ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ
(Вычислительные системы)
1987 год Выпуск 122

УДК 517.15

МЕТАРЕКУРСИВНОСТЬ АВТОНОМНЫХ НУМЕРАЦИЙ

А.Н. Гамова

Обобщение теории рекурсии на бесконечные ординалы и понятие допустимого ординала появились впервые в работах Крипке [1] и Платека [2]. Крипке берет за универсум начальный отрезок ординалов до α и рассматривает на нем ординальные функции. Кладя в основу эрбран-гёделевское исчисление равенств с правилами R1 и R2, он добавляет к ним правило R3 (введение ограниченных кванторов по ординалам, меньшим некоторого ординала $\beta < \alpha$), выражающее основную идею обобщения - допущение $\beta < \alpha$ шагов в вычислениях и использование $\beta < \alpha$ единиц информации на каждом шаге. Удовлетворяющие этим условиям ординальные функции называются α-рекурсивными. Ординал α, для которого может быть развита теория α-рекурсии, сохраняющая основные моменты обычной теории рекурсии на натуральных числах, Крипке назвал допустимым ординалом. Таким образом, ординал α допустимый, если каждое вычисление значений α-рекурсивной функции по правилам R1-R3 заканчивается за $\beta < \alpha$ шагов и все используемые параметры γ меньше α. Из определения метарекурсии следует, что допустимые ординалы являются конструктивно регулярными, т.е. служат аналогами регулярных ординалов, так как для любой α-рекурсивной тотальной функции φ для допустимого ординала α $\lim\limits_{\zeta<\beta<\alpha} \varphi(\zeta)<\alpha$. В работах Рихтера [3,4] были построены метарекурсивные аналоги больших кардиналов - конструктивно недостижимых и ординалов Мало.

Крайзель и Сакс [5] строят метарекурсию до первого нерекурсивного ординала ω_1 (являющегося первым допустимым ординалом, большим ω), вводя однозначную Π_1^1-нумерацию Q ординалов до ω_1. Метарекурсивными аналогами перечислимых и разрешимых множеств здесь служат соответственно Π_1^1-подмножества Q и Π_1^1-подмножества, имеющие Π_1^1-дополнения в Q. В качестве аналогов конечных подмножеств берутся Δ_1^1-подмножества Q, что эквивалентно ω_1-рекурсивности и ω_1-ограниченности (последнее означает, что все элементы данного подмножества ординалов не превосходят некоторого γ, меньшего ω_1).

При построении метарекурсии Крайзель и Сакс существенным образом используют свойства самой нумерации Q, которая оказывается одно-однозначной тотальной ω_1-рекурсивной функцией из ω_1 в ω. У Крипке это соответствует проектируемости ординалов в ω. Однако ввиду того, что проектируемость в ω имеет место для очень больших допустимых ординалов (значительно больших первого ординала Мало), то это обстоятельство не сказывается на общности построенной метарекурсии, которая переносится на весь класс допустимых ординалов, проектируемых в ω.

Поскольку результаты Крайзеля-Сакса допускают изложение на языке вычислений с гиперарифметическим оракулом H_E (реализующим клиниевскую вычислимость относительно джамп-операции [6]), ввиду того, что для них есть однозначная H_E-рекурсивная нумерация начального отрезка ординалов до $|T(H_E)|$, представляется интересным воспроизвести метарекурсию с произвольным (достаточно хорошим) оракулом F.[x)] Главная привлекательность состоит в возможности использования техники вычислений на машинах Тьюринга с частичным оракулом F в рамках метарекурсивной теории. В каком объеме это допустимо, зависит от эквивалентности понятий $|T(F)|$-рекурсивности и F-вычислимости. Для слабо фундированного и регулярного оракула F (определение см. в §I) метарекурсия на ординале $|T(F)|$ может быть построена на языке F-вычислений. При условии, что оракул F $|T(F)|$-рекурсивен, классы F- и $|T(F)|$-вычислимых функций совпадают, в противном случае второй содержится в первом.

