ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ
(Вычислительные системы)
1987 год Выпуск 122

УДК 510.25+510.52+519.682

ОГРАНИЧЕННАЯ ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ, ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ ВЫЧИСЛИМОСТЬ И Δ - ПРОГРАММИРОВАНИЕ[x)]

В.Ю. Сазонов

Введение и методологическая мотивировка

Настоящая работа является попыткой формализовать в виде подходящей теории множеств некоторый естественный математический образ мышления, который с самого начала исходит из ограниченности имеющихся в нашем распоряжении ресурсов. В отличие от теории сложности, базирующейся на аналогичных предпосылках, этот, безусловно, связанный с ней подход состоит не столько в установлении количественных оценок, сколько в логическом анализе возникающих здесь ситуаций. Он был намечен еще в [2,3] в виде рекурсивной арифметики конечного отрезка натурального ряда и ограниченной арифметики конечных двоичных слов. В полученной довольно слабой по сравнению с ZF и даже арифметикой Пеано теории множеств (см. §1,3) все доказуемо-рекурсивные функции задаются термами и составляют в точности класс полиномиально вычислимых функций (на HF, см. §3, теорему 3). Приведены результаты о консервативности этой теории относительно ее фрагментов и аналог E-свойства (§2, теоремы 1,2). Определяется понятие редукции, обладающее свойствами Чёрча-Россера и нормализуемости и позволяющее элиминировать из формул теоретико-множественные операции пары, объединения, Δ-выделения и взятия образа множества относительно термально определимой операции (§2, теоремы 2',2"). Обсуждается возможность применения в программировании такой теории множеств и развитых здесь методов (§4).

x) Эта статья является расширенным и одновременно упрощенным вариантом [1]. Упрощение состоит в том, что не рассматриваются "праэлементы". Однако теоремы 2,2' и 2" являются новыми.

Далее, во введении рассматриваются некоторые общие методологические вопросы. Читатель, интересующийся собственно математическими результатами, может перейти сразу к §1-3.

В предлагаемой теории множеств каждая подкванторная переменная имеет (в отличие, например, от ZF) свое множество возможных значений, а не весь универсум. Формально это означает, что каждый квантор, кроме внешних кванторов всеобщности, должен быть ограничен, т.е. должен иметь вид $\forall x \in t$ или $\exists x \in t$, причем не только в аксиомах, но и в доказательствах и теоремах. Подобное требование на "основания" представляется естественным и не чрезмерным, поскольку оно, очевидно, отвечает математической практике, где почти не применяются кванторы по всем мыслимым математическим объектам, а только по натуральным числам, по точкам какого-либо пространства и т.п. С другой стороны, требование ограниченности кванторов естественно и с точки зрения нематематической практики, в том числе и программистской, поскольку оно соответствует необходимости обходиться конечными "ресурсами". А это приводит к отходу от традиционной математической практики, допускающей бесконечные множества. Впрочем, накопленное математическое знание может быть представлено и в какой-нибудь иной, "нестандартной" форме, согласующейся с требованием конечности ресурсных границ (см. конец §3).

Оказывается, что такое требование естественно приводит и к известному в теории сложности понятию вычислимости за полиномиальное время (см. также [2-11], где эта вычислимость и некоторые родственные ей понятия охарактеризованы в терминах, например, общей рекурсии в конечных областях). На основании этого полиномиальная вычислимость предстает как формализация, адекватная интуитивному понятию ("достижимой") вычислимости, при условии, что не используется абстракция потенциальной осуществимости, т.е. (итерация) нашей способности отвлечения от (конечных) ресурсных границ. Это утверждение об адекватности является аналогом известного тезиса Чёрча (см. также [2,3]). Заметим, что обычный тезис Чёрча о вычислимости неявно подразумевает абстракцию потенциальной осуществимости и одновременно "отрицание" абстракции актуальной бесконечности.

К сожалению, осознанию того факта, что общепринятая сейчас в математике абстракция потенциальной осуществимости не является такой уж необходимой, препятствуют сложившиеся традиции. Это, например, представление, что существуют в каком-то там особенном, абстрактном смысле "настоящие" или "стандартные" натуральные числа, а также универсум, состоящий из "всех" возможных множеств, что в математике доказываются "истины", что, например, проблема континуума "на самом деле" имеет определенное решение и т.п.

Конечно, принимаемые в математике те или иные соглашения, определения, аксиомы обычно имеют под собой весьма веские основания. Но это ни в коей мере не означает, что они приобретают статус непререкаемой, так сказать, математической "истины" в последней инстанции.

В случае натурального ряда $\omega = \{0,1,2,..\}$ его желаемая "стандартность" просто выдается за действительную. Конечно, по модулю некоторого воображаемого универсума множеств, содержащего ω как элемент, можно в определенном точном смысле охарактеризовать ω как стандартный натуральный ряд, в отличие от существующих в этом же универсуме нестандартных (неизоморфных ω) натуральных рядов. Но тем самым вера в существование "стандартного" натурального ряда сводится к вере в существование еще более проблематичного "стандартного" универсума множеств, что весьма сомнительно, если вспомнить известную ситуацию с континуум-гипотезой.

С другой стороны, при формировании в нашем сознании понятия натурального ряда (а это происходит уже в детстве) его бесконечность вовсе не кажется такой уж очевидной. Она принимается как соглашение, к которому приходится с некоторым трудом привыкать. И возможность складывать числа и умножать, и возводить в степень – все это дается с трудом, и то, что эти действия всегда выполнимы, т.е. не просто осмыслены, как процесс, а всегда приводят к конечным результатам, является постулатом, а не самоочевидной "истиной". Наконец, вводится чрезвычайно полезная аксиома индукции, имеющая, однако, побочный эффект: она позволяет доказывать осуществимость заведомо неосуществимых на практике вычислений. Кроме того, эта схема аксиом все равно не фиксирует однозначно наши представления о натуральных числах. Подчеркнем, что речь идет не просто об известной неполноте аксиом арифметики, а о принципиальной неопределенности самого интуитивного понятия натурального ряда и его "длины" (даже если она бесконечна).

Короче, натуральный ряд - это всего лишь изготовляемый нами аксиоматический инструмент, который не может быть "истинным" или "ложным", или правильным на все времена, а должен быть точным, удобным, полезным, эффективным, адекватным тем или иным сугубо теоретическим или практическим целям. И даже с конечным натуральным рядом можно успешно работать [2,3,32], но пока еще мало кто это пробовал. В настоящей статье речь идет , скорее, о безэкспоненциальном натуральном ряде, в котором выполняется только весьма ограниченная аксиома индукции.

В основаниях математики есть много интересных подходов и понятий, некоторые из них оказались чрезвычайно плодотворными и даже реализованы на практике (пример - ЭВМ). Ни в коей мере не пытаясь перечеркнуть достигнутое, мы рассмотрим здесь еще одну простую и, хотелось бы надеяться, полезную идею, выражаемую, в основном, короткой формулой: "релятивизовывать построения и доказательства к ресурсным границам". Вряд ли стоит переписывать целиком ту или иную философию на математический лад. Но извлечь из нее какую-то схему и представить ее конкретным (разумеется,не единственно возможным) образом в виде исчисления может оказаться задачей вполне осмысленной, реальной и полезной. Важно то, что в интересующем нас случае это действительно возможно и естественным образом согласуется с некоторыми известными понятиями логики и теории сложности, а также программирования.

