ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ
(Вычислительные системы)
1987 год Выпуск 122

УДК 510.53: 510.67

# КЛАССЫ С ОГРАНИЧЕННО ЭКВИВАЛЕНТНЫМИ ИНДЕКСАЦИЯМИ

В.П. Добрица

В работе [3] начато изучение ограниченной предельной сводимости вычислимых индексаций классов конструктивных моделей. В настоящей работе это изучение продолжено. В частности, доказывается существование вычислимых классов, все вычислимые индексации которых ограниченно эквивалентны с постоянной мажорантой. В то же время с меньшей мажорантой отношения ограниченной предельной эквивалентности на вычислимых индексациях этого класса быть не может.

Основные определения и обозначения, используемые в данной работе, можно найти в [1–3]. Будем рассматривать модели сигнатуры, состоящей из одного функционального символа $f(x)$. Для каждого $n \in \omega$ будем обозначать через $\mathfrak{M}(n)$ модель $\mathfrak{M}(n) = \langle\{0,1,\ldots,n+2\}, f(x)\rangle$, у которой $f(x)$ задает на элементах основного множества цикл длины $n+3$, а именно:

$$f(i) = \begin{cases} i+1, & \text{если } i < n+2; \\ 0, & \text{если } i = n+2. \end{cases}$$

Пусть $S_0$ есть произвольное рекурсивно-перечислимое множество. Определим по нему модель

$$\mathfrak{M}(S_0) \rightleftharpoons \bigcup_{n \in S_0} \mathfrak{M}(n),$$

получаемую как независимое объединение соответствующих циклов.

Ясно, что из перечислимости множества $S_0$ следует конструктивизируемость модели $\mathfrak{M}(S_0)$ и, наоборот, из конструктивизируемости модели $\mathfrak{M}(S_0)$ следует перечислимость соответствующего множества $S_0$. Модель $\mathfrak{M}(S_0)$ будет, очевидно, автоустойчивой моделью. Заметим, что локальная вложимость моделей

$$\mathfrak{M}(s_0) \overset{\text{л}}{\hookrightarrow} \mathfrak{M}(s_1)$$

имеет место тогда и только тогда, когда выполняется включение $s_0 \subseteq s_1$ соответствующих перечислимых множеств.

Обозначим через $S$ семейство рекурсивно-перечислимых множеств: $\{s_i \mid i \in I\}$. По семейству $S$ определим класс $K^*(S)$ конструктивных моделей:

$$K^*(S) \rightleftharpoons \{\mathfrak{M}(s_i) \mid s_i \in S\}.$$

Легко понять, что по вычислимой индексации $\alpha$ класса $K^*(S)$ эффективно строится вычислимая нумерация $\alpha'$ семейства $S$, и наоборот. При этом, очевидно, выполняется эквивалентность: $(\alpha \equiv \gamma) \leftrightarrow (\alpha' \equiv \gamma')$.

Заметим, что для класса $K^*(S)$ понятия сводимости $\leq$ и сводимости по локальным классам $\underset{\text{л.к.}}{\leq}$ совпадают.

В силу сделанных замечаний ясно, что имеется изоморфизм

$$L(S) \cong L(K^*(S)).$$

Как уже отмечалось, модели $\mathfrak{M}(s_i)$ автоустойчивы. А тогда нетрудно понять выполнимость эквивалентностей:

$$\alpha \underset{\lim}{\leq} \beta \leftrightarrow \alpha' \underset{\lim}{\leq} \beta';$$

$$\alpha \underset{\lim, f(x)}{\leq} \beta \leftrightarrow \alpha' \underset{\lim, f(x)}{\leq} \beta'.$$

Поэтому свойства полурешетки $L(K^*(S))$ относительно предельной сводимости и ограниченных предельных сводимостей можно установить, исследуя соответствующие свойства полурешетки $L(S)$.

ТЕОРЕМА I. Существуют вычислимое семейство $S$ рекурсивно-перечислимых множеств и его вычислимые нумерации $\alpha, \beta, \gamma$ такие, что $\alpha < \beta < \gamma$, $\gamma \underset{\lim,1}{\leq} \beta$, $\beta \underset{\lim,1}{\leq} \alpha$, $\gamma \underset{\lim,1}{\not\leq} \alpha$. Причем $|L(S)| = \aleph_0$ и для любых двух вычислимых нумераций $\varkappa, \eta$ семейства $S$ имеет место сводимость $\varkappa \underset{\lim,2}{\leq} \eta$.

Опишем построение семейства $S$, его вычислимых нумераций $\alpha, \beta, \gamma$ таких, что $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, $\beta \not\leq \alpha$, $\gamma \not\leq \beta$, $\gamma \underset{\lim,1}{\leq} \beta$, $\beta \underset{\lim,1}{\leq} \alpha$, $\gamma \underset{\lim,2}{\leq} \alpha$,

$\gamma \not\leq_{\lim,1} \alpha$. В каждом множестве из семейства $S$ будет от одного до трех элементов. Причем ни одно множество не содержится в другом, если они различны. Нумерация $\alpha$ будет однозначной. Построение вычислимых нумераций $\alpha, \beta, \gamma$ и семейства $S$ будет осуществляться по шагам. Множество $\alpha_n$ ($\beta_n, \gamma_n$), построенное к шагу $t$, будем обозначать через $\alpha_n(t)$ ($\beta_n(t)$, $\gamma_n(t)$). Если это множество пустое, то будем говорить, что множество $\alpha_n$ ($\beta_n, \gamma_n$) еще не включилось в построение.