§I. Некоторые сведения об F-вычислениях

Машина Тьюринга с частичным оракулом F имеет такую особенность, что может "застрять", т.е. не получить ответ оракула, в этом случае результат считается неопределенным. Понятия F-вычислимой функции и F-разрешимого множества определяются естественным образом. В качестве F-перечислимых множеств берутся области опре -

---

x) $|T(F)|$ есть длина отрезка F-вычислимых ординалов для произвольного оракула F.

деления F-вычислимых функций. Через $B^*(F)$ обозначаются коды F-вычислимых тотальных функций, а через $T(F)$ – код характеристических функций F-вычислимых деревьев с обрывом всех цепей (F-вычислимых ординалов); $|z|$ есть ординал с $T(F)$-кодом z, тогда $|T(F)| = \sup\{|z|: z \in T(F)\}$.

Если $T(F)$ F-перечислимо, то оракул F называют слабо фундированным. Функционал типа 2 F-вычислим, если его значения эффективно и равномерно находятся по F-кодам его аргументов. Если функционал E (джамп)[x] F-вычислим, то оракул F называют преднормальным. Способность оракула F эффективно выбирать элемент из непустого F-перечислимого множества называют регулярностью. Легко доказываются следующие утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Из слабой фундированности и регулярности оракула F следует его преднормальность.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Для преднормального оракула F, если $R(x,y)$ – F-перечислимый предикат, а $P(x)$ – F-разрешимый, то предикат $\forall x(P(x) \to R(x,y))$ F-перечислимый.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Со слабо фундированным и регулярным оракулом F множество обозначений конструктивного ординала $|z|$ $\{y \in T(F): |y| = |z| \wedge z \in T(F)\}$ F-перечислимо равномерно по z.*

Оракулами, реализующими вычислимость относительно джамп-операции, являются оракулы $H_{E,\beta}$ релятивизованной клиниевской вычислимости относительно E,β. Если $H^0_{E,\beta} = \emptyset$ и оракулы $H^\gamma_{E,\beta}$ уже построены, то $H^{\gamma+1}_{E,\beta}(2^t) = \beta(t)$; $H^{\gamma+1}_{E,\beta}(5^y) = E(\lambda t\{y\} H^\gamma_{E,\beta}(t))$, где $y \in B^*(H^\gamma_{E,\beta})$; $H^\lambda_{E,\beta} = \bigcup_{\gamma<\lambda} H^\gamma_{E,\beta}$ для предельных λ. Построенная по трансфинитной индукции последовательность оракулов $H^0_{E,\beta}, \ldots$ $\ldots, H^\gamma_{E,\beta}, H^{\gamma+1}_{E,\beta}, \ldots$ обладает свойством $\gamma_1 < \gamma_2 \to H^{\gamma_1}_{E,\beta} \subseteq H^{\gamma_2}_{E,\beta}$, откуда в силу счетности графиков $H^\gamma_{E,\beta}$ найдется счетный ординал

x)
$$E(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{если } \exists t(\alpha(t) = 0), \\ 1 - & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

γ_0 такой, что $H^{\gamma_0}_{E,\beta} = H^{\gamma_0+1}_{E,\beta} = \ldots$ Функция $H_{E,\beta} = H^{\gamma_0}_{E,\beta}$ удовлетворяет приведенным выше условиям и есть минимальная неподвижная точка построенной трансфинитной последовательности.

Обобщением клиниевской вычислимости является итерированная клиниевская вычислимость [7] относительно семейства оракулов $\{H^{\tau}_{\nu,E}\}_{\tau\le|\nu|}$, построенного вдоль данной ординальной нумерации ν. Здесь $K[\nu]$ – номерное множество начального отрезка ординалов $|\nu|$, $K[\nu\restriction\tau] = K_{\tau}[\nu]$. Оракулы $H^{\tau}_{\nu,E}$, $\tau\le|\nu|$, есть минимальные функции, определяемые условиями:

1) функционал E $H^{\tau}_{\nu,E}$-вычислим,

2) графики $H^{\nu j}_{\nu,E}$ $H^{\tau}_{\nu,E}$-разрешимы равномерно по $j\in K_{\tau}[\nu]$.