В какой мере идея релятивизации к ресурсным границам может служить основой для математики вообще - вопрос, конечно, достаточно спорный. Представляется, однако, вполне естественным перенесение на почву оснований математики этой идеи из теории сложности, где она подразумевала лишь "учет ресурсов и их минимизацию".

Что касается программирования, то в нем, в отличие от математики, в принципе не приемлема ссылка на потенциальную осуществимость, если она не предполагает актуальной осуществимости (процесса написания программы или ее исполнения на ЭВМ). Поэтому неудивительно, что рассматриваемая идея находит здесь свое воплощение в виде реляционных (конечных) баз данных (см. §4).

§I. Теория Крипке-Платека без фундирования

В качестве ядра искомой ограниченной теории множеств может служить[x)] следующая теория KP_0 (являющаяся несколько нетрадиционным представлением известной теории множеств Крипке-Платека KPU [12,13] без схемы фундирования и также, ради простоты, без праэлементов).

Определим индуктивно Δ-формулы и термы теории KP_0.

1. Переменные $x, y, z, \ldots$ являются (атомарными) термами.

2. Если s и t - термы, то $s \in t$ - (атомарная) Δ-формула.

3. Если φ и ψ являются Δ-формулами и переменная x не входит (свободно) в терм t, то $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\neg\varphi$, $\forall x \in t \varphi$, $\exists x \in t \varphi$ являются Δ-формулами.

4. Если s, t, a являются термами, x не входит (свободно) в a и φ является Δ-формулой, то $\{s,t\}$ и $\cup\{t \mid x \in a \wedge \varphi\}$ являются термами.

Интуитивно терм $\{s,t\}$ обозначает множество-пару, состоящую в точности из (значений) s и t. В частности, $\{t\} \rightleftharpoons \{t,t\}$ - одноэлементное множество. Терм $\cup\{t \mid x \in a \wedge \varphi\}$ обозначает объединение множества всех $t[x]$ таких, что $x \in a$ и выполняется $\varphi[x]$. Здесь переменная x в квадратных скобках означает, что терм t и формула φ, возможно, зависят от x. Через эти две теоретико-множественные операции определяются операция взятия образа множества $\{t[x] \mid x \in a \wedge \wedge \varphi[x]\} \rightleftharpoons \cup\{\{t\} \mid x \in a \wedge \varphi\}$, в частности операция Δ-выделения $\{x \mid x \in a \wedge \varphi\}$, а также операции объединения $\cup a \rightleftharpoons \cup\{x \mid x \in a \wedge x \in a\}$, $a \cup b \rightleftharpoons \cup\{a,b\}$ и операция прямого произведения $a \times b \rightleftharpoons \cup\{a \times \{y\} \mid y \in \in b\}$, где $a \times \{y\} \rightleftharpoons \{\langle x,y \rangle \mid x \in a\}$ и $\langle x,y \rangle \rightleftharpoons \{\{x\},\{x,y\}\}$. Определим также условный оператор **if** φ **then** t_1 **else** $t_2 \rightleftharpoons \cup\{x \in \in \{t_1,t_2\} \mid (\varphi \supset x = t_1) \wedge (\neg\varphi \supset x = t_2)\}$, где $\varphi \in \Delta$. Однако такие операции, как множество всех подмножеств 2^x и транзитивное замыкание $TC(x)$ здесь невыразимы. В дальнейшем нам понадобятся расширения этого языка за счет добавления (в п.4) констант (в качестве атомарных термов) и новых термообразующих операторов. Соответственно расширится объем и класса (ограниченных) формул Δ, а также вводимых ниже классов Δ_0 и Σ.

Обозначим через Δ_0 класс Δ-формул, содержащих только атомарные термы (т.е. термы, являющиеся переменными или в случае расширенного языка константами). Замкнув класс Δ относительно логи -

---

x) Это подтверждают теоремы I и 2.

ческих связок $\wedge$, $\vee$, $\forall x \in t$, $\exists x \in t$ и неограниченного квантора существования $\exists x$, получим класс Σ. Добавление к имеющимся связкам неограниченного квантора всеобщности $\forall x$ приводит к общему понятию формулы. Хотя ограниченные кванторы естественно рассматривать как самостоятельные языковые конструкции, мы тем не менее будем считать их сокращениями вида $\forall x \in t\varphi \rightleftharpoons \forall x(x \in t \supset \varphi)$, $\exists x \in t\varphi \rightleftharpoons \exists x(x \in t \wedge \varphi)$, где $\varphi \supset \psi \rightleftharpoons \neg\varphi \vee \psi$. . Так как в нашем языке нет равенства, положим $t = s \rightleftharpoons t \subseteq s \wedge s \subseteq t$, где $t \subseteq s \rightleftharpoons \forall x \in t(x \in s)$.

Приведем аксиомы KP_0 :

экстенсиональность: $t_1 = t_2 \to (\varphi_x[t_1] \leftrightarrow \varphi_x[t_2])$;

пара: $s \in \{t_1, t_2\} \leftrightarrow s = t_1 \vee s = t_2$;

Δ-объединение:

$$s \in \cup\{t[x] \mid x \in a \wedge \varphi[x]\} \leftrightarrow \exists x \in a(\varphi[x] \wedge s \in t[x]);$$

Δ-коллекция: $\forall x \in a \exists y\, \varphi \to \exists b \forall x \in a \exists y \in b\, \varphi$, где φ в последних двух (а можно считать, что и во всех) схемах аксиом предполагается Δ-формулой. Таким образом, единственной существенно не-Δ-аксиомой теории KP_0 является принцип Δ-коллекции, содержащий два неограниченных квантора $\exists$. Но в следующем параграфе мы увидим (теорема I), что этот принцип вполне безобиден.

Можно показать, что аксиома экстенсиональности равносильна (если не рассматриваются добавочные термообразующие операции) схеме $t_1 = t_2 \to (t_1 \in s \leftrightarrow t_2 \in s)$ или схеме $s \in t \leftrightarrow \exists x \in t(s = x)$. Заметим, что бо́льшая часть разделов 2–5 гл.I в [I2] и принцип Σ-перечисления [I4] опираются только на теорию Крипке-Платека без фундирования. То же верно и для теоремы о рекурсии из [I2], как показано в [I5,I6]. Однако теорема Ганди [I2] потребовала бы добавления сильной аксиомы (более или менее "абсолютной") фундированности отношения принадлежности $\in$ на универсуме (см.также [I5, I6]). Мы же будем постулировать в дальнейшем только довольно слабую фундированность $\in$ в виде следующего ограниченного правила $\in$-индукции:

$$\in\text{-}\Delta\text{-Ind:}\quad \frac{\forall x \in y\varphi \to \varphi_x[y]}{\varphi_x[t]},$$

где $\varphi \in \Delta$. Заметим, что в этом правиле участвуют только Δ-формулы и в этом смысле оно является Δ-правилом. В отличие от него соответствующая (несколько более сильная) аксиома $\in$-Δ-индукции

$\forall y(\forall x \in y\ \varphi \supset \varphi_x[y]) \to \varphi_x[t]$ использует неограниченный квантор всеобщности.

