ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ
(Вычислительные системы)
1987 год Выпуск 122

УДК 510.25:519.68

ОБ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

В.И.Мартьянов, А.Б.Николенко

Рассматриваются логико-математические основы создания интерпретатора языков логического программирования средствами метода инвариантных преобразований [1]. Описание данных и задач (т.е. предметной области, реального состояния объектов, отношений) в этих языках может производиться так называемыми $\alpha\beta$-формулами узкого исчисления предикатов (частным случаем которых являются хорновские дизъюнкты, используемые в языке ПРОЛОГ [2]).

Центральным результатом работы является теорема, показывающая полноту и конструктивность выводов на $\alpha\beta$-формулах. Эта теорема справедлива и для языка, содержащего функциональные символы, при соответствующем естественном расширении понятий метода инвариантных преобразований и определения $\alpha\beta$-формул.

Таким образом, данный подход продолжает традиционное направление построения языков логического программирования (интерпретация формул как программ средствами вывода). Возможность применения метода инвариантных преобразований как средства выполнения Σ-программ для некоторых классов моделей [3] следует из результатов заметки [4] и основной теоремы работы.

§1. Построение исчисления

Ниже используются обозначения и терминология из [1,5].

Чтобы сделать изложение до некоторой степени замкнутым, определим основные понятия метода инвариантных преобразований.

Пусть L_σ - язык узкого исчисления предикатов сигнатуры σ. Считаем, что L_σ содержит константу f, а $\neg A$ вводится как сокращение для $A \to f$. Поэтому в определении строгой вложимости [1] вместо пункта для $\neg$ вводится: A строго вложима в f для любой A.

Будем говорить, что формула $A = A_1 \& \ldots \& A_n$ содержит формулу B, если B совпадает с A или B получается из A вычеркиванием некоторых A_i.

Формула $A = A_1 \& \ldots \& A_n$ называется простой конъюнкцией, если A_i для каждого i есть атомная формула или отрицание атомной.

Подформула A формулы B называется π-подформулой формулы B, если любая надформула A является конъюнкцией или дизъюнкцией; если A – конъюнкция (дизъюнкция, импликация), то A называем π-конъюнкцией (π-дизъюнкцией, π-импликацией). A есть π-подформула A. Через A_π будем обозначать некоторую π-импликацию формулы A. Выражение $A(\bar{x})$ означает, что все свободные переменные формулы A входят в кортеж $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Запись $\bar{x}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in})$ используется как сокращение для обозначения кортежа $\bar{x}^{(i)} = (x_1^i, \ldots, x_n^i)$.

Для произвольной формулы F положим $v_F(F) = F$. Для каждой π-подформулы G формулы F определим $v_F(G)$ следующим образом: пусть H – непосредственная надформула формулы G,

а) если H-конъюнкция, то $v_F(G) = H$;

б) если H-дизъюнкция, $v_F(H) = H_1 \& \ldots \& H_l$ и для некоторого i формула H совпадает с H_i, то $v_F(G) = H_1 \& \ldots \& H_{i-1} \& G \& \& H_{i+1} \& \ldots \& H_l$.

Рассмотрим кванторную приставку $P\bar{x} = P_1 x_1 \ldots P_n x_n$ и кортеж $\bar{y} \subseteq \bar{x}$ ($\subseteq$ означает: каждая y_j совпадает с некоторой x_i). Через $P'P'' = P$ будем обозначать разбиение кванторной приставки P относительно кортежа $\bar{y}$ такое, что P'' не содержит кванторов по переменным кортежа $\bar{y}$, а P' – наименьшая часть префикса P, содержащая все переменные этого кортежа.

Через Ω обозначим класс общезначимых формул, называемых π-каноническими [I].

Рассмотрим систему первого порядка $M = \langle ИС, ФП, \Omega \rangle$. Она содержит два правила вывода: извлечение следствий (ИС) и формирование подцелей (ФП), которые являются аналогами соответственно ζ- и ρ-преобразований [I,5].

Пусть G – формула языка L_σ и $G_\pi = W\bar{u}(C(\bar{u}) \to D(\bar{u}))$ – некоторая ее π-импликация.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Правилом извлечения следствий называется фигура заключения вида $\frac{G}{G'}$, где G' получается из G заменой G_π на $\zeta_F(G_\pi) = W' \forall \bar{z} W''(C'(\bar{u}, \bar{z}) \to D(\bar{u}))$.