Назовем τ точкой насыщения нумерации ν, если $B^*(H^{\tau}_{\nu,E}) = \bigcup_{\sigma<\tau} B^*(H^{\sigma}_{\nu,E})$. Для τ, не являющихся точками насыщения, оракулы $H^{\tau}_{\nu,E}$ регулярны, для точек насыщения это не обязательно так. Но с помощью оператора $\Phi_{\nu,E}$ из [7] по каждой нумерации ν можно построить регулярную нумерацию $\Phi_{\nu,E}[\nu]$ (для которой все оракулы $H^{\tau}_{\nu,E}$ регулярны). Впредь считаем нумерации ν регулярными. Определим функционал E_1 (гиперджамп):

$$E_1(\beta,t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t\in \text{графику } H_{E,\beta}, \\ 1 & \text{– в противном случае.} \end{cases}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Если τ – точка насыщения (регулярной) нумерации ν, то E_1 $H^{\tau}_{\nu,E}$-вычислим.*

§2. Воспроизведение метарекурсии в языке F-вычислений

В [8] была построена модель КР на классах абстрактных множеств (F-множеств) с "развертками" в виде F-вычислимых деревьев с обрывом всех цепей – для регулярного и слабо фундированного оракула F. Отсюда непосредственно следует допустимость по Крипке ординала $|T(F)|$. Возникает вопрос об эквивалентности понятий допустимости ординала $|T(F)|$ по Крипке и Крайзелю, иными словами, достаточно ли допустимости ординала $|T(F)|$ по Крипке для воспроизведения на нем метарекурсии на $T(F)$-кодах. Для произвольных оракулов это проблематично. Легко по данному слабо фундированному и регулярному оракулу F построить равнообъемный[x)] ему слабо фундированный нерегулярный оракул F_1. Ввиду равнообъемности F и F_1 модель КР на F_1-множествах существует, однако не удается построить метарекурсию на $T(F_1)$-кодах. Таким образом, доказательство допустимости ординала $|T(F)|$ по Крайзелю будет одним из этапов воспроизведения метарекурсии в рамках F-вычислений.

Однозначность системы обозначений для ординалов, меньших $|T(F)|$, связана с наличием на $T(F)$ системы канонических представителей, или такой F-вычислимой функции φ: $T(F) \to T(F)$, что $|\varphi(z)| = |z| \wedge |z_1| = |z_2| \to \varphi(z_1) = \varphi(z_2)$ для любых $z, z_1, z_2 \in T(F)$. Для произвольного регулярного и слабо фундированного оракула F существование канонических представителей на $T(F)$ проблематично. Однако можно воспроизвести метарекурсию на $T(F)$-кодах и для неоднозначной системы обозначений ординалов, что явится некоторым обобщением теории Крайзеля - Сакса. Неоднозначность нумерации требует, однако, при представлении ординальных функций, отображающих начальный отрезок ординалов, меньших $|T(F)|$, в себя числовыми функциями $\tilde{f}$: $T(F) \to T(F)$ следующего условия согласованности:

$$\tilde{f}(x_1) = y_1 \wedge \tilde{f}(x_2) = y_2 \wedge |x_1| = |x_2| \to |y_1| = |y_2|.$$

В теории Крипке имена ординалов - это сами ординалы, а в языке F-вычислений - $T(F)$-коды ординалов. Напомним правила вывода в теории Крипке(Крайзеля). Правило R1 есть подстановка в равенство вместо всех вхождений некоторой переменной ординала ($T(F)$-кода). Правило R2 есть замена некоторого функционального терма на равный ему ординал ($T(F)$-код). Правило R3 состоит из двух фигур:

а) $$\frac{t(\bar{\gamma}) = 0 \text{ для некоторого } \gamma < \beta < |T(F)|}{(x < \bar{\beta}\ t(x)) = 0},$$

б) $$\frac{t(\bar{\gamma}) = 1 \text{ для всех } \gamma < \beta < |T(F)|}{(x < \bar{\beta}\ t(x)) = 1},$$

где $\bar{\gamma}, \bar{\beta}$ - имена (т.е. сами ординалы или $T(F)$-коды соответственно) γ, β соответственно.