Полная теория Крипке-Платека KP получается из KP_0 добавлением полного правила (или аксиомы) $\in$-индукции с произвольной индукционной формулой φ. На самом деле для очень многих целей (например, для теоремы Ганди относительно Σ-классов; см. [15,16]) вполне достаточно было бы правила $\in$-Σ-индукции. Но это уже не будет ограниченной теорией множеств.

Из-за существенного сужения класса индукционных формул до класса Δ нам придется постулировать в §3 ряд рекурсивных теоретико-множественных операций, так как в теории $KP_0+\in$-Δ-Ind невозможно доказать существование каких-либо (Σ-)операций, кроме уже имеющихся (см. теорему 1).

В следующем параграфе мы также увидим (см. теоремы 2,2',2"), что в подтеории Ext (в языке Δ_0) теории KP_0, состоящей только из аксиомы экстенсиональности, интерпретируется в определенном смысле вся теория KP_0.

§2. Дедуктивные свойства теории KP_0

Рассмотрим произвольную теорию T вида [KP_0 + некоторые Δ-аксиомы и Δ-правила вывода], одновременно допуская и расширение языка KP_0 новыми термообразующими операторами, с соответствующим расширением классов формул Δ и Σ. Обозначим через Δ_T класс Σ-формул φ таких, что $T \vdash \varphi \leftrightarrow \neg\psi$ для некоторой Σ-формулы ψ, зависящей от φ. Как и в [12], для каждой Σ-формулы $\varphi[\bar{x},y]$ такой, что список $\bar{x},y$ содержит все свободные переменные и в теории T доказуема формула $\exists! y\ \varphi[\bar{x},y]$, мы можем ввести по определению теоретико-множественную Σ_T-операцию $f_\varphi(\bar{x}) = y$, удовлетворяющую условию $\varphi[\bar{x}, f(\bar{x})]$.

ТЕОРЕМА 1 [1]. а) Для любой Σ-формулы $\varphi[\bar{x},y]$, если $T \vdash \exists y\ \varphi[\bar{x},y]$, то [T без Δ-коллекции] $\vdash \exists y \in t[\bar{x}]\ \varphi[\bar{x},y]$ для некоторого терма $t[\bar{x}]$. В частности, принцип Δ-коллекции не обязателен для вывода Σ-(и Δ-) теорем.

б) Если $\varphi \in \Delta_T$, то $T \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi_0$ для некоторой Δ-формулы φ_0.

в) Класс Σ_T-операций совпадает с классом термально определимых операций теории T.

Пункт "а" можно значительно обобщить [17]. Из него следуют пп. "б" и "в". Доказательство п. "а" основано на некотором (нестандартном) понятии реализуемости для импликаций Σ-формул [17] и на следующем утверждении.

ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА ОБ УСТРАНЕНИИ СЕЧЕНИЙ[x)] [2]. Пусть Ax - множество секвенций исчисления Генцена LK (см. [18]), замкнутое относительно подстановок термов. Тогда сечения по формулам не из этих секвенций могут быть элиминированы из любого вывода в $LK + Ax$.

В частности, если доказываемая секвенция и секвенции из Ax содержат только Σ-(Δ-)формулы, то можно ограничиться $LK\Sigma$-($LK\Delta$-) выводами, т.е. выводами, состоящими из таких же секвенций. Вообще, обозначим через $T{\upharpoonright}\Sigma$, $T{\upharpoonright}\Delta$ и $T{\upharpoonright}\Delta_0$ исчисления секвенций, получающиеся из исчисления $LK+T$ наложением соответствующих ограничений на вид формул, участвующих в секвенциях выводов, а значит, и на вид аксиом и теорем. Так, Δ-коллекция является аксиомой исчисления $T{\upharpoonright}\Sigma$, но не $T{\upharpoonright}\Delta$ и $T{\upharpoonright}\Delta_0$. Тогда в качестве следствия получаем, что исчисление T (т.е. $LK+T$) консервативно расширяет $T{\upharpoonright}\Sigma$ и даже $T{\upharpoonright}\Delta$. (Фактически, в исчислении $T{\upharpoonright}\Delta$ можно имитировать выводы исчисления $T{\upharpoonright}\Sigma$ путем подходящего ограничения неограниченных кванторов существования [17]. Это, в частности, приводит к "ресурсной границе" t в теореме 1,"а".) Более того, следующая теорема показывает, что при некоторых ограничениях на теорию T она консервативно расширяет и исчисление $T{\upharpoonright}\Delta_0$. В частности, это верно для $T \rightleftharpoons KP_0$.

ТЕОРЕМА 2. а) Любая Δ-формула φ в языке теории KP_0 эквивалентна в KP_0 некоторой Δ_0-формуле φ_0.

---

x) Напомним, что секвенция - это выражение вида $\varphi_1,\ldots,\varphi_m \to \psi_1,\ldots,\psi_n$, где члены φ_i,ψ_j являются формулами. Такая секвенция просто обозначает импликацию $\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_m \supset \psi_1\vee\ldots\vee\psi_n$. Доказательство этой теоремы почти дословно повторяет доказательство (например, в [18]) ее классического варианта. Единственное отличие - рассматриваются ($LK+Ax$)-выводы, содержащие много сечений (смешений), из которых только одно не имеет требуемого вида.

б) Теория KP_0 консервативно расширяет исчисление[ж)] $Ext \restriction \Delta_0$. Фактически упомянутая в "а" трансляция $\varphi \mapsto \varphi_0$ (тождественная на $\Delta_0 \subseteq \Delta$) является интерпретацией исчисления $KP_0 \restriction \Delta$ в исчислении $KP_0 \restriction \Delta_0 = Ext \restriction \Delta_0$.

Другими словами, для любого правила вывода (в частности, аксиомы) исчисления $KP_0 \restriction \Delta$, например вида $\Gamma \to \Pi / \Gamma' \to \Pi'$, соответствующее согласно трансляции $\varphi \mapsto \varphi_0$ правило $\Gamma_0 \to \Pi_0 / \Gamma'_0 \to \Pi_0$ является допустимым в исчислении $Ext \restriction \Delta_0$, т.е. $Ext \restriction \Delta_0 \vdash \Gamma_0 \to \Pi_0$ влечет $Ext \restriction \Delta_0 \vdash \Gamma'_0 \to \Pi'_0$.

Более общо, пусть $T = KP_0 + Ax$ $(+\in\text{-}\Delta\text{-}Ind)$ в языке KP_0, возможно, с добавленными индивидными константами, причем набор (Δ-)аксиом Ax является замыканием относительно подстановок термов некоторого набора Δ_0-аксиом Ax_0 такого, что для любой формулы φ из Ax в исчислении $T \restriction \Delta_0 = Ext \restriction \Delta_0 + Ax_0$ $(+\in\text{-}\Delta_0\text{-}Ind)$ доказуема (фактически любая) эквивалетная ей в KP_0 Δ_0-формула φ_0. Тогда имеем

в) при указанных ограничениях на T та же трансляция $\varphi \mapsto \varphi_0$ языка Δ в Δ_0 является интерпретацией исчисления $T \restriction \Delta$ в $T \restriction \Delta_0$.