В процессе построения будут использоваться метки шести видов: $\langle k\rangle, \langle k,1\rangle, \langle k,2\rangle$, $[k], [k,1], [k,2]$, где $k \in \omega$. Метки первых двух видов $\langle k\rangle$, $\langle k,1\rangle$ будут отвечать за нарушение сводимости нумерации $\beta$ к нумерации $\alpha$ функцией $\varphi_k$ с клиниевским номером $k$. А метки $\langle k\rangle$, $\langle k,2\rangle$ будут отвечать за нарушение сводимости нумерации $\gamma$ к нумерации $\beta$ функцией $\varphi_k$.

Обозначим через $g_k(x,y)$ функцию номера $k$ в эффективной нумерации частично рекурсивных функций, у которых смен значений в упорядоченной последовательности $\{g_k(x,y) \mid x \in \omega\}$ не более одной. Существование соответствующей универсальной функции показано в [3].

Квадратные метки $[k], [k,1], [k,2]$ будут ответственны за нарушение ограниченной предельной сводимости нумерации $\gamma$ к нумерации $\alpha$ с мажорантой $\mathbb{1}(x) \equiv 1$.

Построим нумерации $\alpha, \beta, \gamma$.

ШАГ $t \geq 0$. Он состоит из шести этапов.

I. Находим наименьшие $s, r, n_t$ такие, что множества $\alpha_s$, $\alpha_{s+1}$, $\beta_r$, $\beta_{r+1}$, $\beta_{r+2}$, $\beta_{r+3}$ еще не участвовали в построении, а числа $n_t$, $n_t+1$ еще не включены ни в одно из строящихся множеств $\alpha_l(t-1)$, $\beta_p(t-1)$, $\gamma_x(t-1)$, где $l < s, p < r, x < 7t$. Навешиваем метку $\langle t\rangle$ на множества $\alpha_s$, $\beta_r$, $\beta_{r+1}$, $\gamma_{7t}$, $\gamma_{7t+1}$, $\gamma_{7t+2}$. Полагаем $\alpha_s(t) = \beta_r(t) = \beta_{r+1}(t) = \gamma_{7t}(t) = \gamma_{7t+1}(t) = \gamma_{7t+2}(t) = \{n_t\}$.

Навешиваем метку $[t]$ на множества $\alpha_{s+1}$, $\beta_{r+2}$, $\beta_{r+3}$, $\gamma_{7t+3}$, $\gamma_{7t+4}$, $\gamma_{7t+5}$, $\gamma_{7t+6}$. Полагаем $\alpha_{s+1}(t) = \beta_{r+2}(t) = \beta_{r+3}(t) = \gamma_{79+3}(t) = \gamma_{7t+4}(t) = \gamma_{7t+5}(t) = \gamma_{7t+6}(t) = \{n_t + 1\}$.

II. Находим наименьшее $k \leq t$ такое, что метки $\langle k,1\rangle$ еще нет в построении, меткой $\langle k\rangle$ отмечены множества $\alpha_s$, $\beta_r$, $\beta_{r+1}$ и определены значения $\varphi_k(r) = \varphi_k^t(r)$, $\varphi_k(r+1) = \varphi_k^t(r+1)$. Если такого $k$ нет, то переходим к выполнению этапа Ш.

Если же такое $k$ есть и $\varphi_k(r) \neq s$ или $\varphi_k(r+1) \neq s$, то навешиваем метку $\langle k,1 \rangle$ на множества $\alpha_s$ и $\beta_r$ или $\beta_{r+1}$ соответственно. Переходим к выполнению этапа Ш.

В случае, когда такое $k$ есть и выполнены равенства $s = \varphi_k(r) = \varphi_k(r+1)$, находим различные наименьшие $n_t, m_t$ такие, что они еще не входят ни в одно из строящихся множеств. Находим наименьшее $l$ такое, что $\alpha_l$ еще не участвовало в построении. Навешиваем метку $\langle k\ 1 \rangle$ на множества $\alpha_l$, $\beta_{r+1}$. Полагаем $\alpha_s(t) = \alpha_s(t-1) \cup \{n_t\} = \beta_r(t) = \gamma_{7k}(t)$; $\alpha_l(t) = \beta_{r+1}(t) = \beta_{r+1}(t-1) \cup \{m_t\} = \gamma_{7k+2}(t)$. Кроме того, если в построении еще нет множеств, отмеченных меткой $\langle k,2 \rangle$, то полагаем

$$\gamma_{7k+1}(t) = \gamma_{7k+1}(t-1) \cup \{n_t\}.$$

Ш. Находим наименьшее $k \leq t$ такое, что меткой $\langle k,2 \rangle$ еще не отмечены строящиеся множества, меткой $\langle k \rangle$ отмечены множества $\alpha_s$, $\beta_r, \beta_{r+1}$ и определены значения $\varphi_k(7k) = \varphi_k^t(7k)$, $\varphi_k(7k+1) = \varphi_k^t(7k+1)$. Если такого $k$ нет, то переходим к выполнению этапа IУ.

Если же такое $k$ есть и $\varphi_k(7k) \neq r$ (или $\varphi_k(7k+1) \neq r$), то навешиваем метку $\langle k,2 \rangle$ на множества $\beta_r$ и $\gamma_{7k}$ (или $\gamma_{7k+1}$ соответственно). Переходим к выполнению этапа IУ.