---

x) Два оракула называются равнообъемными, если всякое незастревающее вычисление с одним из них воспроизводится равномерным образом с другим, и наоборот. Следовательно, классы тотальных, вычислимых с обоими оракулами функций, совпадают.

В теории Крипке доказывается метарекурсивность операций обычной теории рекурсии, распространенной на ординалы - сложения, умножения, возведения в степень, μ-оператора, операторов подстановки и рекурсии, а также допускается использование метаконечных множеств в качестве значений переменных.

Ординальная функция $f\colon |T(F)| \to |T(F)|$ называется $|T(F)|$-рекурсивной, если ее значения выводятся из конечной системы ординальных равенств по правилам R1-R3.

Пусть $\varepsilon = S_0^{\varepsilon}$, через $S_{\gamma+1}^{\varepsilon}$ обозначим равенства, выводимые из системы S_{γ}^{ε} по одному из правил R1-R3, для предельного ординала λ $S_{\lambda}^{\varepsilon} = \bigcup\limits_{\gamma<\lambda} S_{\gamma}^{\varepsilon}$ и, наконец, $S^{\varepsilon} = \bigcup\limits_{\gamma\in On} S_{\gamma}^{\varepsilon}$. По предложению 3 каждый ординал $\gamma < |T(f)|$ имеет F-перечислимое множество $T(F)$-кодов, поэтому с каждым ординальным равенством, следовательно, с каждым конечным множеством ординальных равенств ε, соотнесено множество числовых равенств (получающихся подстановкой в ординальные равенства вместо каждого ординала F-перечислимого множества его $T(F)$-кодов). Обозначим полученные числовые равенства по аналогии с ординальными через $\tilde{\varepsilon} = S_0^{\tilde{\varepsilon}}$, $S_{\gamma}^{\tilde{\varepsilon}}$, $S^{\tilde{\varepsilon}}$.

ЛЕММА. Для каждого $\gamma < |T(F)|$ множество $S_{\gamma}^{\tilde{\varepsilon}}$ F-перечислимо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество $\tilde{\varepsilon} = S_0^{\tilde{\varepsilon}}$ F-перечислимо ввиду регулярности оракула F. Для предельных λ F-перечислимость $S_{\lambda}^{\tilde{\varepsilon}} = \bigcup\limits_{\gamma<\lambda} S_{\gamma}^{\tilde{\varepsilon}}$ следует из индукционного допущения и регулярности оракула F. Осталось показать, что из F-перечислимости множества $S_{\gamma}^{\tilde{\varepsilon}}$ будет следовать F-перечислимость $S_{\gamma+1}^{\tilde{\varepsilon}}$, после чего доказательство завершается по лемме Роджерса.

Множество $S_{\gamma+1}^{\tilde{\varepsilon}}$ образовано присоединением к $S_{\gamma}^{\tilde{\varepsilon}}$ равенств, выводимых из $S_{\gamma}^{\tilde{\varepsilon}}$ по одному из правил R1-R3. В силу регулярности оракула F-перечислимость присоединяемых множеств может быть доказана разбором случаев. Для равенств, полученных по правилам R1-R3, а, отношения между посылкой и следствием очевидно F-перечислимы, поэтому рассмотрим случай R3, б. Пусть e - код равенства вида $(\exists x < \bar{\beta}\, t(x)) = 1$, где $\bar{\beta}$ - $T(F)$-код ординала β. Для каждого

$\sigma<\beta$ по коду $\bar\beta$ эффективно находится $T(F)$-код $\bar\sigma$ (отросток дерева $\bar\beta$), так что множество этих кодов F-разрешимо. Отношение $(t(\bar\sigma)=1)\in S^{\tilde\varepsilon}_\gamma$ F-перечислимо, навешивание квантора всеобщности, ограниченного F-разрешимым множеством, сохраняет F-перечислимость для преднормального оракула F (предложение 2). Отношения "$(\exists x<\bar\beta\ t(x))=1$ принадлежит $S^{\tilde\varepsilon}_{\gamma+1}$" и "для всех отростков $\bar\sigma$ дерева $\bar\beta$ $(t(\bar\sigma)=1)\in S^{\tilde\varepsilon}_\gamma$" эквивалентны. Таким образом, множество равенств, присоединяемых по правилу R3,б, F-перечислимо.