Например, в качестве Ax_0 можно взять одну Δ_0-аксиому "ω – первый предельный ординал" для некоторой константы ω.

Заметим, что в чистом языке Δ_0-формулы содержат кванторы, ограниченные в наиболее сильном смысле – они имеют вид $\forall x \in y$ и $\exists x \in y$, где y есть переменная, а не (сложно устроенный) терм, возможно, обозначающий "очень большое" множество. Поэтому теория, основанная на таком языке, очевидно, не использует абстракцию потенциальной осуществимости (см. введение). Тем самым теорема 2 в каком-то смысле оправдывает принятие теоретико-множественных операций пары и Δ-объединения (в частности, Δ-выделения, взятия образа множества, прямого произведения и т.д.), а также с учетом теоремы I и принципа Δ-коллекции.

Теорема 2 является только частичным результатом, поскольку нас интересуют и другие теоретико-множественные операции. Их ана-

---

[ж)] Это предложение остается верным, если к KP_0 добавить аксиому о существовании транзитивного замыкания любого множества.

логичные оправдания (или опровержения) сейчас находятся в стадии разработки. Заметим, что для операций, рассмотренных в приводимой ниже в §3 теории T_0, расширяющей KP_0, можно дать, по крайней мере интуитивное обоснование, что они в самом деле не используют потенциальную осуществимость. Однако иначе обстоит дело с операцией степени множества, описываемой Δ-аксиомой $t \in 2^a \leftrightarrow t \subseteq a$. Так, на первый взгляд, эта операция состоит в собирании на некотором фиксированном "шаге" в с е х подмножеств данного множества a, которые были и будут построены посредством различных рассматриваемых теоретико-множественных операций на всех прошлых и будущих "шагах". (Относительно "пошагового" построения универсума см. [19,20].) Вероятно, лучше сказать, что 2^a является не множеством, а только "резервуаром", постепенно заполняемым строящимися подмножествами множества a. Но такое понимание 2^a все же представляется неполным и довольно проблематичным. Единственное известное автору удовлетворительное, "предикативное" (в традиционном смысле) объяснение операции степени множества, причем только в контексте теории конечных множеств, опирается на абстракцию потенциальной осуществимости, например, через теорию натуральных чисел, в которой можно кодировать наследственно-конечные множества, и особенно через существенное использование практически неосуществимой, но осуществимой потенциально экспоненциальной функции 2^n, $n = 0,1,2,\ldots$

Потенциальная осуществимость арифметической экспоненты обосновывается тем, что она есть итерация операции умножения, которая, в свою очередь, представляет собой итерацию операции сложения, являющейся, наконец, итерацией операции следования. Таким образом, а б с т р а к ц и я п о т е н ц и а л ь н о й о с у щ е с т в и м о с т и с о с т о и т н е т о л ь к о в о т в л е ч е н и и о т р е с у р с н ы х г р а н и ц, н о и в н е о г р а н и ч е н н о й и т е р а ц и и э т о й н а ш е й с п о с о б н о с т и. Что касается сложения и умножения, то, например, постулирование существования произведения $m \cdot n^2$ натуральных чисел m,n означает всего лишь некоторую достаточно безобидную (по существу, не использующую эту абстракцию) "легализацию" обычного метаматематического рассмотрения сразу трех переменных x и y_1, y_2, пробегающих конечные множества соответственно из m и n элементов. Кстати, это ключ к пониманию связи между п о л и н о м и а л ь н о й вычислимостью и идеей релятивизации к ресурсным границам.

Поскольку в данной статье потенциальная осуществимость не допускается, то мы не можем здесь считать "обоснованной" операцию степени для конечных (и бесконечных) множеств. Заметим также, что проблема элиминации, или "конструктивного" истолкования соответствующих кванторов $\forall x \subseteq a$ и $\exists x \subseteq a$, по существу, является другой формой известной проблемы "P = NP?" (см. также [3]).

Теорема 2 основана на следующем (имеющем и самостоятельное значение) понятии <u>редукции</u> формул, содержащих т о л ь к о теоретико-множественные операции теории KP_0. Сначала перечислим атомарные редукционные шаги:

$$s \in t \mapsto \exists x \in t(s = x), \text{ если } s \text{ не является переменной;}$$
$$s \in \{t_1, t_2\} \mapsto s = t_1 \vee s = t_2 \ ;$$
$$s \in \cup\{t | x \in a \wedge \varphi\} \mapsto \exists x \in a(\varphi \wedge s \in t);$$
$$\exists x \in \{t_1, t_2\} \phi \mapsto \phi_x[t_1] \vee \phi_x[t_2];$$
$$\exists x \in \cup\{t | y \in a \wedge \varphi\} \phi \mapsto \exists y \in a(\varphi \wedge \exists x \in t \phi);$$
$$\forall x \in \{t_1, t_2\} \phi \mapsto \phi_x[t_1] \wedge \phi_x[t_2];$$
$$\forall x \in \cup\{t | y \in a \wedge \varphi\} \phi \mapsto \forall y \in a(\varphi \supset \forall x \in t \phi).$$

Вообще положим $\varphi_1 \mapsto \varphi_2$, если от φ_1 можно перейти к φ_2 за конечное число шагов последовательной замены подформул, имеющих вид левых частей атомарных редукционных шагов, на соответствующие правые части.

ТЕОРЕМА 2'. О т н о ш е н и е р е д у к ц и и $\mapsto$ о б л а д а е т с в о й с т в о м Ч ё р ч а - Р о с с е р а, т.е. и з $\varphi \mapsto \varphi'$, $\varphi \mapsto \varphi''$ с л е д у е т $\varphi' \mapsto \varphi^*$ $\varphi'' \mapsto \varphi^*$ д л я н е к о т о р о й ф о р м у л ы φ^*.

ТЕОРЕМА 2". О т н о ш е н и е р е д у к ц и и $\longmapsto$ о б л а д а е т н о р м а л и з а ц и о н н ы м с в о й с т в о м.

Это означает, что любая формула φ (соответственно Δ-формула) редуцируется к формуле φ_0, находящейся в нормальной форме, т.е. к такой единственной[x)] в силу свойства Чёрча-Россера формуле (соответственно Δ_0-формуле), к которой не применим ни один из атомарных шагов редукции. В частности, поскольку $\varphi_1 \mapsto \varphi_2$, очевидно, влечет $KP_0 \vdash \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$, каждая Δ-формула φ эквивалентна своей нормальной форме $\varphi_0 \in \Delta_0$. Именно эта интерпретация $\varphi \mapsto \varphi_0$ языка Δ в языке Δ_0 подразумевалась в теореме 2.

---

x) Как обычно, формулы и термы мы рассматриваем с точностью до переименования связаных переменных.

Понятно, что редукция $\rightarrowtail$ может быть использована для вычисления истинностных значений Δ-формул, подобно хорошо известному редукционному процессу вычисления значений (типизированных) λ-термов. Конечно, должна быть исследована и сложность этого процесса. Заметим, что доказательство теорем 2' и 2" проводятся аналогично доказательствам соответствующих теорем в (типизированном) λ-исчислении.