В случае наличия такого $k$ и выполнения равенств $\varphi_k(7k) = \varphi_k(7k+1) = r$, находим наименьшие $p, l$ такие, что множества $\alpha_p$, $\beta_l$ еще не участвовали в построении. Навешиваем метку $\langle k,2 \rangle$ на множества $\alpha_p$, $\beta_l$, $\gamma_{7k+1}$. Подбираем наименьшие различные числа $n_t$, $m_t$ такие, что они еще не входят в строящиеся множества. Полагаем

$$\alpha_p(t) = \beta_l(t) = \gamma_{7k+1}(t) = \gamma_{7k+1}(t-1) \cup \{m_t\}.$$

$$\alpha_s(t) = \beta_r(t) = \gamma_{7k}(t) = \gamma_{7k}(t-1) \cup \{n_t\}.$$

Кроме того, если метки $\langle k,1 \rangle$ еще нет на строящихся множествах, то полагаем $\beta_{r+1}(t) = \beta_{r+1}(t-1) \cup \{n_t\} = \gamma_{7k+2}(t)$.

IУ. Выбираем наименьшее значение $k \leq t$ такое, что метка $[k,1]$ еще не стоит на строящихся множествах, для некоторых $t_1, t_2 \leq t$ значения функции $g_k(t_1, 7k+5)$, $g_k(t_2, 7k+6)$ определены и меткой $[k]$ отмечены множества $\alpha_s$, $\beta_r$, $\beta_{r+1}$. Если такого $k$ нет, то переходим к выполнению этапа У.

Если же такое $k$ есть, то при наибольших возможных значениях $t_1, t_2$ проверяем равенства $g_k(t_1, 7k+5) = g_k(t_2, 7k+6) = s$.

Если $g_k(t_1,7k+5) \neq s$ $(g_k(t_2,7k+6) \neq s)$, то навешиваем метку $[k,1]$ на множества $\alpha_s, \beta_{r+1}, \gamma_{7k+5}$ ($\gamma_{7k+6}$ соответственно). Переходим к выполнению этапа У.

В случае выполнения равенств $g_k(t_1,7k+5) = g_k(t_2, 7k+6) = s$ подбираем наименьшее возможное значение $l$ такое, что $\alpha_l$ еще не участвовало в построении. Навешиваем метку $[k,1]$ на множества $\alpha_l$, $\gamma_{7k+5}$, $\gamma_{7k+6}$, $\beta_{r+1}$. Подбираем наименьшие различные числа $n_t$, $m_t$ такие, что они еще не встречались в строящихся множествах. Полагаем $\alpha_s(t) = \alpha_s(t-1) \cup \{n_t\} = \beta_r(t) = \gamma_{7k+3}(t)$, $\alpha_l(t) = \beta_{r+1}(t) = \beta_{r+1}(t-1) \cup \{m_t\} = \gamma_{7k+4}(t) = \gamma_{7k+5}(t) = \gamma_{7k+6}(t)$.

У. Находим наименьшее $k \leq t$ такое, что метка $[k,1]$ уже отмечает строящиеся множества $\alpha_{s_1}$ и $\gamma_{7k+5}$ или $\gamma_{7k+6}$, метки $[k,2]$ еще нет в построении и в определенных значениях последовательности $\{g_k(t_1,7k+5) | t_1 \leq t\}$ или $\{g_k(t_1,7k+6) | t_1 \leq t\}$ произошла смена значения. Если такого $k$ нет, то переходим к выполнению этапа УI.

Если же такое $k$ есть, то выбираем $t_1 \leq t$ $(t_2 \leq t)$ такое, что смена значения в соответствующей последовательности $\{g_k(l,7k+5) | l \leq t_1\}$ $(\{g_k(l,7k+6) | l \leq t_2\})$ уже произошла. Проверяем выполнение равенства $g_k(t_1,7k+5) = s_1$ $(g_k(t_2,7k+6) = s_1)$.

Если $g_k(t_1,7k+5) \neq s_1$ (или $g_k(t_2,7k+6) \neq s$ соответственно), то навешиваем метку $[k,2]$ на множества $\alpha_{s_1}, \gamma_{7k+5}$ $(\gamma_{7k+6})$. Переходим к выполнению этапа УI.

Пусть выполнены равенства $g_k(t_1,7k+5) = s_1 = g_k(t_2, 7k+6)$. Причем если смена значения имела место только в одном случае и выбрано $t_1$ ( $t_2$ соответственно), то второе значение $t_2$ $(t_1)$ выбирается как наибольшее, при котором определено соответствующее значение функции $g_k(t_2,7k+6)$ $(g_k(t_1,7k+5))$. Подбираем наименьшие $l,p$ такие, что множества $\alpha_l, \beta_p$ еще не участвовали в построении. Навешиваем метку $[k,2]$ на множества $\alpha_l$, $\beta_p$ и $\gamma_{7k+5}$ ($\gamma_{7k+6}$ соответственно). Выбираем наименьшие различные числа $n_t$, $m_t$, которые еще не входят ни в одно из строящихся множеств. Полагаем $\alpha_{s_1}(t) = \beta_{r+1}(t) = \gamma_{7k+4}(t) = \gamma_{7k+4}(t-1) \cup \{n_t\}$; $\alpha_l(t) = \beta_p(t) = \gamma_{7k+5}(t) = \gamma_{7k+6}(t) = \gamma_{7k+6}(t-1) \cup \{m_t\}$. В случае, когда множество $\alpha_{s_1}$ отмечено меткой $[k]$ (т.е. $s_1 = s$ ), дополнительно полагаем $\beta_r(t) = \gamma_{7k+3}(t) = \gamma_{7k+3}(t-1) \cup \{n_t\}$.