ТЕОРЕМА I. Ординал $|T(F)|$ допустим по Крайзелю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустимость ординала $|T(F)|$ означает, что каждое множество $S^{\tilde\varepsilon}_\gamma$ стабилизируется к моменту $|T(F)|$. Предположим, что это не так и существует равенство e, которое присоединяется на шаге $|T(F)|+1$, т.е. $e\in S^{\tilde\varepsilon}_{|T(F)|+1}\setminus S^{\tilde\varepsilon}_{|T(F)|}$. Для правил R1-R3,а это невозможно, так как если e является непосредственным следствием некоторого равенства e' по одному из правил R1-R3,а, то $e'\in S^{\tilde\varepsilon}_{|T(F)|}$, тогда в силу предельности ординала $|T(F)|$ существует ординал $\sigma<|T(F)|$ такой, что $e'\in S^{\tilde\varepsilon}_\sigma$, откуда $e\in S^{\tilde\varepsilon}_{\sigma+1}$, где $\sigma+1<|T(F)|$. Следовательно, e может возникнуть только как следствие по правилу R3,б, тогда оно имеет вид $(\exists x<\bar\beta\ t(x))=1$. По предыдущей лемме можно указать F-разрешимое множество посылок вида $t(\bar\sigma)=1$ из $S^{\tilde\varepsilon}_{|T(F)|}$, из которого это равенство может быть получено. Пусть γ_σ есть шаг, на котором появилась соответствующая посылка. С помощью селектора находим соответствующие коды $\bar\gamma_\sigma$ и строим из этих отростков дерево $\bar\gamma$, его ординал γ будет моментом появления равенства e. Таким образом, $e\in S^{\tilde\varepsilon}_\gamma$, где $\gamma<\beta<|T(F)|$. Итак, для каждого $\tilde\varepsilon$

$$S^{\tilde\varepsilon}=\bigcup_{\gamma\in On}S^{\tilde\varepsilon}_\gamma=\bigcup_{\gamma<|T(F)|}S^{\tilde\varepsilon}_\gamma$$

(последнее F-перечислимо по предыдущей лемме).

Поскольку для регулярного и слабо фундированного оракула F метарекурсивность по Крипке и Крайзелю совпадают, впредь будем говорить просто о допустимом ординале.