Обратим внимание на то, что в термах нашего языка пока не участвует рекурсия, точнее индуктивные определения. Один способ ее ведения состоит в усилении теории KP_0, обеспечивающем выполнение в ней теоремы Ганди [12] или хотя бы ее ослабленного варианта. Но этот путь пока что приводит к слишком сильной теории (см. [15,16]). Другой путь, интуитивно согласующийся с принятой здесь установкой не использовать абстракцию потенциальной осуществимости, намечен в следующем параграфе.

§3. Полиномиальная вычислимость в терминах ограниченной теории множеств

Зададим теорию T_0, добавив к теории KP_0 следующие три новые операции и четыре Δ-аксиомы:

операцию транзитивного замыкания: $TC(x)$ – наименьшее транзитивное множество[x)], содержащее x;

оператор рекурсивного Δ-выделения: $[\mu r = \{x \in a \mid \varphi[x,r]\}]$ – наименьшее м н о ж е с т в о r (из подразумеваемого универсума), которое удовлетворяет равенству $r = \{x \in a \mid \varphi[x,r]\}$, где $\varphi[x,R] \in \Delta(R^{+})$ и R – новый одноместный предикатный символ, входящий в φ позитивно.

Заметим, что в случае конечного множества a для нахождения наименьшего такого r нужно лишь дождаться стабилизации последовательности $\emptyset \rightleftharpoons r_0 \subseteq r_1 \subseteq \ldots \subseteq r_n \subseteq r_{n+1} \rightleftharpoons \{x \in a \mid \varphi[x, r_n]\} \subseteq \ldots$ $\ldots \subseteq a$, которая наступит хотя бы при $n = 1 +$ мощность a;

операцию коллапс: $C(r,x) = \{C(r,y) \mid \langle y,x \rangle \in r \wedge \forall \langle y', x \rangle \in r(C(r,y') \neq \emptyset \vee y' - r$ – минимально$)\}$;

аксиому фундирования для множеств:

$$a \neq \emptyset \rightarrow \exists x \in a \ \forall y \in x \ (y \notin a).$$

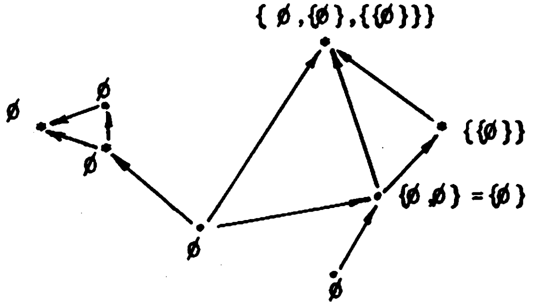
x) Множество a транзитивно, если выполняется $\forall x \in a \ \forall y \in x (y \in a)$. Поэтому $TC(x)$ состоит из элементов множества x, элементов этих элементов и т.д.

Заметим, что благодаря TC последняя аксиома эквивалентна правилу $\in$-Δ-индукции. В теории T_0 доказуемо, что все ее операции определены однозначно. Естественной моделью для T_0 является так называемый "стандартный" универсум HF наследственно-конечных множеств [12,13].

ТЕОРЕМА 3 [1]. Одноместные термальные операции теории T_0, или, эквивалентно, Σ_{T_0}-операции, дают в точности все операции f: HF $\to$ HF, вычислимые за полиномиальное время.

Ключом к теореме служит (экономное) представление произвольного множества $x \in$ HF посредством конечной модели $G(x) \rightleftharpoons \langle TC(x);\ \in\upharpoonright TC(x),\ x \rangle$, где $\in\upharpoonright TC(x)$ и $x \subseteq TC(x)$ рассматриваются соответственно как бинарный и унарный предикаты на $TC(x)$.

Другими словами, x кодируется графом $G(x)$ ($\in$ HF) с некоторыми помеченными вершинами. Фактически любой (конечный и необязательно фундированный) граф $\langle a;\ r, b\rangle$ с множеством дуг $r \subseteq a \times a$ и множеством $b \subseteq a$ помеченных вершин задает некоторое множество $S(\langle a;\ r, b\rangle) \rightleftharpoons \{C(r,y) \mid y \in a\}$ из HF. Здесь каждой вершине y графа r поставлено в соответствие множество $C(r,y)$ с помощью функции, рекурсивное определение которой было приведено выше в виде аксиомы. Напрмер, операция S переводит



во множество $\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}\}\}$.

В теории T_0 легко выводимо, что $S(G(x)) = x$. Таким образом, аксиомы о коллапсе и транзитивном замыкании выражают некоторое истолкование или семантику понятия множества, а именно: множество - это граф, дуги которого воспринимаются как отношение принадлежности.

При таком представлении множеств вычисление функции f: $HF \to HF$, например на машине Тьюринга, состоит в вычислении по произвольному помеченному графу $\langle a; r,b\rangle$ (заданному, например, своей матрицей инцидентности) какого-нибудь графа, представляющего множество $f(S(\langle a; r,b\rangle))$. Так, вычисление операции $TC(x)$ сводится просто к распространению пометок на все вершины графа $\langle a; r,b\rangle$, задающего множество x, из которых ведет путь в какую-нибудь ранее помеченную вершину (из b). Несколько сложнее, но также за полиномиальное время вычислимы и остальные операции теории T_0. Конечно, без указания способа представления множеств (на ленте машины Тьюринга) теорема 3, точнее термин "вычислимость за полиномиальное время", не имеет смысла.

Обратно, термальное представление произвольной полиномиально вычислимой, в указанном выше смысле, функции f: $HF \to HF$ можно получить как композицию $S \circ \tilde{f} \circ G$, где $\tilde{f}$: $HF \to HF$ - подходящая функция, преобразующая графы (т.е. множества из HF специального вида) в графы и вычислимая за полиномиальное время, как функция на графах. Учитывая существование на HF термально выразимого (и значит, полиномиально вычислимого) линейного порядка, требуемую функцию $\tilde{f}$ можно выразить, используя оператор рекурсивного Δ-выделения (наподобие [2,4-8], где использовались рекурсивные или индуктивные определения в конечной области).

Действительно, линейный порядок фиксирует расположение или нумерацию вершин графа. Тем самым матрица инцидентности данного графа может быть рассмотрена как функция g: $\omega_n^2 \to \omega_n$, где $\omega_n = \{0, 1, \ldots, n\}$ - номера вершин графа в естественном порядке. В силу полиномиальной вычислимости $\tilde{f}$ число вершин результирующего графа $\tilde{f}_{g,n}$ будет $\le (n+1)^k$ для некоторого фиксированного числа $k(f)$. Поэтому $\tilde{f}_{g,n}$ можно рассмотреть как функцию $\omega_n^{2k} \to \omega_n$. Как показано в [2], любую функцию $F_{g,n}$ в "конечном натуральном ряде" ω_n полиномиально вычислимую относительно функциональной переменной g (и относительно n) можно задать с помощью обычных рекурсивных определений (или схемы рекурсивного Δ-выделения), в которых участвуют функция g, константа 0 и естественная операция следования $x \dot{+} 1$ на ω_n ($n \dot{+} 1 \doteq n$ или $n \dot{+} 1 \doteq 0$).