При этом должны выполняться следующие условия: для некоторой π-подформулы E формулы C имеют место:

а) $v_C(E)$ содержит $F = P\bar{x}Q\bar{y}(A(\bar{x}) \to B(\bar{x},\bar{y}))$;

б) $A(\bar{v})$ строго вложима в $v_C(E)$ для некоторого кортежа $\bar{v}$, относительно которого производится разбиение W;

в) $C'(\bar{u},\bar{z})$ получается из C заменой E на $E \mathbin{\&} B(\bar{v},\bar{z})$, переменные кортежа $\bar{z}$ не входят в G.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Правилом формирования подцелей называется фигура заключения вида $\dfrac{G}{G'}$, где

I. G' получается из G заменой G_π на

$$\rho_F(G_\pi) = W((C'(\bar{u}) \to D(\bar{u})) \mathbin{\&} (\mathop{\&}_{i=1}^{k} P_i\bar{x}_i H_i(\bar{u},\bar{v},\bar{x}_i))).$$

При этом должны выполняться следующие условия: для некоторой π-подформулы E формулы C имеют место:

а) $v_C(E)$ содержит $F = P\bar{x}(\mathop{\&}_{i=1}^{k} P_i\bar{x}_i F_i(\bar{u},\bar{x},\bar{x}_i) \to B(\bar{x},\bar{u}))$;

б) $D(\bar{u}) = Q\bar{w}D_1(\bar{u},\bar{w})$, и кортеж $\bar{v} \subseteq \bar{u}$ такой, что $D_1(\bar{u},\bar{v})$ содержит $B(\bar{v},\bar{u})$, либо $B(\bar{v},\bar{u})$ содержит $D_1(\bar{u},\bar{v})$;

в) если $F_i = F_i' \to F_i''$, то $H_i = v_C(E) \mathbin{\&} F_i' \to F_i''$, иначе $H_i = v_C(E) \to F_i$;

г) $C'(\bar{u})$ получается из C заменой E на $E \mathbin{\&} B(\bar{v},\bar{u})$.

2. G' получается из G заменой G_π на

$\rho_F(G_\pi) = W((C'(\bar{u}) \to D(\bar{u})) \mathbin{\&} P\bar{x}R\bar{y}(C(\bar{u}) \mathbin{\&} A(\bar{u},\bar{x},\bar{y}) \to B(\bar{u},\bar{x},\bar{y})))$.

При этом должны выполняться следующие условия:

а) $D(\bar{u}) = Q\bar{w}D_1(\bar{u},\bar{w})$ и D_1 содержит формулу $F = R\bar{y}(A(\bar{u},\bar{w},\bar{y}) \to B(\bar{u},\bar{w},\bar{y}))$;

б) $C' = C \mathbin{\&} F$;

в) $\bar{x} \subseteq \bar{u} \cup \bar{w}$, и если x_i есть w_j, то P_i совпадает с Q_j.

Заметим, что приставки P, Q, P_i, R в определениях I и 2 могут отсутствовать.

Выводом в M формулы G называется последовательность $G = G_0$, $G_1, \ldots, G_n$ формул такая, что

I) G_i есть заключение, а G_{i-1} - посылка правила извлечения следствий или формирования подцелей $(i > 0)$;

2) $G_n \in \Omega$, и если $G_i \in \Omega$, то $i = n$.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Система M является ограниченной системой первого порядка (ср. с исчислением S из [I4]). Кроме того, M противоречива. Корректность правил формирования подцелей и извлечения следствий зависит от инвариантности ζ- и ρ-преобразований. Эти вопросы изучались в [I, 6-8].

§2. $\alpha\beta$-формулы и выводимость в M

Ниже будет описан класс $\alpha\beta$-формул, на котором для M справедлива теорема полноты (в интуиционистской логике) и корректности.