УI. Если множества $\alpha_x, \beta_y, \gamma_z$ уже участвуют в построении, но соответствующие им множества $\alpha_x(t)$, $\beta_y(t)$, $\gamma_z(t)$ не были определены при выполнении этапов I–У, то полагаем $\alpha_x(t) = \alpha_x(t-1)$,

$\beta_y(t) = \beta_y(t-1)$, $\gamma_z(t) = \gamma_z(t-1)$ . Переходим к выполнению следующего шага построения.

Полагаем $\alpha_x = \bigcup_t \alpha_x(t)$, $\beta_y = \bigcup_t \beta_y(t)$, $\gamma_z = \bigcup_t \gamma_z(t)$ .

Построение закончено.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Множество $\alpha_x$ нумеруется в соответствии с нумерацией $\alpha_x(t)$ , и это задает перечисляющую функцию.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если какая-то метка ставится, то она в дальнейшем не снимается.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Метки $\langle k \rangle$, $[k]$ , где $k \in \omega$, обязательно навешиваются на некоторые множества нумераций $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, причем разные метки навешиваются на разные множества.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если метка $\langle k,1 \rangle$ ($\langle k,2 \rangle$) навешивается на некоторое множество, то оно содержит не менее двух элементов и либо свободно от меток, либо отмечено меткой $\langle k \rangle$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Если метка $[k,1]$ ($[k,2]$) навешивается на некоторое множество, то оно содержит не менее двух элементов и либо свободно от меток, либо отмечено меткой $[k]$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Каждое из множеств $\alpha_x, \beta_y, \gamma_z$ ($x,y,z \in \omega$) содержит не более трех элементов.

Введем обозначения: $S_\alpha = \{\alpha_x | x \in \omega\}$, $S_\beta = \{\beta_y | y \in \omega\}$, $S_\gamma = \{\gamma_z | z \in \omega\}$.

ЛЕММА I. $S_\alpha = S_\beta = S_\gamma$ .

Если $\alpha_s$ вводится в построение с меткой $\langle k \rangle$ , то эта же метка отмечает $\beta_r, \beta_{r+1}$ . Легко понять, что в результате построения получим: $\alpha_s = \beta_r = \gamma_{7k}$ . Если же множество $\alpha_{s_1}$ вводится в построение с меткой $\langle k,1 \rangle$, то по самому определению этого множества имеем равенство $\alpha_{s_1} = \beta_{r+1} = \gamma_{7k+2}$ , причем это равенство в дальнейшем не нарушается. Предположим теперь, что множество $\alpha_{s_2}$ вводится в построение с меткой $\langle k,2 \rangle$ . Но в этом случае будет вводиться в построение и множество $\beta_{r_1}$ , которое отмечено этой же меткой и удовлетворяет равенствам $\alpha_{s_2} = \beta_{r_1} = \gamma_{7k+1}$ . В дальнейшем эти множества не меняются.

Пусть множество $\alpha_s$ вводится в построение с меткой $[k]$ . Но в этом случае в построении есть $\beta_r$, $\beta_{r+1}$ , отмеченные этой же меткой, и выполняются равенства $\alpha_s = \beta_r = \gamma_{7k+3}$ . В случае, когда множество $\alpha_{s_1}$ вводится в построение с меткой $[k,1]$, будут выполняться равенства $\alpha_{s_1} = \beta_{r+1} = \gamma_{7k+4}$ . При введении множества $\alpha_{s_2}$ с меткой $[k,2]$ будет вводится и множество $\beta_{r_1}$ такое, что выполняются равенства $\alpha_{s_2} = \beta_{r_1} = \gamma_{7k+5}$, которые в дальнейшем не нарушаются.

Так как каждое множество $\alpha_x$ вводится в построение с одной из меток, то из вышепроведенных рассуждений заключаем, что $S_\alpha \subseteq S_\beta$, $S_\alpha \subseteq S_\gamma$.

Попутно мы установили и включение $S_\beta \subseteq S_\gamma$.

Теперь для произвольного значения $k \in \omega$ рассмотрим множества $\gamma_{7k}, \gamma_{7k+1}, \gamma_{7k+2}, \gamma_{7k+3}, \gamma_{7k+4}, \gamma_{7k+5}, \gamma_{7k+6}$. Ясно, что $\gamma_{7k} = \alpha_s$, которое отмечено меткой $\langle k \rangle$. Аналогично $\gamma_{7k+3} = \alpha_{s_1}$, которое отмечено меткой $[k]$. Если $\gamma_{7k+2} \neq \gamma_{7k}$, то на некотором шаге на эту нумерацию будет навешена метка $\langle k,1 \rangle$. Но на этом же шаге будет введено в построение множество $\alpha_{s_2} = \gamma_{7k+2}$, которое тоже отмечено меткой $\langle k,1 \rangle$. Это равенство в дальнейшем не изменяется.

Если же $\gamma_{7k+1} \neq \gamma_{7k}$, то на некотором шаге построения на множество $\gamma_{7k+1}$ будет навешена метка $\langle k,2 \rangle$ (именно на том шаге, когда в эти множества будут включены различные элементы). В этом случае в построение будет включено множество $\alpha_{s_3} = \gamma_{7k+1}$, которое уже не нарушает этого равенства.

Аналогично показывается существование таких множеств $\alpha_{s_4}$, $\alpha_{s_5}$, что $\gamma_{7k+4} = \alpha_{s_4}$ и $\gamma_{7k+5} = \gamma_{7k+6} = \alpha_{s_5}$.