Тем самым, кстати, полиномиальная вычислимость оказывается прямым ана -

логом обычного понятия относительной вычислимости и может быть охарактеризована как вычислимость релятивизованная к ресурсным границам. В пользу последнего тезиса говорят также другие вариации [4–8] определения вычислимости в ω_n и приведенная теорема 3, в которой представлена более общая трактовка идеи релятивизации к рекурсным границам.

Как мы видели, весьма существенным моментов в теореме 3 было кодирование множеств графами. Другие подходы, более привычные в связи с HF, не приводят к успеху. Так, в [12] рассматривается представление $e: \omega \to HF$ наследственно-конечных множеств натуральными числами:

$$e(2^{n_1} + 2^{n_2} + \ldots + 2^{n_k}) = \{e(n_1), e(n_2), \ldots, e(n_k)\},$$

где $n_1 > n_2 > \ldots > n_k$. Однако при этом такая простая операция, как взятие синглетона $\{x\}$, будет задаваться арифметической экспонентой 2^n. Таким образом, ни о какой полиномиальной вычислимости здесь речи быть не может.

Имеется еще одно естественное кодирование множеств правильными скобочными выражениями (например, $\{\} = \emptyset, \{\{\}\{\{\}\}\} = \{\{\{\}\}\{\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$). Но оно тоже не вполне удовлетворительно, поскольку при этом представление ординала n потребовало бы экспоненциального ($> 2^n$) числа скобок[x)]. Впрочем, не исключено, что важность (традиционного определения) ординалов несколько преувеличена, и скобочное кодирование множеств, вероятно, может также привести к теореме, аналогичной приведенной выше. Так, с операциями $\{x\}$, $TC(x)$ здесь все обстоит хорошо.

Наконец, множества можно кодировать термами, например, теории T_0.

Заметим, что в качестве модели теории T_0 совсем не обязательно брать HF. Можно рассматривать нестандартные универсумы наследственно-конечных множеств или даже универсумы, удовлетворяющие аксиоме бесконечности (например, универсум для ZF). Понятно, что наше определение полиномиальной вычислимости в теоретико-множественных терминах автоматически переносится (или обобщается) на любой из этих универсумов. "Полиномиальная" вычислимость в универ-

[x)] Напомним определение конечных ординалов: $0 \rightleftharpoons \emptyset$, $n+1 \rightleftharpoons n \cup \{n\}$.

суме, содержащем ординал ω, требует, конечно, отдельного рассмотрения.

Завершим этот параграф несколькими замечаниями об ограниченной теории множеств, как о возможном основании математики. Если $T \supseteq T_1 \rightleftarrows [T_0 +$ подходящая форма аксиомы о конечности всех множеств универсума$]$, то в заключении п. "а" теоремы I можно соответственно гарантировать даже выводимость $\varphi[\bar{x}, t[\bar{x}]]$ для некоторого терма t. Это означает, что в определенном смысле T_1 - к о н с т р у к т и в н а я теория. Заметим, что аксиома степени $\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$ не доказуема в T_1 (T_0). Эта аксиома, очевидно, привела бы к э л е м е н т а р н о й в ы ч и с л и м о с т и по Кальмару. Однако введение операции степени множества 2^x или даже некоторых констант (и аксиом) для "больших" или бесконечных множеств таких, как ω или некоторая транзитивная модель для KP_0 или ZF и т.п., не меняет Δ-характера всей системы в целом. Такой подход к теории множеств представляется более естественным, по сравнению с традиционным.

Все же мы считаем более последовательным строить "основания" в виде в а р и а н т а а л ь т е р н а т и в н о й т е о р и и м н о ж е с т в П.Вопенки [29] на основе, например, теории $[T_1 +$ отрицание аксиомы степени множества$]$, помещая бесконечность не "за", а "между" конечным и переходя тем самым к идеям и методам н е с т а н д а р т н о г о а н а л и з а (актуальных бесконечно малых и бесконечно больших величин). Дело в том, что традиционное введение бесконечности путем постулирования множества ω всех конечных ординалов свидетельствует о принятии абстракции не только актуальной бесконечности, но и (что для нас особенно важно) потенциальной осуществимости, правда, только по отношению к конечному.

Кстати, именно ничем не ограниченная абстракция потенциальной осуществимости представляется нам повинной в парадоксе Рассела, основанном на не ограниченной никакими "ресурсами" операции выделения $\{x \mid \ldots x \ldots\}$. Хорошее основание математики должно, помимо устранения явных парадоксов и отражения математической практики, опираться на ясные принципы, чего не скажешь с достаточной определенностью о ZF (см. [20]). Так, операция выделения ограничена в ZF весьма искусственно, по существу, с одной лишь целью избежать противоречий.

Сказанное выше ни в коей мере не исчерпывает всех аспектов проблемы построения и исследования оснований математики, не использующей абстракции потенциальной осуществимости. Например, конечные объекты (в данном случае множества) можно, в отличие от традиционной математики, четко подразделять на к о н с т р у к т и в н ы е и н е к о н с т р у к т и в н ы е [3]. Заметим, что при наличии аксиомы об осуществимости экспоненты (или аксиомы степени множества) каждый конечный объект оказался бы конструктивным.

В рамках рассматриваемой нами безэкспоненциальной математики (плюс лемма Кёнига; см. [31]) несколько иначе, чем обычно, стоит и в о п р о с о п о л н о т е л о г и к и п р е д и к а т о в. А именно, он я в л я е т с я о т к р ы т ы м, так как обычные доказательства здесь не проходят. Более того, в определенном смысле этот вопрос эквивалентен нерешенной проблеме теории сложности "coNP = NP?" [31]. Это свидетельствует о гораздо более фундаментальной связи теории сложности с основаниями математики, чем это может показаться.

Заранее нельзя предсказать, какие еще "нестандартные" вопросы и постановки могут здесь возникнуть. По-видимому, можно надеяться, что в рассматриваемом подходе затрагивается основная причина появления теории сложности вычислений и алгоритмов (а именно понимание чрезмерности вышеупомянутой абстракции) и что на каком-то этапе осознания всех обстоятельств, связанных с неиспользованием этой абстракции, будет создан математический аппарат, необходимый для решения известных трудных проблем теории сложности (см. также [3]). Другими словами, наша гипотеза состоит в том, что эти проблемы потому и не удается решить, что есть еще более важная методологическая проблема абстракции потенциальной осуществимости, которую теория сложности почему-то обходит стороной. Впрочем, подобные исследования по духу и методам ближе к основаниям математики, чем собственно к теории сложности.

§4. Ограниченная теория множеств и Δ-программирование

Мы уже видели, что ограниченная теория множеств, как и любая математическая дисциплина, состоит из соответствующих теоретико-множественных построений и доказательных умозаключений относительно этих построений. Рассматриваемые здесь построения в виде соответствующих термов могут привести, по крайней мере в принципе, к некоторому языку программирования, а сама ограниченная теория множеств (с праэлементами) – к языку спецификаций задач и программ. Реализационные аспекты такого (гипотетического) Δ-программирования требуют, конечно, специального теоретического и практического исследований. В этой связи отметим лишь, что теоремы 2' и 2" о редукции Δ-формул и теорема 3 о полиномиальной вычислимости термов (т.е. Δ-программ), основанная на представлении множеств в виде графов, могли бы послужить теоретической базой для соответствующих двух видов реализации – синтаксического и семантического (или даже смешанного) типов.