Пусть $F(\bar{x}) = \forall \bar{y}(A(\bar{x},\bar{y}) \to B(\bar{x},\bar{y}))$ - подформула формулы G. Формула F называется $\forall$-импликацией, если все переменные кортежа $\bar{x}$ связаны в G квантором $\forall$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. $\forall$-импликация $F = Q(A \to B)$ называется:

а) ζ-импликацией, если A - простая конъюнкция;

б) ρ-импликацией, если $A = A_1 \& \ldots \& A_n$ $(n \geq 1)$ и для каждого i A_i - простая конъюнкция, или ζ-импликация вида $\forall \bar{x}(B(\bar{x},\bar{u}) \to \exists \bar{y} C(\bar{x},\bar{u},\bar{y}))$, где C - простая конъюнкция.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Формула F называется простой α-формулой, когда

а) F - простая конъюнкция;

б) $F = Q(A \to B)$ есть ζ- или ρ-импликация, где B - простая конъюнкция;

в) $F = A_1 \& \ldots \& A_k$ и A_i для любого i от I до k является простой α-формулой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Формула F называется α-формулой, если выполняется одно из условий:

а) F - простая α-формула;

б) $F = A_1 \vee \ldots \vee A_k$ и $A_1, \ldots, A_k$ - α-формулы;

в) $F = A_1 \& \ldots \& A_k$ и A_i для некоторого i есть α-формула, а для каждого $j \neq i$ формула A_j является простой α-формулой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть $F = \forall \bar{x}(\mathop{\&}\limits_{i=1}^{n} F_i)$ - замкнутая формула и для каждого i имеем $F_i = \forall \bar{x}_i(A_i(\bar{x},\bar{x}_i) \to \exists \bar{y}_i B_i(\bar{x},\bar{x}_i,\bar{y}_i))$, где B_i - простая конъюнкция. Тогда если A_i для каждого i есть простая α-формула, то F называется простой $\alpha\beta$-формулой; если A_i для каждого i есть α-формула, то F называется $\alpha\beta$-формулой.

Пусть теперь I - система натурального вывода для интуиционистской логики из [9]. Приведем некоторые свойства, касающиеся структуры натуральных выводов в системе I. Рассмотрим формулу F такую, что $\vdash_I F$ и обозначим через Σ нормальный вывод F в I [9].

ЛЕММА I. Если F - простая $\alpha\beta$-формула, то Σ не содержит применений правила $\vee E$:

$$\frac{A \vee B \quad \begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]\\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}.$$

ЛЕММА 2. Если F - $\alpha\beta$-формула, то

а) Σ не содержит применения правила $\vee I$: $\dfrac{A}{A \vee B}$ и правила $\exists E$;

б) Σ содержит только такие применения правила $\vee E$, главными посылками которых являются π-дизъюнкции посылок π-импликаций формулы F, и только они;

в) Σ содержит только такие применения правила $\to I$:

$$\frac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \to B}$$

заключениями которых (с точностью до "навешивания" квантора $\forall$) являются либо π-импликации F, либо ρ-импликации F.

Леммы I,2 являются простыми следствиями принципа подформульности для вывода в I [9] и определения $\alpha\beta$-формул.

ТЕОРЕМА. Пусть F есть $\alpha\beta$-формула. $\vdash_M F$ тогда и только тогда, когда $\vdash_I F$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $F = F_0, F_1, \ldots, F_n$ - вывод F в M, где $F = \forall \bar{x}(A(\bar{x}) \to \exists \bar{y} B(\bar{x},\bar{y}))$.

Пусть F - простая $\alpha\beta$-формула. В этом случае существование вывода F в I вытекает из следующих утверждений (формулы G, $F_1 \to F_2$ являются подформулами формулы F):

а) $\vdash_I F \leftrightarrow \zeta_G(F)$;

б) $\vdash_I F \longleftrightarrow \rho_{F_1 \to F_2}(F)$, если $\vdash_I F_1 \to F_2$;

в) $\vdash_I F_n$.

Утверждения "а"-"в" доказываются непосредственными построениями выводов.

Пусть F - произвольная $\alpha\beta$-формула. Справедливость утверждений "а"-"в" в этом случае достигается за счет использования (возможно, многократного) свойства формул логики первого порядка:

$$\vdash_I \forall \bar{x}(A \vee B \to C) \longleftrightarrow \forall \bar{x}((A \to C) \& (B \to C)) \qquad (1)$$

при произвольных A, B, C.