§3. Конструктивно недостижимые ординалы

Неподвижную точку последовательности допустимых ординалов (в порядке их возрастания) называют конструктивно недостижимым ординалом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Для допустимого ординала α множество допустимых ординалов, меньших α, α-разрешимо.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Конструктивная недостижимость ординала τ_γ эквивалентна тому, что $\tau_\gamma = \sup\limits_{\zeta<\gamma} \tau_\zeta$, где $\{\tau_\zeta\}_{\zeta<\gamma}$ – возрастающая последовательность допустимых ординалов, меньших τ_γ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 5 последовательность $\{\tau_\zeta\}_{\zeta<\gamma}$ τ_ζ-рекурсивна. Поэтому если $\sup\limits_{\zeta<\gamma} \tau_\zeta = \tau_\gamma$ и $\tau_\gamma > \gamma$, то по определению допустимости ординала τ_γ, $\sup\limits_{\zeta<\gamma<\tau_\gamma} \tau_\zeta < \tau_\gamma$, что противоречит условию. Если $\tau_\gamma = \gamma$, где τ_γ – допустимый ординал, то очевидным образом $\sup\limits_{\zeta<\gamma} \tau_\zeta = \tau_\gamma$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Если α – допустимый ординал и B – α-конечное подмножество ω, то функция $H_{E,B}$ α-рекурсивна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По построению клиниевских оракулов и ввиду предельности допустимых ординалов α и $|T(H_{E,B})|$ имеем $H^\alpha_{E,B} = \bigcup\limits_{\gamma<\alpha} H^\gamma_{E,B}$ и $H_{E,B} = \bigcup\limits_{\gamma<|T(H_{E,B})|} H^\gamma_{E,B}$. Установим α-рекурсивность функции $H^\alpha_{E,B}$, и проверим равенство $H^\alpha_{E,B} = H_{E,B}$. Как было определено в §1, $H^\alpha_{E,B}(2^t) = \chi_B(t)$, где χ_B – характеристическая функция множества B. Тогда в силу α-конечности множества B, найдутся система равенств $\tilde{\varepsilon}_B$ и ординал $\sigma<\alpha$ такие, что все равенства функции χ_B получаются из системы $\tilde{\varepsilon}_B$ за σ шагов. Допустим, что для $\gamma<\alpha$ функция $H^\gamma_{E,B}$ α-рекурсивна. Тогда отношение $y \in B^*(H^\gamma_{E,B})$ α-разрешимо:

1) если $u_1,\dots,u_n$ – конечная последовательность вопросов машины у оракулу $H^\gamma_{E,B}$, то она $H^\gamma_{E,B}$-разрешима, т.е. α-разрешима по индукционному допущению;

2) пусть вопросы $u_1,\dots,u_n$ задавались на шагах $\delta_1,\dots,\delta_n$ соответственно, тогда $\sup\limits_i \delta_i = \delta < \alpha$ ввиду первого условия и допустимости ординала α.

Для вычисления в метарекурсии значений E на аргументах, $H_{E,B}$-коды которых $y \in B^*(H_{E,B})$, потребуется применить правило R3 с ограниченными кванторами по ординалам, меньшим ω, т.е. α-рекурсивность сохраняется, $\gamma+1<\alpha$ и $(H^{\gamma+1}_{E,B}(5^y)=u) \in S^{\tilde{\varepsilon}_E}_{\theta'}$, где $\delta+1$, $\gamma+1$, $\omega<\theta'<\alpha$. Для предельных ординалов λ α-рекурсивность функций $H^{\lambda}_{E,B}=\bigcup_{\gamma<\lambda<\alpha} H^{\gamma}_{E,B}$ легко доказывается. Далее применим трансфинитную рекурсию. Таким образом, найдутся система $\tilde{\varepsilon}=\tilde{\varepsilon}_B \cup \tilde{\varepsilon}_E$ и ординал θ, $\sigma,\omega<\theta<\alpha$, такие, что все равенства $(H^{\alpha}_{E,B}(u)=v) \in S^{\tilde{\varepsilon}}_{\varepsilon}$.

Если предположить, что $|T(H_{E,B})|>\alpha$, то $\delta H^{\alpha+1}_{E,B} \setminus \delta H^{\alpha}_{E,B} \neq \emptyset$, и противоречие получается как при доказательстве теоремы I.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Если α — конструктивно недостижимый ординал, B — α-конечное подмножество ω, то график $H_{E,B}$ α-разрешим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть γ — шаг, на котором уже получены все равенства для характеристической функции множества B (доказательство предложения 7). Допустим, что γ больше всех параметров, встречающихся в этих равенствах. Тогда в силу конструктивной недостижимости ординала α найдется такой допустимый ординал β, что $\gamma<\beta<\alpha$ и B β-разрешимо. По предложению 7 функция $H_{E,B}$ β-рекурсивна, следовательно, график $H_{E,B}$ α-разрешим.