Таким образом, получаем включение $S_\gamma \subseteq S_\alpha$, а тогда $S_\alpha = S_\beta = S_\gamma$. Лемма доказана.

Обозначим через $S = S_\alpha = S_\beta = S_\gamma$ это семейство множеств. Ясно, что $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ являются вычислимыми нумерациями семейства $S$.

ЛЕММА 2. $\alpha < \beta$, $\alpha < \gamma$, $\beta < \gamma$.

Основываясь на доказательстве леммы I, определим функцию $\varphi(s)$, которая будет определять сводимость $\alpha \leq \gamma$. Положим

$$\varphi(s) = \begin{cases} 7k, \text{ если } \alpha_s \text{ вводится с меткой } \langle k \rangle; \\ 7k+1, \text{ если } \alpha_s \text{ вводится с меткой } \langle k,2 \rangle; \\ 7k+2, \text{ если } \alpha_s \text{ вводится с меткой } \langle k,1 \rangle; \\ 7k+3, \text{ если } \alpha_s \text{ вводится с меткой } [k]; \\ 7k+4, \text{ если } \alpha_s \text{ вводится с меткой } [k,1]; \\ 7k+5, \text{ если } \alpha_s \text{ вводится с меткой } [k,2]. \end{cases}$$

Нетрудно понять, что эта функция общерекурсивна и определяет сводимость $\alpha \leq \gamma$.

Определим общерекурсивную функцию $\psi(r)$, задающую сводимость $\beta \le \gamma$:

$$\psi(r) = \begin{cases} 7k, \text{ если } \beta_r \text{ и } \beta_{r+1} \text{ вводятся с меткой } \langle k\rangle; \\ 7k+1, \text{ если } \beta_r \text{ вводится с меткой } \langle k,2\rangle; \\ 7k+2, \text{ если } \beta_r \text{ и } \beta_{r-1} \text{ вводятся с меткой } \langle k\rangle; \\ 7k+3, \text{ если } \beta_r \text{ и } \beta_{r+1} \text{ вводятся с меткой } [k]; \\ 7k+4, \text{ если } \beta_r \text{ и } \beta_{r-1} \text{ вводятся с меткой } [k]: \\ 7k+5, \text{ если } \beta_r \text{ вводится с меткой } [k,2]. \end{cases}$$

Определим общерекурсивную функцию $f(x)$, осуществляющую сводимость $\alpha \le \beta$:

$$f(x) = \begin{cases} r, \text{ если } \alpha_x, \beta_r \text{ и } \beta_{r+1} \text{ вводятся с меткой } \langle k\rangle; \\ r+1, \text{ если } \alpha_x \text{ вводится с меткой } \langle k,1\rangle, \text{ а } \beta_{r+1} \\ \qquad \text{отмечено метками } \langle k\rangle, \langle k,1\rangle; \\ r_1, \text{ если } \alpha_x \text{ и } \beta_{r_1} \text{ вводятся с меткой } \langle k,2\rangle; \\ r, \text{ если } \alpha_x \text{ и } \beta_r, \beta_{r+1} \text{ вводятся с меткой } [k]; \\ r+1, \text{ если } \alpha_x \text{ вводится с меткой } [k,1], \text{ а } \beta_{r+1} \\ \qquad \text{отмечается этой меткой}; \\ r_1, \text{ если } \alpha_x \text{ и } \beta_{r_1} \text{ вводятся с меткой } [k,2]. \end{cases}$$

Покажем теперь, что $\beta \not\le \alpha$. Предположим, что общерекурсивная функция $\varphi_k(x)$ осуществляет сводимость $\beta \le \alpha$. Рассмотрим $\alpha_s$, $\beta_r$, $\beta_{r+1}$, которые вводятся в построение с меткой $\langle k\rangle$. Ясно, что настанет такой шаг, что будут определены значения $\varphi_k(r)$, $\varphi_k(r+1)$. А тогда на этом шаге будет выполнен этап II для данного значения $k$, и мы вступим в противоречие с определением сводящей функции, т.е. $\beta_{r+1} \ne \alpha_{\varphi_k(r+1)}$.

Аналогично устанавливается, что $\gamma \not\le \beta$. Условие $\gamma \not\le \alpha$ будет следовать из более общего $\gamma \underset{\lim,1}{\not\le} \alpha$, которое устанавливает следующая

ЛЕММА 3. $\gamma \underset{\lim,1}{\not\le} \alpha$.

Предположим противное, т.е. что вычислимая нумерация $\gamma$ предельно сводится к вычислимой нумерации $\alpha$ построенного семейства $S$ общерекурсивной функцией $g_k(x,y)$. В силу этого на некотором шаге $t_0$ построения будут определены при подходящих $r_1, r_2 \le t_0$ значения $g_k(r_1, 7k+5)$ и $g_k(r_2, 7k+6)$. А тогда на шаге $t_0$ будет выполнен этап IV построения, в результате которого будет выполнено одно из условий $\gamma_{7k+5}(t_0) = \alpha_{g_k(r_1,7k+5)}(t_0)$ или $\gamma_{7k+6}(t_0) \neq$ $\neq \alpha_{g_k(r_2,7k+6)}(t_0)$. Причем соответствующие множества будут отмечены меткой $[k,1]$. Если для $r > \max\{r_1,r_2\}$ значения функции $g_k(r,7k+5) = g_k(r_1,7k+5)$ и $g_k(r,7k+6) = g_k(r_2,7k+6)$ не меняются, то мы получаем