Достаточность. Формула F имеет вид $\forall \bar{x}(\mathop{\&}\limits_{i=1}^{n} G_i)$. Предположим, что $n=1$, т.е. $F = \forall \bar{x}(C(\bar{x}) \to \exists \bar{y} D(\bar{x},\bar{y}))$. В случае $n > 1$ вывод в M представляет собой последовательность выводов формул $G_1, \dots, G_n$.

Обозначим через Σ вывод F в I.

Случай I. F есть простая $\alpha\beta$-формула.

I.I. Пусть среди подформул формулы F нет ρ-импликаций. Таким образом, Σ имеет вид (леммы I,2):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Sigma_1}{\exists \bar{y} D(\bar{a},\bar{y})}}{C(\bar{a}) \to \exists \bar{y} D(\bar{a},\bar{y})}}{F},$$

где Σ_1 состоит из фрагментов вида:

а) $$\dfrac{A \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A'}{\text{несколько применений } \&I, \&E}}{}}{\text{несколько применений } \forall E}\; A \to B}{B};$$

б) $$\dfrac{\dfrac{\Sigma'}{f}}{A},$$

где Σ' - фрагмент вида "а", A - подформула формулы $\exists \bar{y} D(\bar{a},\bar{y})$;

в)
$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{A}{\text{несколько применений } \&E, \&I}}{\text{несколько применений } \exists I}}{\exists \bar{y} D(\bar{a}, \bar{y})} .$$

Двигаясь слева направо по слоям дерева Σ, будем строить вывод в M, так что если встретилась главная посылка $\to E$ вида $A \to B$, а из F уже получена G, то по соответствующему этому вхождению $A \to B$ фрагменту вида "а" определяется $\zeta_{\forall \bar{z}(A \to B)}(G)$. Фрагмент Σ вида "б" и "в" учитывается при проверке формулы на π-каноничность.

Следовательно, вывод F в M в данном случае получается последовательным применением ζ-преобразований, соответствующих π-импликациям формулы C.

I.2. Пусть в F входит единственная ρ-импликация $PA = P(Q(A_1 \to A_2) \to B)$ такая, что $A_1 \to A_2$ есть заключение применения правила $\to I$ в Σ, а A является главной посылкой применения $\to E$. Пусть также $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ – все те применения правила $\to E$, которые входят в часть вывода Σ, зависящую от A, т.е. Σ имеет следующий вид:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\begin{matrix}[A_1]\\ \vdots \\ A_2\end{matrix}}{A_1 \to A_2}}{Q(A_1 \to A_2)} \qquad \cfrac{PA}{A}}{\begin{matrix}B\\ \vdots \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \\ \vdots \\ F\end{matrix}} .$$

Тогда вывод в M строится по Σ следующим образом. Вначале к F применяется правило формирования подцелей, соответствующее главной посылке α_k; затем это же правило последовательно применяется к главным посылкам $\alpha_{k-1}, \ldots, \alpha_1$ и A. Далее построение вывода происходит, как и в п.I.I. Последовательное применение этого правила к $\alpha_k, \ldots, \alpha_1$, A обеспечивается возможностью подстановки любых переменных из кортежа $\bar{x}$.

Если посылка формулы A имеет вид $\mathop{\&}\limits_{i=1}^{m} A_i$, $m>1$, где A_i – простая конъюнкция или ζ-импликация, то построение вывода F в M сводится к последовательному построению выводов $A_1,\ldots,A_m$ аналогичным образом.

I.3. Пусть в Σ входит несколько ρ-импликаций. С учетом пп. I.I и I.2 вывод в M строится по Σ так же, как и в доказательстве теоремы полноты для исчисления S из [5]. При этом ρ-преобразования, определяющие применения правила формирования подцелей, в точности соответствуют ρ-импликациям F.

<u>Случай 2.</u> F – произвольная $\alpha\beta$-формула.

2.I. Пусть $C(\bar{x}) = C_1(\bar{x})\ \&\ (A(\bar{x}) \vee B(\bar{x}))$, а Σ имеет вид:

$$\dfrac{A \vee B \qquad \begin{matrix}[A]\\ \vdots\\ F_1\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[B]\\ \vdots\\ F_1\end{matrix}}{F_1}\,, \qquad \begin{matrix}F_1\\ \vdots\\ F\end{matrix}$$

где выводы F_1 из A и F_1 из B уже не содержат применений $\vee E$.