ТЕОРЕМА 2. Если E_1 F-вычислим, то $|T(F)|$ — конструктивно недостижимый ординал (по Крипке).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что для любого допустимого ординала $\sigma<|T(F)|$ найдется допустимый ординал σ' такой, что $\sigma<\sigma'<|T(F)|$. Множество $\{y\in T(F): |y|=\sigma<|T(F)|\}$ F-перечислимо по предложению 3. С помощью селектора выбираем из него элемент $y\in T(F)$ и, учитывая, что $T(F)\leq_1 B^*(F)$ для регулярного и слабо фундированного оракула F, эффективно находим $z\in B^*(F)$, F-код некоторой тотальной функции β. По условию график $H_{E,\beta}$ β-разрешим, следовательно, $|T(H_{E,\beta})|<|T(F)|$ и $|T(H_{E,\beta})|$ — допустимый ординал. Функция β $H_{E,\beta}$-вычислима, поэтому $|z|=\sigma<|T(H_{E,\beta})|<|T(F)|$, т.е. $|T(H_{E,\beta})|$ — искомый допустимый ординал.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Если оракул F есть $|T(F)|$-рекурсивная функция, $|T(F)|$ — конструктивно недостижимый ординал, то E_1 F-вычислим.

§4. Метарекурсивность автономной нумерации

В [7] определены автономные нумерации, служащие в какой-то степени уточнением эффективных нумераций ординалов. Принцип навешивания оракулов на произвольную нумерацию (иерархия), описанный в §I, сохраняется для автономных нумераций. Автономная процедура задается парой $\langle w,n \rangle$ (где w – инициальная машина, а $n+1$ – фиксированное число шагов "предвосхищения"), как будет описано ниже. Пусть $\nu \upharpoonright \tau$ – уже построенный кусок нумерации ν, в котором нет номеров $0,1,\ldots,n$, продолжим его на $n+1$ шагов, используя $0,1,\ldots$ $\ldots,n$ в качестве временных номеров ординалов $\tau,\ \tau+1,\ldots,\tau+n$. Пусть ν' – новая нумерация длины $\tau+n+1$ и $H_{\nu'}^{|\nu'|}$ – ее замыкающий оракул. Соединим машину w с оракулом $H_{\nu'}^{|\nu'|}$ и вычислим некоторое число i, если машина при этом не застрянет и не будет работать бесконечно. Если $i \notin K_{\tau}[\nu]$, то $i = \nu^{-1}\tau$, в противном случае результат применения процедуры к $\nu \upharpoonright \tau$ не определен. Имея теперь кусок $\nu | \tau+1$, продолжаем его аналогичным образом. Автономная нумерация порождается таким процессом, начиная с нуля до момента, когда очередной номер окажется неопределенным. Без ограничения общности можно считать, что $\langle w,n \rangle$ выбрано так, что $|\nu|$ – точка насыщения и H_{ν}^{σ} – регулярные оракулы для всех $\sigma \le |\nu|$. По предложению 4, E_1 $H_{\nu}^{|\nu|}$-вычислим и, по теореме 2, $|\nu| = |T(H_{\nu,E})|$ – конструктивно недостижимый ординал. При этих предположениях верна следующая

ТЕОРЕМА 3. Автономная нумерация ν $|\nu|$-рекурсивна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Автономная нумерация порождается двумя идущими параллельно процессами – вычисления новых номеров и навешиванием на них оракулов итерированной клиниевской вычислимости. $|\nu|$-рекурсивность автономной нумерации будет означать $|\nu|$-рекурсивность последовательности $\{C_{\nu,E}^{\tau}\}_{\tau<|\nu|}$, где $C_{\nu,E}^{\tau} = \{\langle j,x \rangle :$ $j \in K_{\tau}[\nu] \wedge x \in$ графику $H_{\nu,E}^{\nu j}\}$. Доказательство проводится по трансфинитной рекурсии, для чего надо осуществить переход от τ к $\tau+1$ (для предельных ординалов трудностей не возникает). Так как $C_{\nu,E}^{\tau+1} = C_{\nu,E}^{\tau} \cup \{\langle \nu^{-1}\tau, x \rangle :\ x \in$ графику $H_{\nu,E}^{\tau}\}$ $(\tau < |\nu|)$ и $C_{\nu,E}^{\tau}$ $|\nu|$-конечно, по индукционному допущению, то график $H_{E,C_{\nu,E}^{\tau}}$