Естественно рассматривать Δ-программирование в связи с известной концепцией логического (а лучше сказать, логико-математического) программирования в широком смысле слова, а более конкретно, в контексте Σ-программирования [21–26, 15,16] и теории баз данных [27,28, 4–10].

Также как и ограниченная теория множеств, Σ-программирование, идейно основано на теории Крипке-Платека, причем главную роль в нем играют Σ-формулы и теорема Ганди о Σ-определимости наименьшей неподвижной точки $P(x) \longleftrightarrow \varphi[x,P]$, где $\varphi \in \Sigma(P^+)$, P – предикатная переменная и x пробегает в е с ь универсум (в отличие от рекурсивного Δ-выделения).

Однако при переходе к Δ-языку возникают принципиально новые обстоятельства и постановки вопросов. Связь Δ-программирования с Σ-программированием осуществляется посредством теоремы I,"a", позволяющей синтезировать Δ-программу $t[\bar{x}]$ по "доказанной" Σ-программе (или Σ-спецификации) $\exists y\, \varphi\, [\bar{x}, y]$. Эффективность такого синтеза основана на извлекаемой из доказательства теоремы I л и н е й н о й в е р х н е й о ц е н к е длины записи терма $t[\bar{x}]$ от числа не-Δ-секвенций древовидного LKΣ-вывода $T \vdash \exists y\, \varphi\,[\bar{x},y]$.

Заметим также, что теорему Ганди не удается доказать в предложенной здесь ограниченной теории множеств или обосновать возможность присоединения ее в качестве постулата или соответствующей программной конструкции. Последнее скорее всего привело бы к "примитивно-рекурсивной" вычислимости в универсуме множеств, гораздо более сильной, чем полиномиальная вычислимость (см.в связи с этим [15,16]), и неприемлемой с точки зрения релятивизации к ресурсным границам.

С другой стороны, в ряде работ [4–10] по теории реляционных баз данных сформировался подход, основанный на обычном понятии конечной модели первого порядка как состояния базы данных и на понятии индуктивной или рекурсивной определимости в таких моделях, как важнейшей конструкции языка запросов к базе данных. Оказалось, что в таких языках описываются в точности полиномиально вычислимые запросы. Тем самым было достигнуто определенное понимание того, что такое достаточно выразительный и адекватный понятию "база данных" язык запросов.

Аналогичный математический результат в терминах рекурсии в "конечном натуральном ряде" без привязки к базам данных, но в контексте отрицания абстракции потенциальной осуществимости был получен несколько ранее в [2, 3]. По-видимому, правильная точка зрения на сложившуюся ситуацию состоит в том, что здесь происходит один из моментов синтеза оснований математики, теории сложности и программирования. Это особенно ярко видно при переходе от отдельных конечных моделей или состояний баз данных к единой о г р а н и ч е н н о й теории конечных множеств.

Наследственно-конечные множества позволяют моделировать состояния (вообще говоря, "иерархических") реляционных баз данных, а Δ-программы выступают в роли языка запросов или манипулирования данными. Ограниченные кванторы и рекурсивное Δ-выделение соответствуют кванторам и индуктивным определениям, релятивизованным к конечным моделям. При такой интерпретации универсума множеств как совокупности всех мыслимых состояний всевозможных баз данных неограниченный квантор существования привел бы к инициализации неограниченного поиска среди всех состояний, возможно, даже не относящихся к одной базе данных. Для языков же запросов характерен поиск данных внутри какого-то одного "текущего" конечного состояния базы.

Вообще, видимо, можно признать достаточно широким и естественным взгляд на программирование как на технику манипулирования конечными базами данных. Другими словами, речь идет о (полном или частичном) отказе в программировании от идеи потенциальной бесконечности в пользу релятивизации построений к ресурсным границам. Эти границы возникают на каждом шагу и в традиционном программировании, например, в виде сигнала о переполнении памяти. Причем, этот сигнал адресован программисту, а не машине. Представляется интересным (и, возможно, более предпочтительным) д р у г о й способ работы с ограниченной памятью: заранее указывается граница (или конечный универсум состояния базы данных), в пределах которой будет вестись вычисление, а фактически манипулирование только тем, что "дано" или хранится в этом участке памяти. Причем в программе явно указывается, что делать при достижении границы. Тем самым ресурсная граница оказывается вполне рядовым и автоматически контролируемым явлением, в отличие от традиционного программирования, а также средством упреждения обычного, "неожиданного" переполнения памяти.

В тех же случаях, когда в программировании мы все-таки используем "неограниченные" средства, нами скорее движет традиционное математическое мышление, представление о некотором воображаемом довольно фантастическом "мире", пусть даже и формально конечных объектов (взять хотя бы конечность числа 2^{1000}). Причем, несмотря даже на широкую известность теоремы Гёделя, здесь возникает чрезвычайно сильная иллюзия (но всего лишь иллюзия) полной определенности, однозначности и даже реальности. И если при этом все же получается реально действующая программа, то скорее вопреки, а не благодаря такому подходу. Просто это может означать, что ресурсные границы подразумевались как-то неявно (ср. с теоремой I,"а").

Впрочем, языки запросов к конечным базам данных, Δ-программирование и полиномиальная вычислимость тоже не являются гарантией реальной осуществимости. Но они, на наш взгляд, все же лучше отвечают духу требуемых на практике вычислений.

Что касается логического характера языков запросов и Δ-программ, отметим следующее. Языки запросов, как они представлены в [4-II], являются расширением логики первого порядка, например оператором неподвижной точки. Поскольку речь идет об интерпретации таких логических языков на конечных моделях, это, казалось бы, приводит к вопросу (или к ответу на него) об адекватной "логике конечного" [9]. Но термин "логика" здесь несколько дезориентирует, поскольку подразумевает некоторое исчисление вроде интуиционистской или какой-то другой более подходящей логики, а на самом деле имеется в виду не дедуктивное исчисление, а логический язык как средство описания запросов к конечным моделям. Разумеется, возникают и другие, связанные с конечностью модели, интересные и пока еще мало разработанные вопросы соответствующего логического аппарата [9]. Однако утверждение из [9], что обычный язык логики первого порядка хорошо подходит лишь для описания бесконечных моделей, в данном контексте (вычислимости и программирования) также не вполне соответствует действительности. Ведь точно такое же расширение этого языка индуктивными определениями уже приходилось рассматривать ранее как раз в связи с бесконечными моделями при построении соответствующей теории обобщенной вычислимости (см. [II]).

Другими словами, дело здесь не столько в логике, сколько в специфике программирования вычислений, релятивизованных к конечным областям. Например, в [2] и [8] без какой-то особой логики рассматривались рекурсивные функции в конечном отрезке натурального ряда. Аналогично Δ-программы являются скорее математическими (а именно теоретико-множественными), чем логическими программами. И соответственно вопрос стоит не о логике конечного, а об основаниях конечной математики. При этом достаточно хорошо (но только пока хорошо!) служит традиционная логика, которая использовалась и для построения бесконечной математики.