Рассмотрим формулы $F' = \forall\bar{x}(C_1(\bar{x})\ \&\ A(\bar{x}) \to \exists\bar{y}D(\bar{x},\bar{y}))$ и $F'' = \forall\bar{x}(C_1(\bar{x})\ \&\ B(\bar{x}) \to \exists\bar{y}D(\bar{x},\bar{y}))$.

Эти формулы являются простыми $\alpha\beta$-формулами. По случаю I можно построить выводы F' и F''. Пусть $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ – все те применения ζ- и ρ-преобразований, которые использовались в выоде F', а $\beta_1,\ldots,\beta_l$ – в выводе F''. Нетрудно видеть, что вывод F в M имеет вид: $F = F_0, F_1,\ldots,F_k, F_{k+1},\ldots F_{k+l}$, где $F_i = \alpha_i(F_{i-1})$ при $1 < i \le k$ и $F_i = \beta_i(F_{i-1})$ при $k < i \le k+l$.

2.2. Произвольное количество применений $\vee E$ в Σ. Структура $\alpha\beta$-формул такова, что с помощью соотношения (I) можно формулу F свести к формуле F', которая является конъюнкцией простых $\alpha\beta$-формул, причем $\vdash_I F \leftrightarrow F'$. Для этого двигаемся по слоям Σ слева направо, строя выводы π-импликаций F' с раздельным (как и в п.2.I) использованием второй и третьей посылок применения $\vee E$. После этого из выводов π-импликаций F' "собираем" вывод в M формулы F так же, как в п. 2.I. Доказательство закончено.

Интерпретатор языка логического программирования ПИФОР разрабатывается на основе системы АВТОДОТ, созданной в Иркутском ВЦ СО АН СССР. Средства логического вывода метода инвариантных преобразований позволяют системе АВТОДОТ обрабатывать более сложные формулы, чем те, которые описаны в настоящей работе.

В связи с этим возникает ряд вопросов.

Во-первых, справедлива ли теорема полноты для системы, в которой определена выводимость F из множества гипотез Γ, где Γ - множество $\alpha\beta$-формул?

Далее, в произвольной $\alpha\beta$-формуле F посылки ζ- и ρ-импликаций, а также следствия π-импликаций устроены весьма просто. Использование полного определения строгой вложимости [I] позволяет усложнять структуру импликаций, являющихся подформулами формулы F.

Литература

I. МАРТЬЯНОВ В.И. Методы задания и частичного построения теории на ЭВМ //Кибернетика.- I982. -№6. - С.I02-II0.

2. KOWALSKI R.A. Prolog as a Logic Programming Language//Proc. of AICA Congress.- Pavia,Italy,1981.- P.171-179.

3. ГОНЧАРОВ С.С., СВИРИДЕНКО Д.И. Σ-программирование //Логико-математические основы проблемы МОЗ. - Новосибирск,I985. Вып. I07: Вычислительные системы. - С. 3-29.

4. ВОРОНКОВ А.А. Способы выполнения программ в Σ-программировании // IУ Всесоюз.конф. по примен. методов матем. логики,секция "Представление знаний и синтез программ". Таллин.I986 г.:Тез. докл. - Таллин, I986. - С. 5I-53.

5. НИКОЛЕНКО А.Б. Метод инвариантных преобразований и логический вывод //Матем.заметки. - I984. - Т.36, вып.I. - С. 3-I5.

6. МАНЦИВОДА А.В. О преобразованиях, соответствующих определениям //УП Всесоюз.конф. "Проблемы теоретической кибернетики": Тез.докл. - Иркутск, I985. - С. I28-I29.

7. МАНЦИВОДА А.В., МАРТЬЯНОВ В.И. Условия инвариантности преобразований //Там же. - С.I29-I30.

8. НАНСАЛМАА Н. О ζ-преобразованиях формул//Там же.-С. I46-I47.

9. PRAWITZ D. Natural deduction.- Stockholm: Almquist and Wicksell,1965.

Поступила в ред.-изд.отд.
6 декабря I986 года