$|\nu|$-разрешим (по предложению 8). По лемме 3 из [7] оракул $H^{\tau}_{\nu,E}$ $H_{E,C^{\tau}_{\nu,E}}$-вычислим равномерно по ν,τ, тогда график $H^{\tau}_{\nu,E}$ $|\nu|$-разрешим (независимо от ν-номера τ). Для установления $|\nu|$-разрешимости множества $C^{\tau+1}_{\nu,E}$ осталось установить наличие $|\nu|$-рекурсивной процедуры для вычисления номера $\nu^{-1}\tau$. Исходя из определения автономности, переходим к вспомогательной нумерации $\nu' = \nu\restriction\tau \cup \{\langle\tau,0\rangle, \langle\tau+1,1\rangle,\dots,\langle\tau+n,n\rangle\}$. Тогда, во-первых, $C^{\tau}_{\nu} = C^{\tau}_{\nu'}$, и, во-вторых, имеются ν'-номера ординалов $\tau, \tau+1,\dots$ $\dots,\tau+n$ – тем самым заданы множества $C^{\tau+1}_{\nu'},\dots, C^{\tau+n}_{\nu'}$. По предыдущим замечаниям, множество $C^{\tau}_{\nu'}$ и график $H^{\tau}_{\nu,E}$ $|\nu|$-разрешимы. Тогда соответственно множества $C^{\tau+1}_{\nu',E} = C^{\tau}_{\nu',E} \cup \{\langle\nu^{-1}\tau, x\rangle\}$: $x \in$ графику $H^{\tau}_{\nu,E}\}$, $C^{\tau+2}_{\nu',E},\dots,C^{\tau+n}_{\nu',E}$ и графики оракулов $H_{E,C^{\tau+1}_{\nu',E}},\dots$ $\dots, H_{E,C^{\tau+n-1}_{\nu',E}}$ $|\nu|$-разрешимы. Тогда графики оракулов $H^{\tau+1}_{\nu',E},\dots$ $\dots, H^{\tau+n-1}_{\nu',E}$ и график замыкающего оракула $H^{\tau+n}_{\nu',E}$ $|\nu|$-разрешимы. На машине w (из генератора автономной процедуры) с оракулом $H^{\tau+n}_{\nu',E}$ вычисляется номер $\nu^{-1}\tau$, следовательно, вычисляющая процедура $|\nu|$-рекурсивна. Поэтому множество $C^{\tau+1}_{\nu,E}$ $|\nu|$-разрешимо, индукционный шаг завершен, далее по трансфинитной рекурсии.

Литература

I. KRIPKE S. Transfinite recursion on admissible ordinals. I, II (Abstracts)//J.Symb.log.-1964.-Vol.29.-P.161-162.

2. PLATEK R. Foundations of recursion theory// Thesis.-Stanford (Calif): Stanford University.-1966.

3. RICHTER W. Constructive accesible ordinal numbers//J.Symb.log.-1968.-Vol.33.-P.43-55.

4. RICHTER W. Recursively Mahlo ordinals and inductive definitions// J.log.colloq.-1969 /Ed.R.O.Gandy and C.E.M.Yates. - Amsterdam: North-Holland.-1971.- P.273-288.

5. KREISEL G., SACKS G.S. Metarecursive sets // J.Symb.log.-1965.- Vol.30.-P.318-338.

6. KLEENE S.C. Recursive functions and quantifiers of finite type // Trans.Amer.Math.Soc.-1959.-Vol.91.-P.1-52.

7. БЕЛЯКИН Н.В. Итерированная клиниевская вычислимость и суперджамп // Мат.сб.- М.- 1978. - Т.101,№ 1.- С.21-43.

8. ГАМОВА А.Н. Моделирование теории множеств в терминах вычислений с оракулами //Ред. журн. "Сиб.мат.журн." - Новосибирск, 1983. - 23 с. - Деп. в ВИНИТИ, № 2041-83.

Поступила в ред.-изд.отд.
17 июня 1987 года