y), h(z)), (a,f(x,y)), (h(a), f(x,y)), (h(f(x,y)), f(z,v)), (f(x,y), f(z,v))\}$. Дополняем множество левых частей $L_1 = L_0 \cup \{f(x,h(y))\}$ и переходим к анализу кортежей $\bar{\Phi}_0$.

В первом кортеже $(a,h(x))$ первый терм является константным и нередуцируемым, следовательно, переходим к анализу терма $h(x)$, $\Phi_1 = \{(a)\}$, $\bar{\Phi}_1 = \{(h(x)), (f(x,y))\}$. Вновь расширяем множество левых частей $L_2 = L_1 \cup \{h(x)\}$ и переходим к анализу кортежей $\bar{\Phi}_1$. В первом кортеже терм $h(x)$ квазиредуцируем. Для второго вновь находим $\Phi_2 = \{(h(h(x)),y), (x,a),(x,h(y))\}$, $\bar{\Phi}_2 = \{(a,f(x,y)),(h(a), f(x,y)), (h(f(x,y)), f(z,v)), (f(x,y), f(z,v))\}$. Строим $L_3 = L_2 \cup \{f(x,y)\}$ и анализируем термы кортежей $\bar{\Phi}_2$. В каждом кортеже содержится терм $f(x,y)$, содержащийся в $L_3$, что определяет квазиредуцируемость всех кортежей $\bar{\Phi}_2$. Возвращаясь к первому шагу, мы доказали квазиредуцируемость кортежа $(a,h(x)) \in \bar{\Phi}_0$. Так как в $L_3$ теперь содержатся термы $h(x)$ и $f(x,y)$, то квазиредуцируемость остальных кортежей $\bar{\Phi}_0$ доказывается тривиально.

## Литература

I. КУЧЕРОВ Г.А. Системы подстановок термов. - Новосибирск, 1985. - 46 с. (Препринт/ВЦ СО АН СССР: № 601).

2. NIPKOW T., WEIKUM G. A decidability result about sufficient - completeness of axiomatically specified abstract data types // Lect.Notes Comput.Sci.-1983.-Vol.145.-P.257-267.

3. КУЧЕРОВ Г.А. Алгоритм распознавания достаточной полноты алгебраической спецификации абстрактного типа данных //Программирование. - 1984. - №4. - С.3-12.

4. JOUANNAUD J.-P., KOUNALIS E. Automatic proofs by induction in equational theories without constructors// Proc.Symp. Logic in Comput.Sci.,Cambridge,Mass.- 1986.-June 16-18.- P.358-366.

5. HUET G. Confluent reductions: abstract properties and applications to term rewriting systems// Journ.ACM.-1980.- Vol.27, N 4.- P.797-821.

Поступила в ред.-изд.отд.
20 июля 1987 года