$$\gamma_{7k+5} \neq \alpha_{\lim\limits_{r\to\infty} g_k(r,7k+5)}$$

или

$$\gamma_{7k+6} \neq \alpha_{\lim\limits_{r\to\infty} g_k(r,7k+6)},$$

что противоречит определению предельно сводящей функции. Если же в одном из этих случаев произойдет для некоторого $r_3 > \max\{r_1,r_2\}$ смена одного из значений функции, то на подходящем шаге $t_1 >$ $> \max\{r_3,t_0\}$ для данного $k$ будет выполнен этап У построения. При этом произойдёт изменение множеств $\gamma_{7k+5}$ и $\gamma_{7k+6}$, которые в дальнейшем уже не изменяются. Так как у функции $g_k(x,y)$ общерекурсивная функция $\mathbf{1}(x) \equiv 1$ является мажорантой, то второго изменения значений этой функции не будет. Поэтому после выполнения этапа У на шаге $t_1$ и дальнейшего построения получим, что

$$\gamma_{7k+5} \neq \alpha_{\lim\limits_{r\to\infty} g_k(r,7k+5)}$$

или

$$\gamma_{7k+6} \neq \alpha_{\lim\limits_{r\to\infty} g_k(r,7k+6)}.$$

В любом случае вступаем в противоречие с определением предельно сводящей функции, т.е. предположение $\gamma \leq_{\lim,1} \alpha$ неверно. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. $\beta \leq_{\lim,1} \alpha$.

Как уже отмечалось, каждое множество $\beta_r$ вводится в построение отмеченным некоторой меткой. Пусть $\beta_r$ и $\beta_{r+1}$ вводятся в построение с меткой $\langle k \rangle$. Тогда легко понять, что при каждом $t$ имеет место равенство $\beta_r(t) = \alpha_s(t)$, причем множество $\alpha_s$ вводится в построение с меткой $\langle k \rangle$. Кроме того, если меткой $\langle k,1 \rangle$

не отмечаются строящиеся множества, то $\beta_{r+1}(t) = \alpha_s(t)$. Значит, в результате построения получим $\beta_r = \alpha_s$ и $\beta_{r+1} = \alpha_s$, если $\langle k,1\rangle$ не отмечает $\beta_{r+1}$. Если же множество $\beta_{r+1}$ на некотором шаге будет отмечено меткой $\langle k,1\rangle$, то на этом же шаге $t_1$ будет введено в построение множество $\alpha_{s_1}(t_1) = \beta_{r+1}(t_1)$. В дальнейшем эти множества не меняются. Значит, в результате построения получим $\beta_{r+1} = \alpha_{s_1}$.

Если множество $\beta_p$ вводится в построение с меткой $\langle k,2\rangle$, то на этом же шаге $t_2$ в построение будет введено множество $\alpha_{s_2}$ с этой же меткой. Причем $\alpha_{s_2}(t_2) = \beta_p(t_2)$ и на дальнейших шагах построения эти множества не меняются. Значит, в результате построения получим $\beta_p = \alpha_{s_2}$.

Если множества $\beta_r, \beta_{r+1}$ вводятся в построения с меткой $[k]$, то $\beta_r = \alpha_s$, где через $\alpha_s$ обозначено множество, вводимое в построение нумерации $\alpha$ с меткой $[k]$. В случае, когда на $\beta_{r+1}$ не навешивается метка $[k,1]$, будет выполняться равенство $\alpha_s = \beta_{r+1}$. Если же на множество $\beta_{r+1}$ на некотором шаге навешивается метка $[k,1]$, то на этом же шаге в построение включается множество $\alpha_{s_1}$ такое, что $\alpha_{s_1} = \beta_{r+1}$.

Если множество $\beta_{r_1}$ вводится в построение с меткой $[k,2]$, то на этом же шаге будет введено множество $\alpha_{s_2}$ такое, что $\alpha_{s_2} = \beta_{r_1}$.

Других возможностей нет. Смена предполагаемого образа может происходить только при навешивании меток вида $\langle k,1\rangle$ или $[k,1]$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. $\gamma \underset{\lim,1}{\leq} \beta$.

Для каждого $k$ в построении обязательно появляются метки $\langle k\rangle$ и $[k]$. Если $\beta_r, \beta_{r+1}$ вводятся в построение с меткой $\langle k\rangle$, то $\gamma_{7k} = \beta_r$, $\gamma_{7k+2} = \beta_{r+1}$. Если на $\gamma_{7k+1}$ метка $\langle k,2\rangle$ не навешивается, то $\gamma_{7k+1} = \beta_r$. В случае навешивания метки $\langle k,2\rangle$ на множество $\gamma_{7k+1}$ в построение будет включено множество $\beta_{r_1}$ такое, что $\gamma_{7k+1} = \beta_{r_1}$.

Если множества $\beta_p, \beta_{p+1}$ вводятся в построение с меткой $[k]$, то в результате построения имеем $\beta_p = \gamma_{7k+3}$, $\beta_{p+1} = \gamma_{7k+4}$. Если на множества $\gamma_{7k+5}$, $\gamma_{7k+6}$ в построении не навешивается метка $[k,2]$, то $\gamma_{7k+5} = \beta_{p+1} = \gamma_{7k+6}$. В случае навешивания метки $[k,2]$ на множества $\gamma_{7k+5}$, $\gamma_{7k+6}$ в построение будет введено множество $\beta_{p_1}$ такое, что $\beta_{p_1} = \gamma_{7k+5} = \gamma_{7k+6}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Для произвольных вычислимых нумераций $\varkappa$, $\eta$ построенного семейства $S$ рекурсивно-перечислимых множеств имеет место сводимость $\varkappa \leq_{\lim,2} \eta$.