Наконец, отметим реальный язык программирования СЕТЛ [30], также основанный на понятии конечного множества. Как и в KP_0, в нем используются только ограниченные кванторы и теоретико-множественная операция $\{t[x] | x \in a \wedge \varphi[x]\}$. Однако в СЕТЛе нет соответствующей общей операции объединения и, главное, индуктивных определений, вроде рекурсивного Δ-выделения, а его "процедурная" часть содержит обычные для процедурных языков "неограниченные" средства такие, как циклы (с произвольной вложенностью). Кроме того, непонятно, какую именно т е о р и ю множеств можно было бы положить в основу этого языка. В [30] также приведены оптимизирующие преобразования СЕТЛ-программ, напоминающие наши редукции. А сам язык СЕТЛ рассматривается в роли "адекватного единого средства поддедржки всех аспектов работы с базами данных" ([30,с.147]).

Автор выражает благодарность В.Н.Агафонову, Н.В. Белякину, С.С.Гончарову и А.Б.Ливчаку за полезные замечания по тексту статьи и стимилирующие обсуждения.

Л и т е р а т у р а

I. САЗОНОВ В.Ю. Ограниченная теория множеств и полиномиальная вычислимость // Всесоюз. конф. по прикладной логике, Новосибирск, окт. 1985 г.: Тез.докл. - Новосибирск,1985. - С. 188-191.

2. SAZONOV V.Yu. Polynomial computability and recursivity in finite domains// Elektronische Informationsverarbeitung und Kybarnetik.- 1980.- V.16,N 7.- P.319-323.

3. SAZONOV V.Yu. A logical approach to the problem "P=NP?" // Mathematical foundations of Computer Science: Proc./9th Symp. Rydzyna, Poland, sept.1980.- Berlin a.o.: Springer,1980.- P.562-575. - (Lecture Notes in Comuter Science; 88). (Важное исправление к этой статье приведено на с.490 в [31].)

4. ЛИВЧАК А.Б. Язык полиномиальных запросов //Расчет и оптимизация теплотехнических объектов с помощью ЭВМ.-Свердловск,1982. - С. 41.

5. Его же. Полиномиальные запросы к реляционным базам данных //Программирование. - 1985, № 2. - С. 66-72.

6. IMMERMAN N. Relational queries computable in polynomial time// Proc. 14th ACM Symp. on Theory of Computing. - 1982. - P.147-152.

7. VARDI M. Comlexity of relational query languages//Proc. 14th ACM Symp.on Theory of Computing.-1982.-P.137-146.

8. GUREVICH Y. Algebras of feasible functions// Proc. 24th IEEE Conf.on Found.of Computer Sci., Tucson.-1983.- P.210-214.

9. GUREVICH Y. Toward logic tailored for computational complexity// Computation and proof theory, Part II: Proc./Logic Colloquium.,Aachen,1983.- Berlin: Springer,1984.-P.175-216.

10. СТОЛБОУШКИН А.П., ТАЙЦЛИН М.А. Динамические логики //Кибенрнетика и вычислительная техника.-М., 1986.-Вып.2. -С.180-230.

11. MOSCHOVAKIS Y.N. Abstract recursion as a foundation for theory of algorithms// Computation and proof theory, Part II:Proc/ Logic Colloquium. Aachen,1983.- Berlin: Springer,1984.- P. 289 - 364.- (Lecture Notes in Mathematics; 1104).

12. BARWISE J. Admissible sets and structures.- Berlin: Springer, 1985.

13. МАККАИ М. Допустимые множества и бесконечная логика//Справочная книга по математической логике. -М., 1982. - Ч.I.-С.235-288.

14. ЕРШОВ Ю.Л. Принцип Σ-перечисления //Докл. АН СССР.-1983. - Т.270, №4. - С. 786-788.

15. САЗОНОВ В.Ю. Теорема Ганди. с предикатными параметрами //Тез. докл. 8 Всесоюз. конф. по математической логике. Москва, сент., 1986 г. - М., 1986. - С. 167.

16. Его же. Бестиповое исчисление Σ-выражений и теория Крипке-Платека с классами //Прикладная логика.- Новосибирск, 1986. - Вып. 116: Вычислительные системы. - С. 80-100.

17. Его же. Принцип коллекции и квантор существования //Логико-математические проблемы МОЗ. - Новосибирск, 1985. -Вып.107: Вычислительные системы. - С. 30-39.

18. ТАКЕУТИ Г. Теория доказательств. - М.: Мир, 1978.

19. ШЕНФИЛД Дж.Р. Аксиомы теории множеств //Справочная книга по математической логике. - М., 1982. - Ч. II. - С. 9-34.

20. САЗОНОВ Ю.В. Об аксиомах теории множеств //Логика и системные методы анализа научного знания. Тез.докл. - М., 1986. - С. 46-48.

21. ЕРШОВ Ю.Л. Динамическая логика над допустимыми множествами //Докл. АН СССР. - 1985. - Т.273, № 5, - С.1045-1048.

22. Его же. Язык Σ-выражений //Логические вопросы теории типов данных.-Новосибирск, 1986. - Вып. 114: Вычислительные системы. - С. 3-10.

23. ГОНЧАРОВ С.С., СВИРИДЕНКО Д.И. Σ-программирование //Логико-математические проблемы МОЗ. - Новосибирск, 1985. - Вып.107: Вычислительные системы. - С.3-29.

24. GONCHAROV S.S., ERSHOV Yu.L., SVIRIDENKO D.I. Semantic programming // Information Processing'86, H.J.Kugler (ed.), Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland),1986.-P.1093-1100.

25. ЕРШОВ Ю.Л. Σ-предикаты конечных типов над допустимыми множествами //Алгебра и логика. - 1985. - Т.24, № 5. - С.563-602.

26. САЗОНОВ В.Ю., СВИРИДЕНКО Д.И. Денотационная семантика языка Σ-выражений //Логические вопросы теории типов данных. - Новосибирск, 1986. - Вып.114: Вычислительные системы. - С.18-38.

27. CODD E.F. Relational completeness of data base sublanguages// Data basesystems. - N.J.: Prentice-Hall.,1972.-P.65-98.

28. УЛЬМАН Дж. Основы системы баз данных. - М.: Финансы и статистика, 1983. - 334 с.

29. ВОПЕНКА П. Математика в альтернативной теории множеств.- М.: Мир, 1983. - 152 с.

30. ЛЕВИН Д.Я. Язык сверхвысокого уровня СЕТЛ и его реализация (для ЭВМ БЭСМ-6). - Новосибирск: Наука, Сиб.отд-ние, 1983. - 160 с.

31. SAZONOV V.Yu. On existence of complete predicate calculus in metamathematics without exponentiation// Mathematical Foundations of Computer Science: Proc./ 10th Symp. Strbské Pleso, Czechoslovakia, sept.1981.- Berlin a.o.: Springer,1981.- P.483-490.-(Lecture Notes in Computer Science; 118).

32. Mycielski J. Analysis without actual infinity// J.Symbol. Log,-1981.-V.46.-P.625-633.

Поступила в ред.-изд.отд.
13 марта 1987 года