Сначала докажем, что для любых множеств $S_1, S_2$ из семейства $S$ имеет место эквивалентность: $S_1 \subseteq S_2 \Leftrightarrow S_1 = S_2$. Действительно, все множества семейства $S$ непусты и содержат не более трех элементов. Поэтому если в множестве $S_1$ имеются три элемента, то, очевидно, из $S_1 \subseteq S_2$ сразу следует равенство $S_1 = S_2$. Предположим, что множество $S_1$ одноэлементно: $S_1 = \{n\}$. Но это множество на некотором шаге будет введено в построение нумерации $\alpha$ с некоторой меткой $\langle k \rangle$ $\alpha_s = \{n\}$. Ясно, что имеются точно два номера $r$, $r+1$, для которых $\beta_r = \beta_{r+1} = \alpha_s = \{n\}$. Кроме того, $\gamma_{7k} = \gamma_{7k+1} = \gamma_{7k+2} = \{n\}$. Элемент $n$ более ни в какие строящиеся множества не включается. Аналогично устанавливается, что если $\alpha_s = \{n\}$ вводится с меткой $[k]$, то для подходящих $p$, $p+1$ имеем $\alpha_s = \beta_p = \beta_{p+1} = \gamma_{7k+3} = \gamma_{7k+4} = \gamma_{7k+5} = \gamma_{7k+6}$ и в других множествах элемента $n$ нет.

Если же множество $S_1 = \{n,m\}$ двухэлементно, то на шаге включения элемента $m$ в одно из шести указанных выше (или соответственно семи) множеств и другие возрастают до двухэлементных. А потому множеств $\{n\}$ или $\{m\}$ в семействе $S$ не будет. Множество $\{n,m\}$ ни в каком трехэлементном множестве содержаться не может, так как при увеличении некоторого из строящихся множеств $\{n,m\}$ до трехэлементного $\{n,m,l\}$ и все другие строящиеся множества $\{n,m\}$ возрастают до трехэлементных.

Теперь опишем алгоритм сведения $\varkappa \leq_{\lim,2} \eta$. Рассмотрим произвольное $k \in \omega$. Ищем такое $t_0$, что $\varkappa_k(t_0) \neq \emptyset$. Пусть $\varkappa_k(t_0) = \{n\}$. Тогда выбираем наименьшие $s, t_1$ такие, что $n \in \eta_s(t_1)$. Объявляем $\eta_s$ образом $\varkappa_k$. Если найдется такой шаг $t_2 > \max\{t_0, t_1\}$, что $\varkappa_k(t_2) = \{n,m\}$, то выбираем такие наименьшие $s_1, t_3$, что $\{n,m\} \subseteq \eta_{s_1}(t_3)$.

Объявляем $\eta_{s_1}$ новым образом множества $\varkappa_k$. Если же обнаружится на некотором шаге $t_4 > \max\{t_2, t_3\}$, что $\varkappa_k(t_4) = \{n, m, r\}$, то снова выбираем наименьшие $s_2, t_5$ такие, что $\{n, m, r\} \subseteq \eta_{s_2}(t_5)$. Множество $\eta_{s_2}$ и будет образом $\varkappa_k$. Лемма доказана.

ЛЕММА 7. $|L(S)| = \chi_0$.

В силу леммы 2, у семейства $S$ имеются две неэквивалентные вычислимые индексации $\alpha, \beta$. Тогда по теореме А.В.Хуторецкого [4] полурешетка $L(S)$ счетна. Лемма доказана.

Из лемм 2–7 следует, что построенное семейство рекурсивно-перечислимых множеств удовлетворяет нужным требованиям. Теорема доказана.

Заметим, что построенная вычислимая нумерация $\alpha$ семейства $S$ однозначна.

СЛЕДСТВИЕ. *Существуют вычислимый класс $K^*$ конструктивных моделей и его вычислимые индексации $\alpha, \beta, \gamma$ такие, что $\alpha < \beta < \gamma$, $\gamma \underset{\lim,1}{\leq} \beta$, $\beta \underset{\lim,1}{\leq} \alpha$, $\gamma \underset{\lim,1}{\not\leq} \alpha$, причем $|L(K^*)| = \chi_0$ и для любых двух вычислимых индексаций $\varkappa, \eta$ класса $K^*$ имеет место сводимость $\varkappa \underset{\lim,2}{\leq} \eta$.*

Аналогичным описанному методом можно для каждого $n > 0$ доказать существование такого вычислимого класса $K_n^*$, что $|L(K_n^*)| = \chi_0$, для любых двух вычислимых индексаций $\varkappa, \eta$ класса $K_n^*$ имеет место сводимость $\varkappa \underset{\lim,n}{\leq} \eta$ и имеется цепь длины $n+1$ вычислимых индексаций этого класса $\alpha^0 < \alpha^1 < \ldots < \alpha^n$, у которой $\alpha^{i+1} \underset{\lim,1}{\leq} \alpha^i$ при каждом $i < n$, но $\alpha^{i+k+1} \underset{\lim,k}{\not\leq} \alpha^i$, где $k < n - i$.

Этим самым дается положительный ответ на первый вопрос из [3].

Для каждого вида сводимости $\leq$, $\underset{\lim}{\leq}$, $\underset{\text{о.п.}}{\leq}$, $\underset{\lim,f(x)}{\leq}$ вычислимых индексаций класса конструктивных моделей определим бинарные отношения:

$$\alpha \approx \beta \Leftrightarrow \alpha \leq \beta \wedge \beta \leq \alpha ;$$

$$\alpha \underset{\lim}{\approx} \beta \Leftrightarrow \alpha \underset{\lim}{\leq} \beta \wedge \beta \underset{\lim}{\leq} \alpha;$$

$$\alpha \underset{\text{о.п.}}{\approx} \beta \Leftrightarrow \alpha \underset{\text{о.п.}}{\leq} \beta \wedge \beta \underset{\text{о.п.}}{\leq} \alpha,$$

$$\alpha \underset{\lim, f(x)}{\approx} \beta \Leftrightarrow \alpha \underset{\lim, f(x)}{\leq} \beta \wedge \beta \underset{\lim, f(x)}{\leq} \alpha.$$

Известно, что отношение $\approx$ является отношением эквивалентности на совокупности вычислимых индексаций фиксированного, но произвольного класса $K^*$ конструктивных моделей. Относительно трех других бинарных отношений справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. а) Бинарные отношения $\underset{\lim}{\approx}$, $\underset{\text{о.п.}}{\leq}$ являются эквивалентностями;

б) отношение $\underset{\lim, f(x)}{\approx}$ не является отношением эквивалентности.

Рефлексивность и симметричность всех рассматриваемых отно - шений очевидны в силу определения этих отношений. Проверка транзитивности отношений $\underset{\lim}{\approx}$, $\underset{\text{о.п.}}{\approx}$ проводится аналогично, но для второго отношения требуется еще найти соответствующую общерекурсивную мажоранту. Поэтому приведем проверку транзитивности только отношения $\underset{\text{о.п.}}{\approx}$.

Пусть $\alpha \underset{\text{о.п.}}{\approx} \beta$ и $\beta \underset{\text{о.п.}}{\approx} \gamma$, причем $\alpha \underset{\lim, f_1}{\leq} \beta$, $\beta \underset{\lim, f_2}{\leq} \gamma$, $\gamma \underset{\lim, f_3}{\leq} \beta$, $\beta \underset{\lim, f_4}{\leq} \alpha$, где через $f_1, f_2, f_3, f_4$ обозначены соот - ветствующие общерекурсивные мажоранты. Обозначим через $\psi_1(x,y)$, $\psi_2(x,y)$, $\psi_3(x,y)$ и $\psi_4(x,y)$ соответствующие общерекурсивные пре - дельно сводящие функции. Определим общерекурсивную функцию $\varphi_1(n,x)$, задающую предельную сводимость $\alpha$ к $\gamma$, следующим алгоритмом: $\varphi_1(n,x) = \psi_2(n, \psi_1(n,x))$. Общерекурсивность этой функции очевидна. Кроме того, имеем

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_1(n,x) = \lim_{n\to\infty} \psi_2(n, \lim_{m\to\infty} \psi_1(m,x)).$$

Поэтому

$$\alpha_x \underset{a}{\equiv} \beta_{\lim\limits_{n\to\infty}\psi_1(n,x)} = \beta_{n_x} \underset{a}{\equiv} \gamma_{\lim\limits_{m\to\infty}\psi_2(m,n_x)} \underset{a}{\equiv}$$

$$\underset{a}{\equiv} \gamma_{\lim\limits_{m\to\infty}\psi_2(m, \lim\limits_{n\to\infty}\psi_1(n,x))} = \gamma_{\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_1(n,x)}.$$

Нетрудно понять, что функция

$$h_1(x) = \sum_{i=0}^{f_1(x)} (f_2(x) + 1)$$

будет общерекурсивной мажорантой функции $\varphi_1(n,x)$ . Таким образом, $\alpha \underset{\lim,h_1}{\leq} \gamma$, т.е. $\alpha \underset{\text{о.п.}}{\leq} \gamma$.

Аналогично показывается, что общерекурсивная функция $\varphi_2(n,x) = \psi_4(n,\psi_3(n,x))$ осуществляет предельную сводимость $\gamma \underset{\lim,h_2}{\leq} \alpha$, где функция

$$h_2(x) = \sum_{i=0}^{f_3(x)} (f_4(i) + 1)$$

является общерекурсивной мажорантой. Значит, $\gamma \underset{\text{о.п.}}{\leq} \alpha$.

Таким образом, установлено, что $\alpha \underset{\text{о.п.}}{\leq} \gamma$ и $\gamma \underset{\text{о.п.}}{\leq} \alpha$, т.е. $\alpha \underset{\text{о.п.}}{\approx} \gamma$.

Вторая часть теоремы 2 является следствием теоремы I. Так как из последней вытекает, что отношение $\underset{\lim,f(x)}{\approx}$ не удовлетворяет свойству транзитивности, то поэтому бинарное отношение $\underset{\lim,f(x)}{\approx}$ не является отношением эквивалентности. Теорема доказана.

## Литература


I. ЕРШОВ Ю.Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. - М.: Наука, I980.

2. ДОБРИЦА В.П. Структурные свойства вычислимых классов конструктивных моделей //Алгебра и логика. - I987. - Т.26, №I, 36-62.

3. ДОБРИЦА В.П. Об ограниченной предельной сводимости вычислимых индексаций классов конструктивных моделей //Логические методы в программировании. - Новосибирск, I987. - Вып. I20: Вычислительные системы. - С.I43-I58.

4. ХУТОРЕЦКИЙ А.В. О мощности верхней полурешетки вычислимых нумераций //Алгебра и логика. - I971. - Т.I0, № 5.



Поступила в ред.-изд.отд.
I5 июня I987 года